

Modified Carson's Method를 이용한 전차선로의 Impedance 계산

이춘배*, 김왕곤*, 이종우**
 서울산업대학교*, 철도연**

Impedance Calculation for Electric Railway System using modified Carson's Method

LEE Chunbae*, KIM Wanggon*, LEE Jongwoo**
 Seoul National University of Technolgy*, Korea Railroad Research Institute**

Abstract -The method proposed by Carson contains indefinite complex integral which simulates earth return current. Although the Carson solution is proposed with power series, the solution is limited and valid at special range of frequency. We proposed a simplified Carson solution by modelling earth current path analytical method using ground transmission line return current. In this paper, we studied on trying to find the equivalent distance for earth current return path.

1. 서론

전철에서 전력전송라인의 임피던스 측정은 시스템의 특성을 정의하는 매우 중요한 요소 중의 하나이다. 전송선 임피던스는 자기임피던스와 상호임피던스 등 2개의 요소로 나뉜다. 자기임피던스는 전송선을 통하여 대지로 귀환되는 전류에 대한 단위 길이 당 전압강하 비율이다. 도체 *i*와 도체 *j* 사이의 상호임피던스 Z_{ij} 는 도체 *j*의 전류에서 도체 *i*에 유기되는 전압 비율을 의미한다. 서로 대칭일 경우에는 Z_{ij} 와 Z_{ji} 는 동일하다. 자기임피던스와 상호임피던스는 대지귀환전류에 영향을 받는다. 대지는 반 무한대 비 이상적인 도체로 간주된다. 전송선에 흐르는 전류는 전송선 아래에 퍼져있는 자기적으로 유도된 대지 귀환전류를 발생시키며, 가장 낮은 임피던스 경로로 흐른다. 표피 및 근접효과에 야기된 것과 대지에서 유도된 대지귀환 전류의 분포를 결정하는 것은 매우 어렵다. 지난 100년 동안 여러 연구자에 의해서 제안된 방법은 Carson방법, 복합적 방법 및 유한요소법이 사용되고 있다.

본 논문에서는 Carson의 방법을 간략화한 복합적 대지 모델링 법을 사용하여 급전시스템의 임피던스를 계산하였다.

2. Carson Method

임피던스의 계산식은 Carson에 의해서 제안된 대지 임피던스 계산 방법이 가장 널리 사용되고 있다[1]. 대지 귀환에서 Carson은 대지의 도체가 도전율을 갖는 점을 고려하여 대지 임피던스를 구하였다. 대지 임피던스를 구하기 위해 매질에서 전기장이 파동특성을 갖는 것을 고려하고, 파동방정식의 일반 해 및 경계 조건을 이용하여 모델링 하여 대지귀환 임피던스를 구하였다.

Carson은 자기임피던스 및 상호임피던스를 $Z_{ii} = Z_{ii}^0 + Z_{ii}^z$ 와 $Z_{ij} = Z_{ij}^0 + Z_{ij}^z$ 로 나타내었다.

Z_{ii}^0 와 Z_{ij}^0 는 대지가 완벽한 도체라는 것을 고려하여 구한 임피던스이며, Z_{ii}^z 와 Z_{ij}^z 는 대지가 유한도체라는 것을 고려한 항목이다. Carson의 식에서 Z_{ii} 와 Z_{ij} 는 다음과 같이 정의된다.

$$Z_{ii} = z + j2\omega \ln((h_i + h_i)/r_d) + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + j - \mu}) e^{-2h_i \mu} d\mu \quad (1)$$

$$Z_{ij} = j2\omega \ln(D_{ij}/D_{ij}') + 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + j - \mu}) e^{-(h_i + h_j)\mu} \cos x_{ij} \mu d\mu \quad (2)$$

단

$$D_{ij} = \sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2}$$

$$D_{ij}' = \sqrt{(h_i + h_j)^2 + x_{ij}^2}$$

$$h_i' = h_i \sqrt{\alpha}$$

$$h_j' = h_j \sqrt{\alpha}$$

$$x_{ij} = x_{ij} \sqrt{\alpha}$$

앞 절로 부터, 대지귀환 직렬 자기임피던스는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$Z_{ii} = Z^0 + Z \quad (3)$$

상호임피던스는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_{ij} = Z_{ij}^0 + Z_{ij}^z \quad (4)$$

단 Z^0 와 Z_{ij}^0 는 대지가 완전도체라고 가정된 각각의 자기와 상호임피던스이다.

$$Z = J_{ii} = 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i - \mu}) e^{-2h_i \mu} d\mu \quad (5)$$

$$Z_{ij}^z = J_{ij} = 4\omega \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i - \mu}) e^{-(h_i + h_j)\mu} \cos x_{ij} \mu d\mu \quad (6)$$

유전체에서 회로상수와 전자기장의 계산은 다음과 같은 무한적분을 이용하여 계산을 한다.

$$K(p, q) = J = \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + i - \mu}) e^{-p\mu} \cos q\mu d\mu \quad (7)$$

Carson의 식을 목적에 맞게 변형을 시키면 다음과 같이 된다.

$$Z_{ii} = j2 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(2h_i / r_d) + \omega \frac{\mu}{\pi} J_s \quad (8)$$

$$Z_{ij} = j2\omega \ln(D_{ij} / D_{ij}') + \omega \frac{\mu}{\pi} J_m \quad (9)$$

단

$$J_s = \int_0^\infty \frac{j e^{-2h_i \lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} d\lambda$$

$$J_m = \int_0^\infty \frac{j e^{-(h_i + h_j)\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu\sigma}} \cos \lambda d_{ij} d\lambda$$

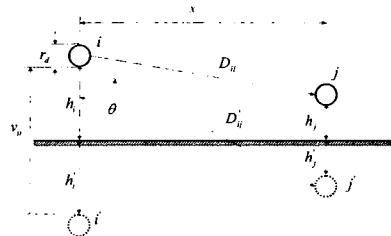


그림 1 전송도체 *i* 및 *j*와 전송도체 *i'* 및 *j'*

Carson 방법에 의한 선로의 임피던스 계산은 복소수 항목을 갖는 부정적분을 포함하는 식이다. 무한급수에 의해 Carson의 식을 계산하는 방식이 제안되었으며, 이 방식은 저주파 및 고주파에 대해서 적절한 값을 얻을 수 있다. 반면에 각 주파수에 대해서 무한급수의 주어진 범위 내에서만 값이 유효하다.

3. 연속적 복층 대지방법

3.1 대지귀환 모델링

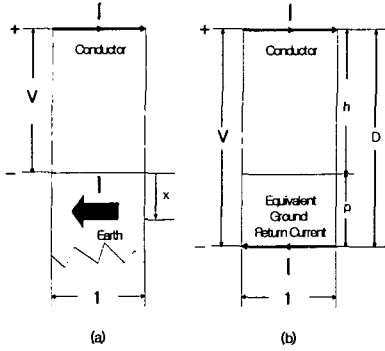


그림 2 대지귀환전류의 모델링 (a)은 전류가 대지 전체를 퍼져 흘러가는 것 경우 (b)는 대표 값 통로

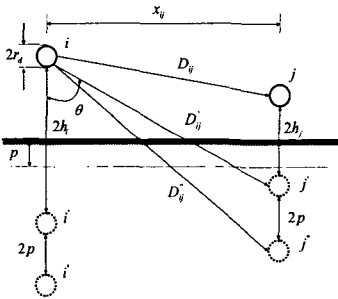


그림 3 전송도체 i 및 j 와 전송도체 i' 및 j' , skin depth p

Carson식의 대지귀환 값에 관련된 보정 항을 Z_{ii} 과 Z_{ij} 은 그림 2의 (a)를 나타낸 것으로 무한 적분 항을 포함하고 있다. 따라서 그림 2의 (a)의 면적을 무게 중심을 그림 2(b)와 같이 나타내면 Carson의 식을 간단하게 할 수 있다. 그림 2(b)는 대지를 공기 중에 해당하는 조건으로 변환하고 그 조건에 해당하는 p 를 상응한 도체가 있는 것으로 나타낼 수 있다.

$$Z_{ii} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2(h_i + p)}{r_i} \quad (10)$$

$$Z_{ij} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(h_i + h_j + 2p)^2 + x_{ij}^2}}{\sqrt{(h_i - h_j)^2 + x_{ij}^2}} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}}{D_{ji}} \quad (11)$$

위 식은 대지귀환 전류를 귀선 도체가 공기 중에 있는 것으로 모델링을 하여 구한 식이다. 따라서 대지 깊이 p 를 구하는 것이 중요한 문제 중 하나이다.

3.2 균일 대지 모델링

그림 2에서 I 는 단위 길이 당 전류를 나타내고, 자기장의 세기는 $H_0 = H(0) = I$ 이다. 단 $H(x)$ 는 깊이 x 에서 자기장 세기이다. 관련된 미분방정식은 방정식을 다음과 같다.

$$\frac{dE}{dx} = -j\omega\mu_0 H$$

$$\frac{dH}{dx} = -\sigma E \quad (12)$$

$k-1$ 층과 k 층의 관계는 그림 4에서 나타낸 것과 같이 나타낼 수 있다. 모델링은 층간($k-1, k$)의 전·자기장의 세기(E_{k-1}, H_{k-1} 및 E_k, H_k)의 관계를 공기 중의 투자율 μ_0 , 도전을 σ_k , 표피의 깊이 P_k , 층간깊이와 표피효과 간 감쇄율의 관계 θ_k , 전장파와 자장파의 계는 ζ_k 로 나타내었다.

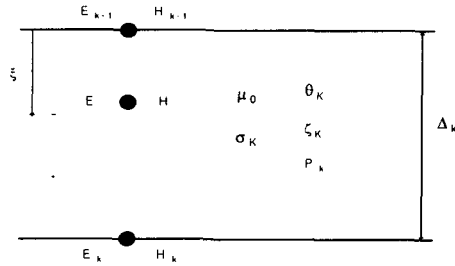


그림 4 k 층의 모델링
그림 3을 참조하여 k 층에 대한 것으로 풀어쓰면 해가 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} E_k \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k-1} \\ H_{k-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$A_k = D_k = \frac{\theta_k - \theta_k^{-1}}{2} = \cosh \frac{\Delta k}{P_k} \quad (14)$$

$$B_k = \zeta_k \frac{\theta_k - \theta_k^{-1}}{2} = \zeta_k \sinh \frac{\Delta k}{P_k} \quad (15)$$

$$C_k = \frac{1}{\zeta_k} \frac{\theta_k - \theta_k^{-1}}{2} = \frac{1}{\zeta_k} \sinh \frac{\Delta k}{P_k} \quad (16)$$

단

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_0\sigma_k}}$$

$$\zeta_k = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\sigma_k}}$$

$$\theta_k = e^{-\frac{\Delta}{P_k}}$$

이러한 식은 직접 혹은 과도방정식을 이용하여 얻을 수 있다. F 는 전진파 및 B 는 후진파라고 할 때, 다음과 같은 식을 얻는다.

$$E = E_F + E_B$$

$$H = H_F + H_B \quad (17)$$

$$E_F = \zeta_k H_F = E_{F,k-1} e^{-\frac{\Delta}{P_k}} \quad (18)$$

$$E_B = -\zeta_k H_B = E_{B,k} e^{\frac{\Delta}{P_k}} \quad (19)$$

$$H_F = H_{F,k-1} e^{-\frac{\Delta}{P_k}} \quad (20)$$

$$H_B = H_{B,k} e^{\frac{\Delta}{P_k}} \quad (21)$$

마지막 층 $n+1$ 층에서는 후진파가 소멸된다. 따라서

$$\frac{E_n}{H_n} = \zeta_{n+1} \quad (22)$$

$$\frac{E_0}{H_0} = \zeta_1 = \zeta \quad (23)$$

식 14의 경우에는 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$H = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (24)$$

대지에서 전체 플럭스는 다음과 같다.

$$\phi = \mu_0 \int_0^{\infty} H dx = \mu \mu_0 H_0 \quad (25)$$

복합깊이 p 와 같은 플럭스 ϕ 로부터 그림 2(b)에서 정의된 것과 같다. 따라서 균일한 대지와 $\mu = \mu_0$ 에서 복합대지 침투 깊이는

$$p = \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_0\sigma}} \quad (26)$$

이며

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma}} \quad (27)$$

이 된다.

그리고

$$\frac{1}{p} = (1+j) \frac{1}{\delta} \quad (28)$$

3.3 복층 대지 모델링

복층의 경우에, 식(13)은 다음과 같이 적용할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} E_k \\ H_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{k0} & B_{k0} \\ C_{k0} & A_{k0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

특히, $k=n$ 에 대해서, 식 (20)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} E_n \\ H_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n0} & B_{n0} \\ C_{n0} & A_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

식(15)을 이용하여 다시 전개하면

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n0} & -B_{n0} \\ -C_{n0} & A_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{n+1} \\ 1 \end{bmatrix} H_n \quad (31)$$

H_n 을 제거를 하면

$$E_0 = \frac{\zeta_{n+1} A_{n0} - B_{n0}}{A_{n0} - \zeta_{n+1} C_{n0}} H_0 \quad (32)$$

$H_0 = I_0$ 이기 때문에, E_0 는 식(21)로부터 구할 수 있다. 따라서 k 층에서의 플럭스는 식(25)을 적분함으로써 얻어질 수 있다.

$$\phi_k = \mu_0 \int_0^{\infty} H dx = \frac{1}{j\omega} (E_{k-1} - E_k) \quad (33)$$

전체 플럭스는

$$\phi = \sum \phi_k \quad (34)$$

이식을 통하여 식(17)에서의 복합깊이 계산이 가능하다.

$$p = \frac{\sum \phi_k}{\mu_0 H_0} \quad (35)$$

3.4 연속적 변화는 대지 모델링

복층 대지의 경우를 조건에 의한 절차에 의해서 연속문제로 간략화 할 수 있다.

식(13)은 식(12)을 간략화 시킬 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j\omega\mu_0 \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \quad (36)$$

식 (12)의 적분은 σ 가 x 의 함수이기 때문에, 폐쇄형의 해석적인 형태이므로 적분이 불가능하다. 그러나 수치적 적분은 초기조건 $E(0) = E_0$, $H(0) = H_0$ 값을 가지고 간단

하게 구할 수 있다. E_0 의 값을 모를 경우, x 가 무한히 큰 값(x_{∞})에서 다음에 오는 조건을 만족할 때까지 반복적인 방법에 의해서 해를 구하여야 한다. 반향파

$$E_B = \frac{1}{2} (E(x_{\infty}) - \zeta(x_{\infty})H(x_{\infty})) \quad (37)$$

는 소멸되어야 한다.

그 때에는 (12)로부터,

$$\phi = \int_0^{x_{\infty}} \mu_0 H dx = \frac{1}{j\omega} (E_0 - E_{x_{\infty}}) = \frac{E_0}{j\omega} \quad (38)$$

궁극적으로, 복합층 깊이는 다음 관계로부터 얻을 수 있다.

$$p = \frac{\phi}{\mu_0 H_0} \quad (39)$$

복합층 깊이 p 을 고려하면, p 는 귀환전류의 무게중심을 나타낸다.

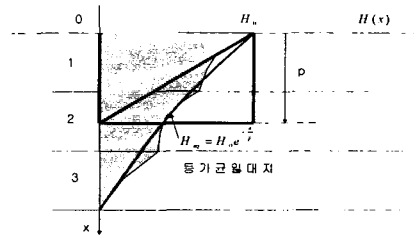


그림 5 $H(x)$ 무게중심으로서의 복합깊이 p

그림 3에서 보는 것과 같이 $H(x)$ 의 부분은 빗금이 쳐 있다. 등가 균일 대지로 가정하면 $H_{eq} = H_0 e^{-\frac{x}{\delta}}$ 이 된다. 그리고 $H(x)$ 의 형태와 상관이 없이 무게중심을 구하면 깊이 p 에 해당하는 사각형과 동일하게 된다.

4. 결론

본 논문에서는 Carson의 임피던스 계산방법을 대지/도체 귀환전류를 공기 중에 도선을 모델링 한 후 p 를 구하는 방법으로 개선하였다. 이 식은 Carson 식에 포함하고 있는 무한적분이나 급수를 포함하고 있지 않기 때문에 상대적으로 임피던스를 구하는 것이 용이하다.

[참고문헌]

- [1] 이춘배 et al. "전기철도에서 급전선로의 line impedance 계산에 관한 연구", 철도학회 춘계학술대회, 경주, 2004
- [2] Yaw-Juen Wang and Shi-Jie LIU "A Review of Method for Calculation of Frequency-dependant Impedance of Overhead Power Transmission Lines", Proc. Natl. Conc. ROC(A) Vol. 25, No. 6, 2001. pp. 329-338
- [3] Sergey L. Loyka, "On Calculation of the Ground Transient Resistance of Overhead Lines", IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility, vol. 41, pp. 193-195, August 1999.
- [4] A. Deri et al. "The Complex Ground Return Plane A Simplified Model For Homogeneous And Multi-Layer Earth Return", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 100(8), 3686-3693, 1981
- [5] 장길수, "도시철도표준화 연구개발사업 (PSCAD/EMTDC를 이용한 도시철도 교류 급전시스템 해석 모델 개발 및 적용)", 한국철도기술연구원, 2002