Proceedings of the Korean Data And Information Science Society,
October 22-23, 2004, pp. 33-42

Analysis of a Random Shock Model for a System and Its Optimization[1)]

Jeong Hun Park[2)] · Seung Kyoung Choi[3)] · Eui Yong Lee[4)]

Abstract

In this paper, a random shock model for a system is considered. Each shock arriving according to a Poisson process decreases the state of the system by a random amount. A repairman arriving according to another Poisson process of rate λ repairs the system only if the state of the system is below a threshold α. After assigning various costs to the system, we calculate the long-run average cost and show that there exist a unique value of arrival rate λ and a unique value of threshold α which minimize the long-run average cost per unit time.

Keywords : long-run average cost, Poisson process, random shock model.

1. 서론

신뢰성이란 시스템이 주어진 환경에서 일정 수준 이상의 성능을 유지할 확률을 의미한다. 시스템의 신뢰성을 추정하기 위해 시스템의 구조와 상태에 대한 연구가 1960년대 초부터 시작되었다. 초기에는 주로 시간의 개념이 없는 정적인 상태에서 시스템의 구조함수를 통한 신뢰성 연구가 이루어졌으나, 1980년대 후반에 들어 Baxter와 Lee(1987, 1988)에 의해 시스템의 동적인 확률모형이 제시되고, 이의 확률적인 분석을 통하여, 시간이 감에 따라 변화는 시스템의 신뢰성에 관한 연구가 시작되었다.

그 후 많은 사람들에 의해 시스템 모형이 제시되고 연구되었는데, 그 중에 하나가 Lee와 Lee(1993)에 의해 연구된 임의 충격을 받는 시스템의 마르코프 확률모형이다. 이 모형은 시스템의 초기상태를 $\beta > 0$로 놓고, 도착률 $\nu > 0$인 포아송 확률과정을 따라 도착하는 임의충격에 의해 시스템 상태가 양의 확률변수 Z 만큼 떨어진다고 가정한다. 또한 수리공은 도착률 $\lambda > 0$인 포아송 확률과정을 따라 시스템을 점검하며, 만약 수리공이 도착했을 때, 시스템의 상태가 적정수준 α 이하이면 즉시 수리해서 시스템의 상태를 초기상태인 β로 올려놓고, 그렇지 않으면 수리공은 그냥 시스템을 떠난

---

1 This Research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2003.
2 First Author : Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.
3 Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.
4 Professor, Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.
E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr

다. Lee와 Lee(1994)는 시스템 점검시 드는 비용, 수리시 드는 비용, 상태가 적정수준 α 이하에 있는 동안 단위시간당 비용 등을 고려한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 최소화하는 λ가 유일하게 존재함을 보였다.

본 논문에서는 Lee와 Lee(1993)의 임의 충격이 있는 시스템 모형에서, 충격의 양 Z가 지수분포를 따르는 경우에, 시스템의 관리에 관련된 보다 일반화된 4가지 비용을 고려한 후, 장시간에 걸친 단위시간당 평균 비용을 최소화하는 α 및 λ의 값이 유일하게 존재함을 보인다. 고려되는 4가지 비용은 수리공이 와서 시스템을 점검할 때 드는 비용, 시스템의 상태를 단위 양만큼 수리하는데 드는 비용, 시스템의 상태가 적정수준 α 이하에 있는 동안 단위시간당 페널티(penalty), 장시간에 걸친 시스템의 상태에 비례하는 보상비용 등이다. 시스템 상태에 대한 보상비용이 없는 경우와 있는 경우로 나누어 분석이 이루어지며, MATLAB을 이용한 예제를 통해 그 결과를 확인한다.

2. 최적화

2.1 시스템의 상태에 대한 보상비용이 없는 경우

수리공이 시스템을 점검할 때마다 드는 비용을 C_1, 시스템의 상태를 단위 양만큼 올리는데 드는 수리비용을 C_2, 시스템 상태가 α 이하에 있는 동안 단위시간당 페널티를 C_3라고 하자. 장시간에 걸친 단위시간당 평균비용은 재생보상정리[Ross(1996, p.133)]에 의해 다음과 같다.

$$C(\alpha,\lambda)=\frac{E(N)C_1+[\beta-\alpha+E(Z')]C_2+\frac{1}{\lambda}C_3}{E(T^*)}. \tag{2.1}$$

여기서, T^*는 실제 수리와 수리사이의 시간이고, N은 T^*동안 수리공이 도착하는 횟수이고, Z'은 수리공이 점검하기 직전에 시스템의 상태가 α 이하로 떨어졌던 양이다.

$E(T^*)$는 시스템의 상태가 α보다 좋았던 기간 T_α와 α 이하인 기간 E^λ(도착률 λ인 지수확률변수)의 각각의 기대값의 합으로 나타낼 수 있다. $E(T_\alpha)$는 β에서 α 이하로 떨어지는데 필요한 충격의 수 N_α의 기대값에 E^ν(도착률 ν인 지수확률변수)의 기대값을 곱해서 구할 수 있다(그림 1 참조). 즉,

$$E(T^*)=\frac{1}{\nu}\left[1+\frac{1}{\mu}(\beta-\alpha)\right]+\frac{1}{\lambda}. \tag{2.2}$$

여기서, $\mu=E(Z)$이다.

$E(N)$은 T^*동안 수리공이 도착하는 횟수에 대한 기대값이다. 수리공의 도착률은

λ이므로 T^*동안 수리공은 평균 $\lambda E(T^*)$번 오게 되고, 식(2.2)를 이용하면 $E(N)$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(N) &= \lambda E(T^*) \\ &= \frac{\lambda}{\nu}\left[1 + \frac{1}{\mu}(\beta - \alpha)\right] + 1. \end{aligned}$$

$E(Z')$은 수리공이 오기 직전에 시스템의 상태가 α 이하로 떨어졌던 양에 대한 기대값이다. 이것은 지수확률변수의 비기억성에 의해 시스템의 상태가 α 이하인 기간 E^λ 동안에 온 랜덤 충격 Z들의 합으로 나타낼 수 있으므로 다음과 같다.

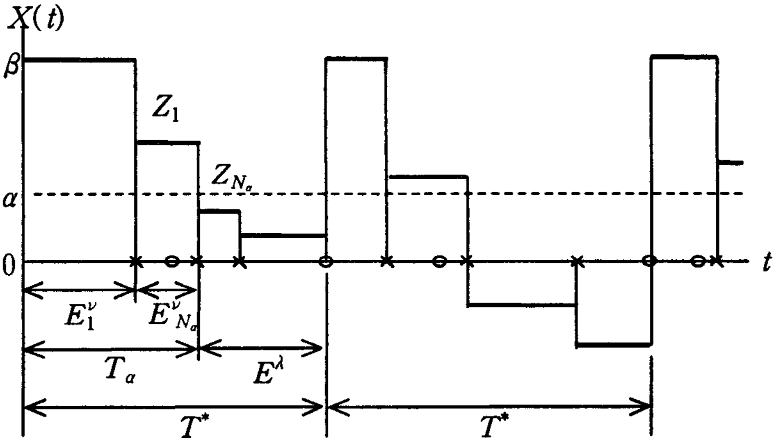

그림 1 (X : shock , o : repairman)

$$\begin{aligned} E(Z') &= E\left[\sum_{i=1}^{N(E^\lambda)+1} Z_i\right] \\ &= \int_0^\infty E\left[\sum_{i=1}^{N(x)+1} Z_i\right]\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n+1} Z_i\right]\frac{(\nu x)^n e^{-\nu x}}{n!}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \mu + \frac{\nu\mu}{\lambda}. \end{aligned}$$

실제 수리비용 C_2는 수리 직전의 상태에서 수리 직후의 상태인 β까지 점프되는 양에 비례하며, 점프되는 양은 $\beta - \alpha + E(Z')$이 된다. 따라서, 적정수준 α와 수리공

의 도착률 λ에 대한 단위시간당 평균비용은 다음과 같다.

$$C(\alpha, \lambda) = \lambda C_1 + \nu\mu C_2 + \frac{\nu\mu}{\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)} C_3 . \tag{2.3}$$

2.1.1 α에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

분석의 편의상 시스템의 상태가 음의 값을 가질 수 있다고 가정하였으나, 실제로 시스템이 음의 상태에 있는 것을 시스템이 더 이상 제 기능을 못하고 있는 것으로 간주한다. 즉, $0 \le \alpha \le \beta$의 범위에서 최적의 적정수준 α의 값이 유일하게 존재함을 보인다. α에 관한 최적화 연구는 특히 본 연구가 재고모형에 활용될 때, 그 현실적 의미가 더 커진다. 식 (2.3)은 α에 대한 증가함수이고, 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

<정리 1>
비용함수는 α에 대한 증가함수이고, $\alpha^* = 0$에서 최소값을 가진다.

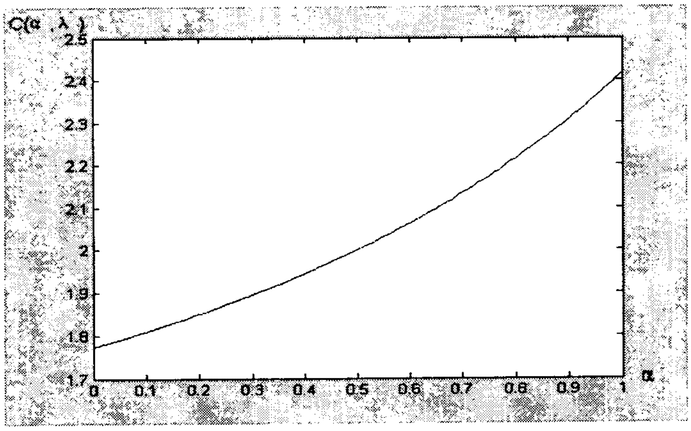

그림 2 α에 대한 비용함수

한 예로, $C_1 = 1$, $C_2 = 1.5$, $C_3 = 1.7$, $\beta = 1$, $\nu = 2$, $\mu = 0.2$, $\lambda = 0.4$를 대입하여 비용함수를 그래프로 나타내면 그림 2와 같다. 적정수준을 β에 가깝게 둘수록 비용이 많이 든다는 것을 알 수 있다.

2.1.2 λ에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

수리공의 도착률 λ에 대한 최적화를 위해 우선 식(2.3)을 $C(\lambda)$로 놓고 λ에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$C'(\lambda) = C_1 - \frac{(\beta-\alpha+\mu)\nu\mu}{[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2} C_3 .$$

$C'(\lambda)$의 분자를 $A(\lambda)$로 놓고, $A(\lambda)=0$을 만족하는 λ^*를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda^* = \frac{-\nu\mu C_1 + \sqrt{(\beta-\alpha+\mu)\nu\mu C_1 C_3}}{(\beta-\alpha+\mu)C_1} .$$

<정리 2>

(i) $C_1 \geq \frac{1}{\nu\mu}(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우, 비용함수는 증가함수이고, $\lambda^*=0$에서 최소값을 가진다.

(ii) $C_1 < \frac{1}{\nu\mu}(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우, 비용함수는 아래로 볼록한 함수이고, 비용을 최소화하는 유일한 $\lambda^*(0<\lambda^*<\infty)$가 존재한다.

증명

$\lim_{\lambda\to\infty} C'(\lambda) = C_1 > 0$이므로, $\lim_{\lambda\to 0} C'(\lambda) = C_1 - \frac{1}{\nu\mu}(\beta-\alpha+\mu)C_3$의 부호에 따라 함수 형태가 결정된다. $C_1 \geq \frac{1}{\nu\mu}(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우에 $A(\lambda) \geq 0$이므로 비용함수는 증가함수가 된다. 따라서, 비용함수 $C(\lambda)$는 $\lambda^*=0$에서 최소값을 가진다. 또한, $C_1 < \frac{1}{\nu\mu}(\beta-\alpha+\mu)C_3$인 경우에는 모든 λ에 대해 $A'(\lambda) > 0$이므로, $A(\lambda)=0$을 만족하는 $\lambda^*(0<\lambda^*<\infty)$가 유일하게 존재하고, 그 값은 위와 같이 주어진다.

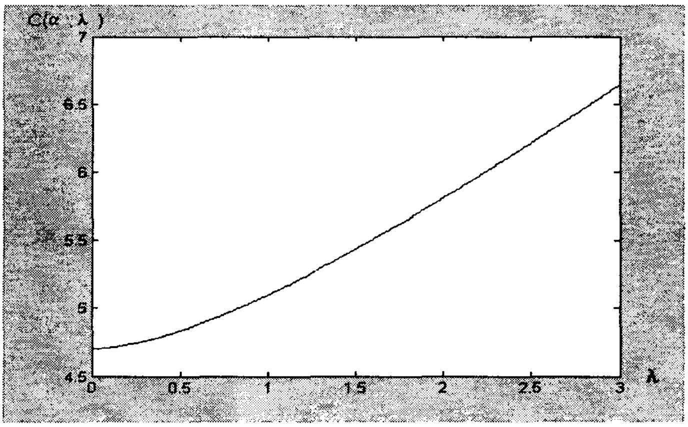

그림 0 $C_1 \geq \dfrac{1}{\nu\mu}(\beta - \alpha + \mu)C_3$에서 λ에 대한 비용함수
$(C_1 = 1, C_2 = 1.5, C_3 = 1.7, \alpha = 0.3, \beta = 1, \nu = 5, \mu = 0.4)$

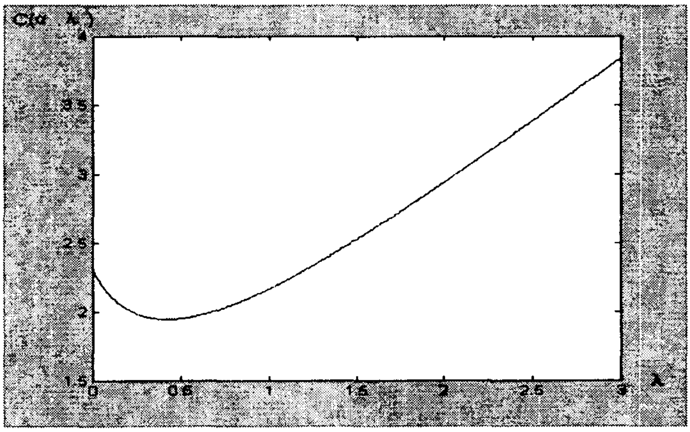

그림 4 $C_1 < \dfrac{1}{\nu\mu}(\beta - \alpha + \mu)C_3$에서 λ에 대한 비용함수
$(C_1 = 1, C_2 = 1.5, C_3 = 1.7, \alpha = 0.4, \beta = 1, \nu = 2, \mu = 0.2)$

한 예로, 정리2의 두 가지 경우에 대해서 각각의 조건을 만족하는 모수를 대입하여 비용함수를 그래프로 나타내면 그림 3과 그림 4와 같다. $C_1 \geq \dfrac{1}{\nu\mu}(\beta - \alpha + \mu)C_3$인 경우, 그림 3을 통해서 λ가 증가할수록 비용함수가 증가하는 것을 알 수 있다. 즉, 수리공이 자주 도착할수록 비용이 많이 든다는 것을 의미한다. $C_1 < \dfrac{1}{\nu\mu}(\beta - \alpha + \mu)C_3$인 경우, 그림 4를 통해서 $\lambda^* = 0.42$일 때 비용이 가장 적게 든다는 것을 확인할 수 있다.

2.2 시스템의 상태에 대한 보상비용이 있는 경우

본 절에서는 식(2.1)에서 구한 비용함수에 시스템의 상태가 단위 양만큼 좋아질 때 돌아오는 단위시간당 보상비용 C_4를 포함시켜 α와 λ에 대한 최적화를 고려한다. Lee와 Lee(1993)에 의해 구해진 장시간에 걸친 시스템의 평균상태 $E(X)$를 이용하여, 단위시간당 평균비용을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
C(\alpha,\lambda) &= \frac{E(N)C_1 + [\beta-\alpha+E(Z')]C_2 + \frac{1}{\lambda}C_3}{E(T^*)} - E(X)C_4 \\
&= \lambda C_1 + \nu\mu C_2 + \frac{\nu\mu}{\lambda(\beta-\alpha)+\mu(\lambda+\nu)}C_3 \\
&\quad -[\alpha - \frac{\nu\mu}{\lambda} + \frac{(\beta-\alpha)\{2\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)\}}{2\{\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)\}}]C_4 . \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

2.2.1 α에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

적정수준 α에 대한 최적화를 위해서 식(2.4)를 $C(\alpha)$라 놓고, α에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
C'(\alpha) &= \frac{\lambda\nu\mu}{[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2}C_3 \\
&\quad - \frac{\lambda(\beta-\alpha)[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]}{2[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2}C_4 .
\end{aligned}
$$

$C'(\alpha)$의 분자를 $B(\alpha)$로 놓고, $B(\alpha)=0$을 만족하는 α^*를 구하면 다음과 같다.

$$
\alpha^* = \frac{\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta}{\lambda} - \frac{\mu C_4\sqrt{\mu C_4(\lambda+\nu)^2+2\lambda\nu C_3}}{\lambda C_4} .
$$

$0\le\alpha\le\beta$에서 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

<정리 3>
(i) $2\lambda\nu\mu C_3 \ge \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$인 경우, 비용함수는 증가함수이고, $\alpha^*=0$에서 최소값을 가진다.
(ii) $2\lambda\nu\mu C_3 < \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$인 경우, 비용함수는 아래로 볼록한 함수이고, 비용을 최소화하는 유일한 $\alpha^*(0\le\alpha^*\le\beta)$가 존재한다.

<u>증명</u>

$\lim_{\alpha\to\beta}C'(\alpha) = \frac{\lambda\nu}{\mu(\lambda+\nu)^2}C_3 > 0$이다. $\lim_{\alpha\to 0}C'(\alpha)$의 부호에 따라 $C(\alpha)$의 형태가 달라짐을 알 수 있다. 먼저, $2\lambda\nu\mu C_3 \ge \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$인 경우에는 $B(\alpha)\ge 0$이므로 우리의 비용함수 $C(\alpha)$는 증가함수가 되고, $\alpha^*=0$에서 최소값을 가진다. 또한, $2\lambda\nu\mu C_3 < \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$인 경우에는 모든 $0\le\alpha\le\beta$에 대해 $B'(\alpha)>0$이므로 비용함수는 아래로 볼록한 함수가 된다. 따라서, $B(\alpha)=0$을 만족하는 $\alpha^*(0\le\alpha^*\le\beta)$가 유일하게 존재하고, 그 값은 위와 같이 주어진다.

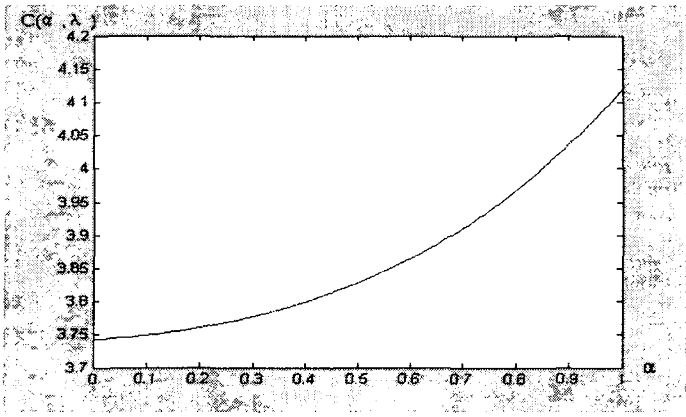

그림 5 $2\lambda\nu\mu C_3 \geq \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$에서 α에 대한 비용함수
($C_1=1$, $C_2=1.5$, $C_3=1.7$, $C_4=1$, $\beta=1$, $\lambda=0.7$, $\nu=5$, $\mu=0.2$)

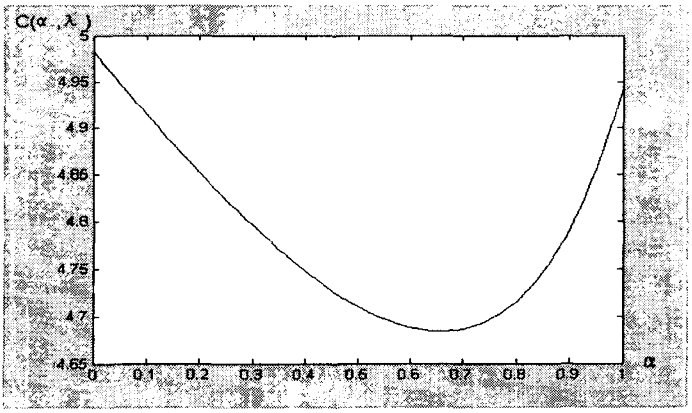

그림 0 $2\lambda\nu\mu C_3 < \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$에서 α에 대한 비용함수
($C_1=1$, $C_2=1.5$, $C_3=1.7$, $C_4=2$, $\beta=1$, $\lambda=4$, $\nu=5$, $\mu=0.2$)

한 예로, 정리3의 두 가지 경우에 대해서, 각각의 조건에 맞는 비용함수를 그래프로 나타내면 그림 5와 그림 6과 같다. $2\lambda\nu\mu C_3 \geq \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$인 경우, 그림 5에서 비용함수가 증가하는 것을 알 수 있다. $2\lambda\nu\mu C_3 < \lambda\beta[2\mu(\lambda+\nu)+\lambda\beta]C_4$인 경우, 그림 6에서 $\alpha^*=0.66$일 때 비용이 가장 적게 든다는 것을 알 수 있다.

2.2.2 λ에 대한 단위시간당 평균비용의 최적화

수리공의 도착률 λ에 대한 최적화를 위해 우선 식(2.4)를 $C(\lambda)$로 놓고, λ에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$C'(\lambda) = C_1 - \frac{(\beta-\alpha+\mu)\nu\mu}{[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2}C_3 - [\frac{\nu\mu}{\lambda^2} - \frac{\nu\mu(\beta-\alpha)^2}{2[\mu(\lambda+\nu)+\lambda(\beta-\alpha)]^2}]C_4 .$$

<정리 4>

비용함수는 아래로 볼록한 함수이고, 비용을 최소화하는 유일한 $\lambda^*(0<\lambda^*<\infty)$가 존재한다.

<u>증명</u>

$\lim_{\lambda\to 0} C'(\lambda) < 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} C'(\lambda) > 0$이고, $C'(\lambda)$의 분자는 2차항의 계수가 양수인 2차식이어서, $C'(\lambda)=0$을 만족하는 $\lambda^*(0<\lambda^*<\infty)$가 유일하게 존재한다.

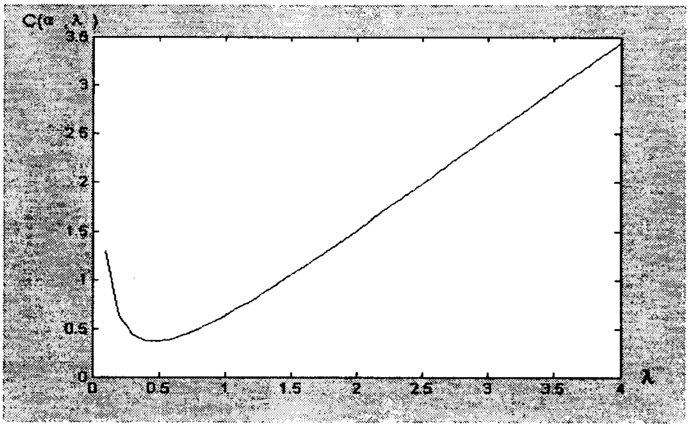

그림 7 λ에 대한 비용함수

한 예로, $C_1=1$, $C_2=1.5$, $C_3=1.7$, $C_4=1$, $\alpha=0.4$, $\beta=1$, $\nu=0.5$, $\mu=0.2$를 대입하여 비용함수를 그래프로 나타내면 그림 7과 같다. $\lambda^*=0.5$일 때 비용이 가장 적게 든다는 것을 알 수 있다.

참 고 문 헌

1. Baxter, L. A. and Lee, E. Y. (1987). A diffusion model for a system subject to continuous wear, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1, 405-416.
2. Baxter, L. A. and Lee, E. Y. (1988). Optimal control of model for a system subject to continuous wear, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 2, 321-328.
3. Lee, E. Y. and Lee, J. Y. (1993). A model for a system subject to random shocks, *Journal of Applied Probability*, 30, 979-984.
4. Lee, E. Y. and Lee, J. Y. (1994). Optimal control of a model for a system subject to random shocks, *Operations Research Letters*, 15, 237-239.
5. Ross, S. M. (1996). *Stochastic processes*, 2nd. edition, John Wiley, New York.