

# 계층적 반복법을 이용한 비압축성 유동 계산

김진환\* · 정창률\*\*

\*동의대학교 기계정보산업공학부

\*\*델파이 오토모티브 시스템즈 성우(주)

## An Incompressible Flow Computation using a Hierarchical Iterative Method

Jin Whan Kim\* and Chang Ryul Jeong\*\*

\*School of Mechanical and Industrial Information, Dong\_Eui University  
24 KaYa-Dong, Busanjin-Ku, Busan, Korea 614-714

\*\*Delphi Automotive Systems, SungWoo Corp.,  
5-30 Bangye-Ri, Munmak-Eup, Wonju-Si, Kangwon-do, Korea 220-805

**Key Words :** Hierarchical Element 계층 요소, Preconditioning 예조건화, Stabilization 안정화

**ABSTRACT :** In two dimensional incompressible flows, a preconditioning technique called Hierarchical Iterative Procedure(HIP) has been implemented on a SUPG finite element formulation. By using the SUPG formulation, one can escape from the LBB constraint and hence achieve an equal order formulation. In this paper, we increased the order of interpolation up to cubic. The conjugate gradient squared(CGS) method is used for the outer iteration, and the HIP for the preconditioning for the incompressible Navier-Stokes equation. The hierarchical elements has been used to achieve a higher order accuracy in fluid flow analyses, but a proper efficient iterative procedure for higher order finite element formulation has not been available so far. The numerical results by the present HIP for the lid driven cavity flow showed the present procedure to be stable, very efficient and useful in flow analyses in conjunction with hierarchical elements.

### 1. 서 론

유한요소법은 구조 해석 분야에는 일찍이 적용되었던 해석 방법이나, 유동 해석 특히 비 압축성 유동에는 아직 일반적이지 못하다. 비압축성 유동 계산에서 야기되는 불안정성은 대략 두 가지로 구별되며, 이는 대류 우세에 의한 불안정성과 비압축성 유동 방정식이 가지는 부정형(indefinite)으로 야기되는 불안정성이다. 이에 대한 연구로는 Hughes 등(1979)은 대류 우세로 인하여 야기되는 해의 불안정성을 완화시키기 위하여 시험(test) 함수에 상류 방향의 정보를 적절히 가미하여 Streamline Upwind Petrov Galerkin(SUPG)이라고 하였다. 이후 Hughes 등(1987)은 이 기법을 더 개선하여 주로 압축성 유동 해석에 이

용이 되었다.

최근 Ilincă 등(2000)은 비압축성 유동에 대한 SUPG 정식화 과정이 사실은 잔여치(residual)에 대한 풍상 차분(upwinding differencing)과 유사하다는 관찰을 통해 SUPG 방법이 비압축성 Navier-Stokes 방정식의 대류 우세뿐 아니라 부정형에 대한 불안정성의 안정화에도 기여할 수 있음을 보였다. 이 논문에서는 Ilincă 등에 의하여 제시된 SUPG 방법의 변형을 채택하여 유동 해석 지배 방정식을 정식화하였다.

계층(hierarchical)함수는 고차화 됨에 따라 필요한 함수를 기존의 저차 함수에 덧붙임으로서 고차 형상 함수를 용이하게 구성해 나갈 수 있으며(Robinson, 1986), 이는 적용적 고차화의 기본 골격이 된다. 그러나 일반적으로 고차 요소는 선형 요소에 비하여 더 넓은 띠(band) 폭을 형성하여 동일 자유도 수에 비하여 더 많은 계산 시간을 요하기 때문에 이에 적합한 계산

제1저자 김진환 연락처: 부산광역시 부산진구 가야동 산 24  
051-890-1646 kimjw@dongeui.ac.kr

방법을 구해야 한다. Mitchel과 Reddy (2000) 는 적층 복합재 해석에서 계층 요소를 사용하고 이의 풀이로서 계층적 반복법을 적용하였다. 계층적 반복법이란 Conjugate Gradient(CG)와 같은 외부 반복법의 수렴을 향상시키기 위한 예조건화(preconditioning) 기법 중의 하나이다.

최근 유동해석의 정밀도를 향상시키기 위하여 고차화가 용이한 계층 요소의 사용이 긍정적으로 평가되고 있으나(Whiting and Jansen, 2001), 아직 이들의 풀이를 위한 적절한 계산 방법이 없다. 이 논문은 이러한 문제의 해결을 위하여 비압축성 유동 계산에 계층적 반복법의 예조건화를 적용하여 어떻게 수행되는가를 보기 위한 것이다.

## 2. 계층 요소의 이용

### 2.1 형상 함수

2 차원 사면체 요소에 대한 계층형상 함수에 대하여 고려하기로 한다. 2 차원 및 3 차원의 경우, 일차원 함수의 텐서 곱(tensor product)으로부터 요소 형상 함수를 구현할 수 있다. 다음은 일차원 5 차(quintic) 요소에 필요한 계층 기저 함수이다.

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= (1-\eta)/2, & h_2(\eta) &= (1+\eta)/2, \\ h_3(\eta) &= (\eta^2-1)/2, & h_4(\eta) &= (\eta^2-1)\eta/6 \\ &\dots & & \end{aligned} \quad (1)$$

Fig. 1 에 보인 2 차원 사변형 요소에 대한 형상 함수는 다음과 같이 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2), & \varphi_2 &= h_2(\eta_1) h_1(\eta_2), \\ \varphi_3 &= h_2(\eta_1) h_2(\eta_2), & \varphi_4 &= h_1(\eta_1) h_2(\eta_2), \\ \varphi_5 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2), & \varphi_6 &= h_2(\eta_1) h_1(\eta_2), \\ &\dots & & \end{aligned} \quad (2)$$

각 요소 해의 구성에 요구되는 형상함수는 일반적으로 요소의 보간 차수에 따라 정해진다. Table 1 에는 요구되는 형상 함수를 요소 절점과 차수에 대하여 번호로 나타내었으며, Fig. 1 에는 요소 절점의 번호를 표시하였다.

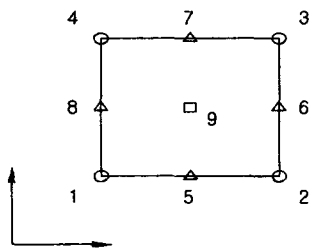


Fig. 1 Element node numbering

Table 1 Dof Number of Element Node in 2-D

Deg.	Element Node No.		
	Vertex	Edge	Interior
1	1 ~ 4	5 ~ 8	9
2	-	5 ~ 8	9
3	-	10 ~ 13	14 ~ 16
4	-	17 ~ 20	21 ~ 25
5	-	26 ~ 29	30 ~ 36

### 2.2 계층적 반복법

계층 요소의 고차 형상 함수는 저차의 것에 덧붙여 구성된다는 것은 일반적인 라그랑지안 요소의 구성과는 많이 다르다. 라그랑지안 요소의 경우, 각각의 차수에 대한 형상함수는 새로운 절점을 생성하여 다시 구성해야 하는 것과 비교하면 계층 요소는 고차화에 있어서 상당한 편리함을 제공하고 있음을 볼 수 있다. 즉, 저차의 자유도는 고차의 자유도에 포함될 수 있다는 특성을 이용하여 좌변행렬  $A_k$  를 구성하면 다음과 같다.

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{k-1} & C_k \\ D_k & B_k \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $k$  는 형상함수의 차수이며, 저차의 자유도에 대한 행렬  $A_{k-1}$  은 고차의 자유도에 대한 행렬  $A_k$  에 포함됨을 볼 수 있다. 이러한 행렬의 구성은 계층적 반복법의 적용을 무척 용이하게 한다. 식 (3)의  $k$  - 단계(level)에서의 Schur compliment,  $S_k$  는 아래와 같다.

$$S_k = A_{k-1} - C_k B_k^{-1} D_k \quad (4)$$

$A_k$  의 정확한 분해(exact factorization) 행렬은  $S_k$  를 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_k = \begin{bmatrix} S_k & C_k \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_k^{-1} D_k & I \end{bmatrix} \quad (5)$$

Mitchell 등 (2000) 은  $A_{k-1}$  이  $S_k$  의 예 조건 행렬이 되기 위한 조건으로 Cauchy-Buniakowskii-Schwarz(CBS) 부등식을 이용하였으며, 이는 다음과 같은 부등식을 만족시키는 양수이면서 1에 가깝지않은  $\gamma$ 가 존재한다는 것이다.

$$(1-\gamma^2) v_1^t A_{k-1} v_1 \leq v_1^t S_k v_1 \leq v_1^t A_{k-1} v_1 \quad (6)$$

여기서  $v_1$ 은  $S_k$ 의 최대 고유값에 해당되는 고유 벡터이다. 만일  $S_k$  대신에  $A_{k-1}$ 을 사용한다면, 식(5)에 의하여  $A_k$ 에 대한 근사적 분해를 가능하게 한다. 따라서  $M_k$ 를  $A_k$ 의 예 조건 행렬이라 하면,  $M_k$ 의 부정확한 분해(inexact factorization)를 아래와 같이 둘 수 있다.

$$M_k = \begin{bmatrix} M_{k-1} & C_k \\ 0 & B_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ B_k^{-1}D_k & I \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서  $k = 2, 3, \dots, J$ 이다. 식(7)은 이 단계(two level)법으로 우리는 매 단계마다 이를 적용할 수 있다.

일반적으로 Preconditioned Conjugate Gradient(PCG) 혹은 Preconditioned Conjugate Gradient Squared(PCGS)등의 반복법 내에서 예 조건화 과정은  $M y = x$ 를 푸는 것이다. 요소의 차수를  $k$ 라 할 때, 임의의 차수  $k$ 에 관련된 자유도에 대한 풀이 과정을  $k$ -단계(level)라 하면,

$$M_k y_k = x_k \quad (8)$$

가 된다. 여기서  $y_k$ 를  $y_{k-1}$ 과  $\Delta y_k$ 로 분리하고  $x_k$ 는  $x_{k-1}$ 과  $\Delta x_k$ 로 분리한 후, 식(7)을 적용하면 매 단계마다 다음과 같은 두 개의 대수 방정식이 생기게 된다.

$$M_{k-1} y_{k-1} = x_{k-1} - D_k B_k^{-1} \Delta x_k \quad (9)$$

$$B_k \Delta y_k = \Delta x_k - C_k y_{k-1} \quad (10)$$

위의 식(9)는 단계를 내려갈 때(다중 격자(multigrid)법에 비유하면 restriction이 된다) 우변항의 계산을 위해 사용되고, 식(10)은 단계를 올라갈 때(다중 격자법에 비유하면 prolongation이 된다)  $\Delta y_k$ 를 구하기 위하여 사용된다.

단계를 내려감에 따라, 식(9)의 우변을 계산한다. 먼저  $B_k^{-1} \Delta x_k$ 을 계산한 후 우변을 정리하고, 이 우변 벡터는 다시  $[x_{k-2} \quad \Delta x_{k-1}]'$ 의 형태로 분리되어 다음 단계로 내려갈 수 있다. 마지막으로  $M_1 y_1 = x_1$ 에 도달하게 되며 단순하게는  $M_1 = A_1$ 을 취할 수 있다. 물론  $A_1$ 은 풀이 가능

할 만큼 작다는 전제가 있으며, 이는 다중 격자법에서도 예외는 아니다. 따라서  $M_1$ 에 대한 미지수  $y_1$ 에 대하여 푼다.

단계를 올라감에 따라, 식(10)으로부터  $\Delta y_2$ 에 대하여 푼다. 그리하면  $y_2 = [y_1 \quad \Delta y_2]'$ 가 되어 식(10)에 의하여  $\Delta y_3$ 를 구하게 되고, 마지막으로  $B_J$ 에 대한 미지수

$\Delta y_J$ 에 대하여 풀어서  $y_J = [y_{J-1} \quad \Delta y_J]'$ 가 되어 끝난다. 이 알고리즘에서는 예조건 행렬이 무엇인가를 알 필요가 없고, 또 다중 격자법과 달리 사이클(cycle)을 적용할 필요도 없다. 더욱이 재귀적(recursive) 특성을 이용하면 프로그래밍이 매우 간결해진다. 단 행렬  $A_1$  및  $B_k, k=2, \dots, J$ 들의 크기는 쉽게 풀릴 수 있도록 작아야 한다는 단점이 있다. 부록에 계층적 반복의 사용, 즉 식(9)와 식(10)을 단계별로 열거하였다.

### 3. 2차원 비압축성 유동의 정식화

이차원 정상 상태 유동 계산을 위한 지배 방정식은 다음과 같다.

$$-\nu \nabla^2 u + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = f_u$$

$$-\nu \nabla^2 v + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = f_v$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

여기서  $u, v, p$  그리고  $\nu$ 는 각각 x-, y-방향의 속도, 압력 그리고 동점성 계수이다. 위의 방정식에 적절한 가중 함수(weighting function)와 보간 함수를 취하여 내적하면 갈라진 잔여법에 의하여 아래의 비선형 연립 대수 방정식을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} A_{11} \cdot U + A_{12} \cdot V + A_{13} \cdot P &= R_1 \\ A_{21} \cdot U + A_{22} \cdot V + A_{23} \cdot P &= R_2 \\ A_{31} \cdot U + A_{32} \cdot V &= R_3 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서  $A_{11}, \dots, A_{32}$ 들은 미지수  $U, V$  및  $P$ 들에 대한 좌변 행렬들이며,  $R_1, R_2$  그리고  $R_3$ 들은 중력항 등과 경계조건 처리에 의하여 형성된 우변 벡터들이다. 식(12)에서 행렬  $A_{33}$ 가 영 행렬인 관계로 식(11)의 해에 대한 안정성 및 수렴성은 많은 연구자들의 관심 대상이었다. 여기서 우리는 먼저 수정 잔여치법(modified residual method)에 의한 안정화 기법을 도입하고자 한다.

#### 3.1 수정 잔여치 안정화

Hughes와 Brooks(1979)는 시험(test) 함수를 보간 함수와 다르게 적용하여 대류항에 풍상 차분의 개념을 도입하고, 이를 SUPG(Streamline Upwind Petrov Galerkin)라 불렀다. 이 방법은 잔여치에 대한 섭동(perturbation)을 Galerkin 식에 추가했기 때문에 이를 만족시키는 해는 원래의 Galerkin 식도 만족시키게 된다. Ilnca 등(2000)은 이 점을 주목하여 SUPG를

일종의 잔여치 풍상(residual upwinding)법으로 설명하고 있으며, 비압축성 유동 계산에 있어서 아래와 같은 안정화 항들을 도입하였다.

먼저 2차원 정상상태 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 다음과 같이 정의한다.

$$M_i = \tilde{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{f_i}{\rho} \quad (13)$$

$$C = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2) \quad (14)$$

위의 식에서 tilde(~) 기호를 붙인 속도 성분 ( $\tilde{u}_i$ )은 요소 중심점에서 계산한 값을 의미하며, 편도함수 행렬 (Jacobian) 을 계산할 때 상수로 취급한다.

Navier-Stokes 방정식에 대한 수정 잔여치법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_i &= \int_{\Omega} \psi_i M_i d\Omega \\ &+ \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \tau \left( \tilde{u}_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right) M_i d\Omega_k \\ &+ \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \delta \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} C d\Omega_k = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} R_p &= \int_{\Omega} \psi_p C d\Omega \\ &+ \sum_{elem} \int_{\Omega_k} \tau \frac{\partial \psi_p}{\partial x_i} M_i d\Omega_k = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

위의 식에서  $\Omega$ 는 경계를 포함하는 전체 해석 영역을 의미하며,  $\Omega_k$ 는 각 요소의 내부 영역만을 의미한다. 따라서 식(15)와 식(16)의 첫 번째 항들에는 부분 적분을 적용하여, 미분 차수를 한 단계 내리고 또 미분 경계 조건을 적용하게 할 수 있다.

섭동항들의 크기를 결정하는  $\tau$ 와  $\delta$ 는 Re 수와 요소의 대표 길이  $h$ 의 함수로 Ilinca 등(2000)을 참조하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{h_k}{2|\vec{v}|} \xi(Re_k) \\ \delta &= |\vec{v}| h_k \xi(Re_k) \\ \xi(Re_k) &= \begin{cases} Re_k & , 0 \leq Re_k < 1 \\ 1 & , Re_k \geq 1 \end{cases} \\ Re_k &= \frac{m_k |\vec{v}| h_k}{2\nu} \quad \text{or} \quad \frac{m_k |\vec{v}| h_k}{2k/\rho c_p} \\ (m_k \text{ is } 1/3 \text{ for linear element}) \end{aligned} \quad (17)$$

## 4. 수치 계산

### 4.1 Kovaszny 유동에 대한 예

다음은 Kovaszny 유동(Kovaszny, 1948)에 대한 수렴성을 보기로 한다. 이는 Navier-Stokes 방정식으로  $-1/2 \leq x \leq 1$  과  $-1/2 \leq y \leq 3/2$ 의 영역에 대한 것으로 엄밀 해가 아래와 같이 주어지는 관계로, 새로운 계산 기법의 수렴성 검증에 사용되어지고 있다.

$$u = 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \quad (18)$$

$$v = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \quad (19)$$

$$\lambda = Re/2 - \sqrt{(Re/2)^2 + (2\pi)^2}$$

좌측 입구, 위 그리고 아래 벽면에는 엄밀 해에 의한 고정 경계 조건을 주고, 우측 출구 측에는 압력만을 명시한다.  $Re = 40$ 으로 취한 해의 수렴 경향을 수평 속도 성분의 오차에 대한 H-1 norm을 통하여 수행하여, Fig. 2에 나타내었다. 이 경우, 일차와 이차 요소에 대한 해의 수렴 경사는 각각 0.9956 및 1.9104로 이론적 경사와 거의 일치하지만, 3차 요소에 대하여는 그렇지 못하다. 이에 대한 이유는 3차 요소를 이용한 수치 계산에서는 보다 작은 수의 요소로도 상당히 정밀한 계산값을 얻을 수가 있어서, 오차가 현저히 줄어들었다. 따라서 반올림 오차로 인한 계산기의 포화값에 일찍 도달한 결과이다. 이 경우의 수평 속도 오차에 대한 H-1 norm의 포화값은 Fig. 2에 의하면 약  $(2.0)10^{-2}$ 이다.

계층적 반복법의 효율성을 보기 위하여 2차와 3차 요소들의 자유도에 대한 cpu 시간을 Fig. 3과 Fig. 4에 각각 나타내었다. 시간 측정은 Newton 반복에 의한 상대적 잔여치가  $10^{-6}$  이하로 낮아질 때까지 하였다.

Navier-Stokes 방정식의 이산화로부터 나오는 행렬은 비대칭 행렬임으로, 외부 반복법으로 CG나 CR등은 적합하지 못하다. 본 논문에는 CGS 반복법을 채택하고, 여기에 예조건화를 하였다. 예조건화 CGS 알고리즘(PCGS)은 Barrett 등(1994)에 있다. 이 경우에 우리는 단순 CGS 알고리즘은 과도하게 많은 반복이 요구되어 직접법인 Skyline 방법보다도 더 많은 시간이 필요함을 볼 수 있다. 반면에 계층적 반복에 의한 PCGS 알고리즘은 현재 실험의 모든 자유도 수에 대하여 시간 증가가 매우 적으며, 그 차이는 3차 요소의 경우 확실하게 드러난다.

### 4.3 Lid Driven Cavity 유동

Cavity 유동에 대한 영역 및 경계조건의 정의는 잘알려져 있다. 본 연구에서는  $Re = 1000$ 에 대한 계층적 반복법의 효율성을 고찰해 보기로 한다.

Fig. 5과 Fig. 6에 시간 비교를 각각 2차 요소와 3차 요소에 대하여 하였다. 이 경우의 해석 시간은 상대적 잔여치가  $10^{-4}$  이하가 될 때까지로 하였다. 그 이유는 특이점에서의 오차가 다른 부분에 비하여 훨씬 높게 나타나서  $10^{-6}$ 으로 하기가 어렵

다. 여기에서 우리는 CGS 알고리즘은 더 이상 사용하기 어렵다. 레이놀즈(Re) 수가 증가함에 따라 Kovaszny 유동과는 달리 CGS 방법에 의한 해석 시간은 적은 수의 격자에 대해서도 매우 크게 나타나기 때문이다. 이에 반하여, Skyline 방법과 계층적 반복에 의한 PCGS 알고리즘은 증가하는 자유도에 대하여도 풀이가 가능하며, 현재의 PCGS는 높은 레이놀즈(Re) 수에도 계속 선형적인 시간 증가를 보여준다. 또 우리는 삼차 요소가 이차 요소에 대하여 훨씬 더 효율적임을 알 수 있으며 이는 현재의 예 조건화 알고리즘이 계층적 특성을 이용하기 때문이다.

Fig. 7에는  $Re = 1000$ 에 대한 3차 요소의 해에 대한 수렴성을 보이기 위해, 수평 방향의 속도 성분을 중심 수직선에 따라 도출한 값을 도시하였다. 이 경우 그림에 나타낸 실선은 표준해로 알려진 Ghia 등(1982)의 속도해로서, 현재의 결과와 대체로 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

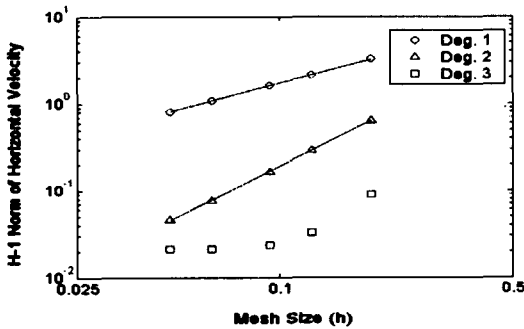


Fig. 2 Convergence trend for Kovaszny flow

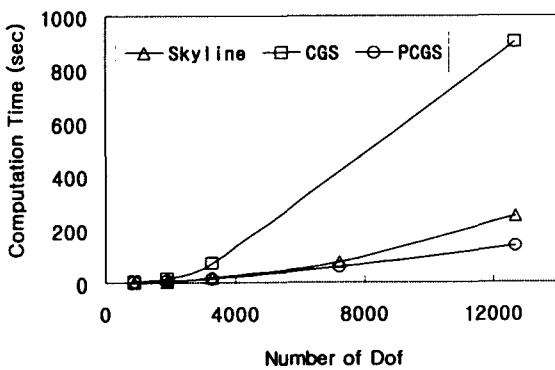


Fig. 3 Time comparison for Kovaszny flow (quadratic elements,  $Re = 40$ )

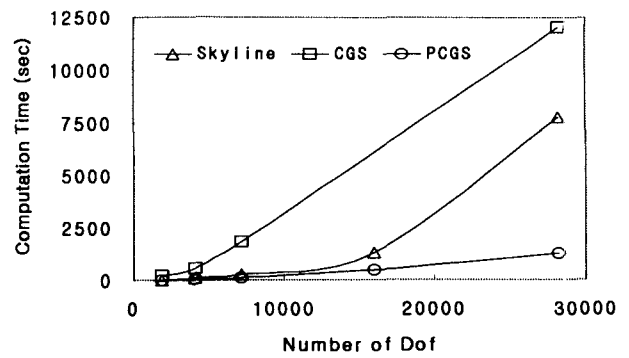


Fig. 4 Time comparison for Kovaszny flow (cubic elements,  $Re = 40$ )

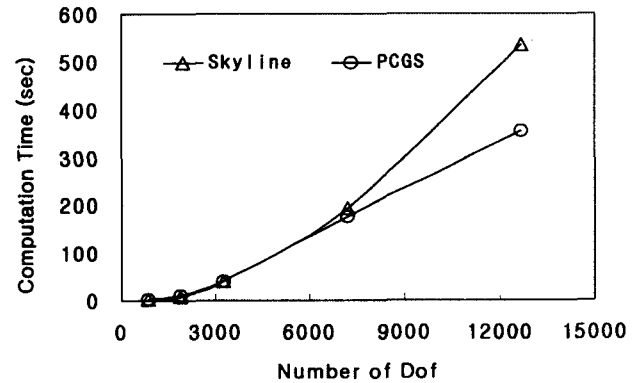


Fig. 5 Time comparison for lid-driven flow (quadratic elements,  $Re = 1000$ )

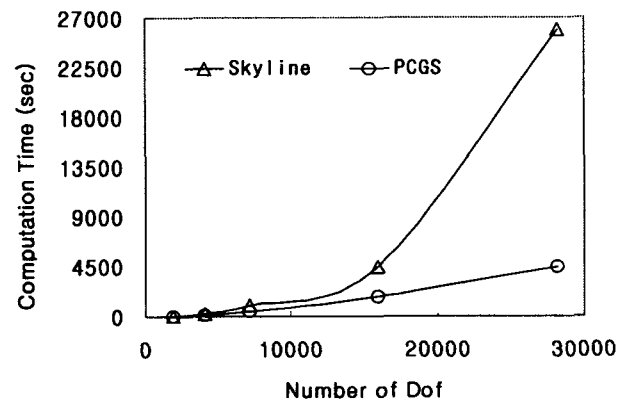


Fig. 6 Time comparison for lid-driven flow (cubic elements,  $Re = 1000$ )

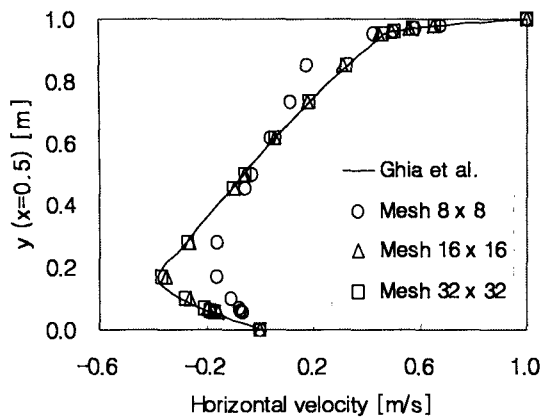


Fig. 7 A comparison of velocity solutions with Ghia, Ghia and Shin(1982)

## 5. 결론

일반적으로 유한요소해석에서 고차 요소의 수렴 특성은 저차 요소에 비해 월등히 좋으나, 이의 사용을 저해하는 이유는 효율적 계산 방법이 어렵다는 것이다. Skyline 방법과 같은 직접적 풀이법은 유한요소 해석에서 많이 사용되고 있으나, 고차 요소의 경우에는 띠 폭(band width)의 증가로 인하여 Skyline의 장점을 살리기가 어렵다. 본 연구에서는 이를 위해 SUPG를 이용하여 안정화시킨 후, 예 조건화를 위하여 계층적 반복법을 도입하여 보았다.

계층 요소를 사용할 경우, 저차의 계층 함수들은 고차의 것에 포함되어있는 관계로 선형대수행렬이 각 단계(Level)별로 쉽게 분해될 수가 있으며, 이는 다중단계(Multi-Level)법의 적용을 용이하게 한다. 이차와 삼차 요소의 비교에서 레이놀즈(Re)수에 관계없이 안정적이며, 삼차 요소의 적용이 이차 요소보다 훨씬 더 효율적임을 살펴보았다.

## 참고문헌

Barrett, R., Berry, M., Chan, T., Demmel, J., Donato, J., Dongarra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. and van der Vorst, H. (1994). *Templates for the Solution of Linear Systems; Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia.

Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C. T. (1982). "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *J. of Comp. Physics*, Vol. 48, pp 387~411.

Hughes, T.J.R. and Brooks, A.N. (1979). "A Multi-dimensional upwind scheme with no

crosswind diffusion", T.J.R. Hughes(Ed.), *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, Vol. 34, ASME, New York, pp 19~35.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Mallet, M. (1987). "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VI. Convergence Analysis of the Generalized SUPG formulation for linear time dependent multi-dimensional advective-diffusive systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 63, pp 97~112.

Ilinca, F., Hetu, J.F. and Pelletier, D. (2000). "On stabilized finite element formulations for incompressible advective-diffusive transport and fluid flow problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 188, pp 235~255.

Kovasznay, L.I.G. (1948). "Laminar flow behind a two-dimensional grid", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 44, pp 58-62.

Mitchell, J.A. and Reddy, J. N. (2000) "A hierarchical iterative procedure for the analysis of composite laminates", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 181, pp 237~260.

Robinson, J. (1986). "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 2, No. 1, pp 377~388.

Whiting, C. H. and Jansen, K.E. (2001). "A stabilized finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations using a hierarchical basis," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 35, pp. 93~116.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989). *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4th Ed., McGraw-Hill Book Co.