

반응표면법에 시뮬레이티드 어닐링을 적용한 최적화

Optimization by Response Surface Method with Simulated Annealing

지상현*, 박정선(한국항공대학교)

1. 서 론

최적화 기법은 최근 제품 설계 및 생산의 자동화, 통합화, 모듈화와 맞물려 그 연구와 응용이 지속적으로 증가하고 있다. 또한 다양한 최적화 기법에 대한 연구로 인해 각 기법의 장단점이 분석되고 있고 이를 바탕으로 더욱 개선된 최적화 알고리즘이 생성되고 있다. 최근의 최적화 기법의 연구와 응용은 이제 특정기법에 의한 최적화에 국한되지 않고 여러 가지 최적화 기법의 결합을 통하여 장점을 극대화하고 단점을 보완하며 진화된 최적화 기법을 만들어내고 있다.

발견적 최적화 기법 중 하나인 반응표면법은 실험계획법에 의한 통계적 경험 설계와 회귀모델 생성기법을 기반으로 하는 최적화 기법으로 준 전역성을 가지면서 또한 전역적 최적해 탐색시 요구되는 많은 반복해석을 최대한 줄일 수 있는 장점을 가진 최적화 알고리즘이다. 반응표면법은 반응표면을 형성하기 위하여 적절한 추출점을 선택 해야한다. 다양한 실험계획법이 도입 될 수 있는데 일반적으로 D-optimal 계획법이 적은 실험으로도 만족할만한 반응표면을 얻을 수 있다고 평가된다. 하지만 D-optimal 계획법에 의한 추출점의 선택 시 국부 최적점이 많아 전역해를 찾기가 힘든 단점이 있다[1,2].

본 연구에서는 반응표면법에서 반응표면 생성을 위해 D-optimal 실험계획법을 선택하고 시뮬레이티드 어닐링(simulated annealing)으로 추출점을 선택하도록 하였다. 이를 위하여 반응표면법 최적화 알고리즘에 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘[3,4]과 최적화 프로그램인 DOT, 상용 해석 프로그램인 NASTRAN을 연계하여 최적화를 수행하였으며 이론의 검증을 위하여 트러스 구조물의 중량을 최적화 하고 결과를 반응표면법과 시뮬레이티드 어닐링에 의한 최적결과와

비교, 검증을 시도하였다.

2. 반응 표면법

반응표면(response surface)은 여러 개의 설계 변수 x_1, x_2, \dots, x_k 가 복합적인 작용을 함으로써 어떤 반응변수 y 에 영향을 주고 있을 때, 이러한 반응의 함수관계를 적절한 수학적식으로 표현한 것을 말한다. 실제로는 이러한 함수관계가 명확하게 나타나는 확률은 아주 낮으며, 설계변수와 반응변수와의 관계를 정확하게 표현하는 것은 거의 불가능하다. 일반적으로 반응표면 생성 시 사용되는 회귀모델로는 식(1)의 1차 회귀모델(first order regression model)과 식(2)의 2차 회귀모델(second order regression model)이 있다.

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \quad (1)$$

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i \leq j}^k \beta_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

식 (1)~(2)에서 β_i 는 회귀상수이며 y 는 반응변수를 나타낸다.

반응표면의 생성 시에는 한정된 개수의 추출점을 선택하는데, 반응표면을 생성하기 위하여 가장 적절한 추출점을 뽑아 내는 방법을 실험계획법이라고 하며 이러한 추출점의 선택은 생성된 반응표면의 정확성과 함께 최적화 시간에도 커다란 영향을 미친다. 본 논문에서는 가장 널리 쓰이는 D-optimal 실험계획법을 적용하였다. D-optimal 실험계획법은 분산과 회귀계수 등의 공분산(covariance)에 대한 정보를 가지고 있는 식(3)의 모멘트 매트릭스(moment matrix)에서

$X^T X$ 의 행렬식(determinant)를 최대화하는 것이 회귀계수들의 신뢰영역을 최대화하는 것에 비례한다는 것에 초점을 맞춘 방법이다[2].

$$M = \frac{X^T X}{N^p} \quad (3)$$

하지만 D-optimal 방법은 국부 최적점이 많은 문제로서 전역해를 찾기가 힘든 단점이 있다. 본 논문에서는 시뮬레이티드 어닐링을 이용하여 D-optimal 추출점 선택을 시도 하였다.

Fig. 1에서는 본 연구에서 작성된 반응표면 최적화 프로그램의 흐름을 간단하게 나타내고 있다. 우선 설계 변수 전체 영역에서의 반응표면을 2차 회귀 모델로 만들어 최적점을 찾고 이 전역 최적점을 중심으로 하여 적절한 흥미영역의 범위를 설정하고 1차 회귀모델을 만든 다음 순차적 선형 계획법(sequential linear programming)[5]을 이용하여 최적화시킨다. 이

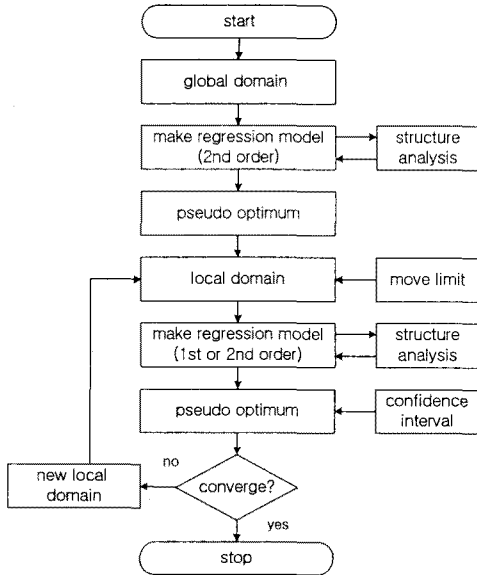


Fig. 1. Flow chart of RSM algorithm

후 최적화로 인하여 구한 최적점을 중심으로 한 새로운 흥미영역을 만들고 재차 1차 회귀모델을 만들어 최적화 수행을 반복하게 된다. 이러한 순차적 최적화 후 1차 회귀 모델로 최적화가 진

행되지 않는 점이 발생이 되면 이때부터는 2차 회귀모델로 반응표면이 변경되어 변형 유용 방향 탐색법(modified feasible direction method)을 이용하여 최적점을 순차적으로 찾아간다. 이런 과정에서 적절한 수렴조건에 따라 프로그램은 정지된다.

3. 시뮬레이티드 어닐링

최소화 문제에서 시뮬레이티드 어닐링은 목적함수의 증가를 허용하는 알고리즘을 이용하여 목적함수를 무작위로 평가하며 최적해를 찾는다. 이때 목적함수는 알고리즘 내에서 메트로폴리스 원리(Metropolis principle)에 의하여 평가된다. 여기서 온도라는 매개변수를 도입한다. 온도에 의하여 해의 탐색범위와 수렴확률이 결정되므로 온도를 제어 매개변수(control parameter, C)라 한다. 시뮬레이티드 어닐링 기법은 제어 매개변수의 값이 감소할 때 평가되는 메트로폴리스 알고리즘으로 볼 수 있다. 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘에서의 수용확률(acceptance probability)은 식 (4)과 같이 표현된다. 현재의 목적함수 값보다 다음 상태 j 의 목적함수 값이 작거나 같으면 다음 상태를 최적해로 수용한다. 즉 최소화 문제에서 내리막길(downhill)을 나타낸다.

$$P_c\{accept\ j\} =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{if } F(j) \leq F(i) \\ \exp\left(\frac{F(i) - F(j)}{C}\right) & \text{if } F(j) > F(i) \end{cases} \quad (4)$$

여기서 $F(i)$ 와 $F(j)$ 는 각각 현재상태 i 와 다음 상태 j 의 목적함수이고 C 는 온도제어 매개변수(temperature control parameter)이다. 다음상태의 목적함수의 값이 현재상태의 목적함수 값보다 크게 되면 0과 1사이에서 난수(random number)를 발생시키고 $\exp\left(\frac{F(i) - F(j)}{C}\right)$ 의

값이 발생시킨 난수보다 작으면 다음상태를 현재의 상태로 받아들이는 것은 거부된다. 시뮬레이티드 어닐링은 일반적으로 반복수가 최대 반복횟수 보다 크거나 온도의 크기가 아주 작을

때 알고리즘이 종료된다. 본 논문에서는 알고리즘이 최적화 전에 종료되는 것을 막기 위하여 최대 반복횟수를 매우 크게 설정하였다. 그리고 알고리즘의 종료 판단을 위하여 오차허용범위 (error tolerance)를 사용하였다.

$$|F(j) - F(i)| \leq EPS \quad (5)$$

본 논문에서는 오차허용범위는 10^{-6} 을 사용하였고, 연속적으로 4번의 반복수행에서 식 (5)를 만족하여야 알고리즘이 종료하도록 하였다.

시뮬레이티드 어닐링에서 제어매개변수 C_k 는 일반적으로 다음 식 (6)과 같이 온도감소 인자 RT 를 이용하여 표현한다.

$$C_k = RT \times C_{k-1} \quad (6)$$

온도 감소인자 RT 는 일반적으로 1보다 작은 상수를 사용한다. 그러나 수렴속도를 향상시키기 위하여 상수 대신 다양한 여러 가지 형태를 사용할 수 있다.

4. 시뮬레이티드 어닐링에 의한 반응표면 생성

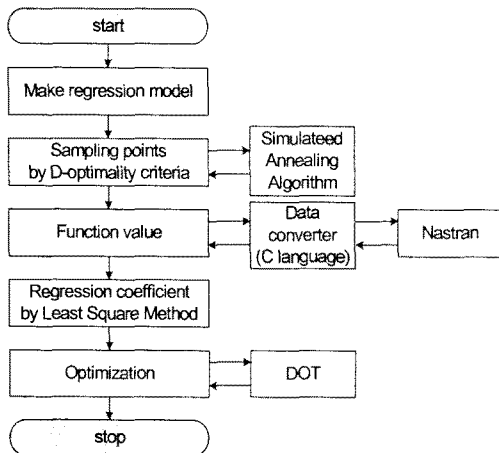


Fig. 2. Flowchart of RSA with SA

반응표면법은 반응표면의 생성을 위하여 D-optimal 계획법에 의한 추출점의 선택시 국부 최적점이 많아 전역 최적해를 찾기 힘든 단점이 있다. 본 연구에서는 이러한 단점을 보완하고자 시뮬레이티드 어닐링으로 추출점을 선택

하도록 시도 하였다. Fig. 2는 반응표면법 최적화 알고리즘에 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘과 최적화 프로그램인 DOT, 상용해석 프로그램인 NASTRAN을 연계하여 일괄적으로 최적화를 수행하는 일련의 과정을 보여준다.

5. 트러스 구조물의 최적화

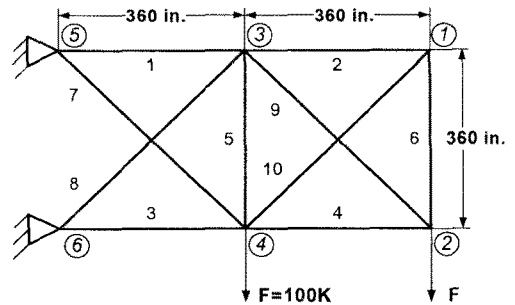


Fig. 3. Ten-bar truss structure

시뮬레이티드 어닐링으로 추출점을 선택하는 연계 반응표면법 최적화의 신뢰성 검증을 위하여 Fig. 3의 10부재 트러스 구조물의 중량 최소화 문제를 수행하였다. 그 결과를 반응표면법과 시뮬레이티드 어닐링을 이용한 최적화 결과와 비교 할 것이다.

$$\text{Minimize : } F = \sum_{i=1}^{10} \gamma A_i l_i \quad (7)$$

$$\text{Subject to : } \frac{\sigma_i}{\sigma_{ia}} - 1 \leq 0 \quad i=1, \dots, 10 \quad (8)$$

$$\frac{w_j}{w_{\max}} - 1 \leq 0 \quad j=1, \dots, 4 \quad (9)$$

식 (7)에서 비중량 γ 는 0.01 lb/in³이고, A_i 는 트러스 부재의 단면적, l_i 는 부재의 길이이다.

식 (8)는 응력에 대한 제한조건식이고 모든 부재에 대하여 허용응력 $\sigma_a=25,000$ psi이 적용된다. 식 (9)는 변위 w_j 에 대한 제한조건식이다. X축과 Y축에 대해 각 조인트에서 최대처짐

을 $w_{max} = \pm 2$ in로 설정하였다.

Table 1. 10-bar truss optimization results

Variables (in ²)	Initial design	Optimization		
		RSM	SA	RSM SA
1	33.50	29.44	30.64	N.A.
2	10.00	0.10	0.10	N.A.
3	30.00	22.73	23.39	N.A.
4	30.00	15.61	14.45	N.A.
5	10.00	0.10	0.11	N.A.
6	10.00	0.75	0.64	N.A.
7	20.00	8.30	7.45	N.A.
8	20.00	20.63	21.34	N.A.
9	30.00	21.32	21.12	N.A.
10	10.00	0.10	0.10	N.A.
Weight (lb)	8518.98	5038.36	5042.43	N.A.

N.A.: not available

Table 1은 반응 표면법과 시뮬레이티드 어닐링을 이용한 최적화 결과를 보여준다. 반응표면법 최적화 알고리즘을 이용한 최적 목적함수 값이 초기 목적함수 값보다 41.23% 향상된 결과를 보였고 시뮬레이티드 어닐링을 이용한 최적 목적함수 값은 초기 목적함수 값보다 40.86% 향상된 결과를 보인다. 반응 표면법을 이용한 최적화가 시뮬레이티드 어닐링을 이용한 최적화에 비해 최적 목적함수 값에서 우수함을 보이고 있다. 현재 반응표면법과 시뮬레이티드 어닐링을 연계한 최적화가 진행 중이며 트러스 구조물에 적용 시에 더욱 신뢰성 높은 최적화 결과를 도출 할 것으로 예상된다.

6. 결 론

본 논문에서는 연계된 반응표면법에 의한 최적화를 위해 확률적 최적화 기법인 시뮬레이티드 어닐링을 사용하여 추출점을 선택하여 반응표면을 생성하고 최적화를 시도하고 있다. 차 후 이렇게 연계된 반응표면법의 최적화 결과를 반응표면법과 시뮬레이티드 어닐링의 최적화 결

과와 비교하고 신뢰성을 확인을 위하여 트러스 구조물 중량 최소화 문제에 적용 할 것 이다.

시뮬레이티드 어닐링은 현재 신뢰성 높은 최적해를 도출하는 장점을 지나면서 수렴시간이 길어지는 문제를 해결하며 진보해가고 있다. 앞으로 본 논문을 통하여 시뮬레이티드 어닐링의 신뢰성 높은 추출점 선택 성능이 증명된다면 이 논문의 결과를 바탕으로 수렴성이 향상된 시뮬레이티드 어닐링을 적용하여 더욱 신속하고 정확한 추출점을 도출하여 최적화의 효율성을 향상 시킬 수 있다.

앞으로 연계 최적화 알고리즘의 신뢰성이 검증된다면 수정 시뮬레이티드 어닐링(ASA), 리스케일드 시뮬레이티드 어닐링(RSA) 등 수렴성이 향상된 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘을 적용하여 더욱 효과적인 반응표면 최적화를 수행 할 수 있을 것으로 예상된다. 또한 다양한 구조물에 적용하여 계속적인 검증이 수행된다면 다양한 최적설계에 적용 할 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 과학기술부 21세기 프론티어 사업(스마트무인기기술개발사업단)의 지원으로 이루어졌으며, 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Myers, R., Khuri, A. and Carter, W. "Response Surface Methodology: 1966 - 1988", Technometrics, Vol. 31, No. 2, 1989, pp. 137-157.
2. Myers, R. and Montgomery, D. C., "Response Surface Methodology - Process an Product Optimization Using Designed Experiments", John Wiley & Sons., 1995.
3. Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. Jr and Vecchi, M. P., □□Optimization by Simulated Annealing, □□Science, Vol. 220, No. 4598, pp.553-549.
4. Ingber, L., "Adaptive Simulated Annealing (ASA): Lessons learned, □□Journal of Control and Cybernetics, Vol. 25, No. 1, 1996, pp.33- 54.