

정전기력을 받는 마이크로 이중 외팔 보의 응답 및 모드 해석

Response and Modal Analyses of Micro Double Cantilever Beams Interacted by Electrostatic Force

정강식*·문승재**·유홍희***

Kang-Sik Jung, Seung-Jae Moon and Hong-Hee Yoo

Key Words : Structural dynamics(구조 동역학), Cantilever Beam(외팔보), Modal Analysis(모드 해석), MEMS(마이크로 전자기계 시스템), Electrostatic Force(정전기력)

ABSTRACT

Static and dynamic responses of micro double cantilever beam structures interacted by electrostatic forces are obtained employing Galerkin's method based on Euler beam theory. Variations of static and dynamic responses as well as natural frequencies are estimated for several sets of beam properties and applied voltages. It is shown that the variations of beam properties resulted by manufacturing process influence the deflections and the modal characteristics significantly. Such information can be usefully employed for the design of MEMS structures.

기호설명

- ρ_1, ρ_2 : 외팔 보 1, 2 의 단위길이 당 질량
 E_1, E_2 : 외팔 보 1, 2 의 탄성계수
 I_1, I_2 : 외팔 보 1, 2 의 단면 관성 모멘트
 L : 보의 길이
 w : 보의 너비
 ε_0 : 진공의 유전율
 V : 가진 전압
 d : 두 외팔 보의 고정 단 사이의 간격
 v_{1T}, v_{2T} : 외팔 보 1, 2 의 자유단 처짐 양
 f_i : 강제진동 시의 i 번째 고유진동수
 f_{ni} : 자유진동 시의 i 번째 고유진동수

1. 서 론

최근 제조기술의 발달과 더불어 많은 첨단산업 제품들에 MEMS 구조로 이루어진 부품이 사용되고 있다. 실생활에서 흔히 볼 수 있는 캠코더의 멀림 보정장치나 컴퓨터 HDD의 구동기가 그 예이며 각종 전자제품의 신호 검출장치, 항공기의 각속도 측정 센서도 그와 같이 MEMS 부품으로 이루어진 장치이다.

MEMS 구조물들은 미세한 크기와 재료의 특성

때문에 구조물에 전압을 가할 때 발생하는 정전기력에 의해 구동 된다. 그런데 정전기력은 구조물의 응답에 의해 변화되므로 일반적인 구동력과는 다른 특성을 갖고 있다. 이러한 특성 때문에 구조물의 외부 가진에 대한 응답 특성은 정전기력을 발생시키는 전압과 연관되어서 변화한다. 따라서 구조물의 효율적인 설계를 위해서 전압의 변화에 의한 정적 및 동적 응답 특성의 변화를 예측하는 것이 필요하다.

정전기력을 받는 외팔 보는 MEMS 구조에서 구동기, 스위치, 센서 등의 보편적인 형태 중의 하나로 단일 마이크로 외팔 보나 그 집합 구조로 사용되고 있다. 현재까지 이와 같은 정전기력을 받는 외팔 보의 응답과 관련한 다양한 연구들이 있었다. 참고문헌(1)은 사각 단면을 갖는 단일 마이크로 외팔 보의 정적 처짐을 예측했다. 이와 더불어 구조물의 허용전압을 수식으로 제시하였다. 참고문헌(2)는 다양한 형상의 외팔 보를 다름으로써 단면 형상 변화에 의한 정적 처짐의 민감도 변화를 제시하였다. 참고문헌(3)은 부분적으로 변형된 단일 마이크로 외팔 보의 정적 처짐을 예측하였다. 그리고 참고문헌(4)은 원형 단면을 갖는 단일 나노 외팔 보의 정적 처짐을 반테르발스 힘까지 고려하여 제시하였다. 이러한 정적 응답에 국한된 연구들과 달리 참고문헌(5)는 단일 외팔 보의 동적 응답을 다루었다. 이 연구에서는 외팔 보 상면에 고정된 전극으로부터 가해지는 정전기력을 조절하여 동적 응답을 제어하는 방법을 제시하였다. 그러나 이 연구에서도 일반적인 진동 특성의 변화는 다루지 않았다.

본 연구에서는 단일 마이크로 외팔보 구조를 용융한 이중 마이크로 외팔보의 응답 특성을 다루

* 한양대학교 기계설계학과 대학원

** 한양대학교 공과대학 기계공학부
E-mail : smoon@hanyang.ac.kr

*** 한양대학교 공과대학 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070

고 있다. 정적 처짐을 예측하고 기존의 연구들과 달리 진동 특성의 변화를 예측한다. 그리고 그로부터 동적인 응답과 그 안정성을 예측한다.

특히 MEMS 구조물은 그 크기가 매우 작기 때문에 제조과정 상에서 단면형상의 오차가 발생하거나 결정구조의 변화 등으로 재료의 강성이 변화할 가능성이 높다. 본 연구에서는 이러한 경우의 동적 특성의 변화도 비교하여 제시함으로써 부품 제작 시 원하는 응답을 얻기 위한 정밀도에 대해서도 정보를 제공하고 있다.

2. 운동 방정식

정전기력을 받는 이중 마이크로 외팔보는 Fig. 1 과 같이 나타낼 수 있다. 연속계에서 오일러 보이론에 근거한 외팔보의 굽힘방향 운동 방정식으로부터 이중 마이크로 외팔보의 운동 방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + E_1 I_1 \frac{\partial^4 v_1}{\partial x_1^4} = f \quad (1)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + E_2 I_2 \frac{\partial^4 v_2}{\partial x_2^4} = -f \quad (2)$$

여기서 f 는 두 외팔보 사이에 발생하는 정전기력으로서 참고문헌(1)에 제시된 식으로부터 식(3)과 같이 나타낼 수 있으며 변위에 대해 비선형적인 관계를 갖는다.

$$f = \frac{w \varepsilon_0 V^2}{2} \frac{1}{(d - v_1 + v_2)^2} \quad (3)$$

이산계 운동 방정식을 구하기 위해 식(1), (2)에 가중함수 ϕ_i 를 각각 곱한 후 외팔보의 영역에 대해 부분적분하고 경계조건을 대입한다.

$$\int_0^L \rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \cdot \phi_i dx + \int_0^L E_1 I_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \cdot \phi_i'' dx = \int_0^L f \cdot \phi_i dx \quad (4)$$

$$\int_0^L \rho_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \cdot \phi_i dx + \int_0^L E_2 I_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \cdot \phi_i'' dx = - \int_0^L f \cdot \phi_i dx \quad (5)$$

$$v_\alpha(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu_\alpha} \phi_i(x) q_i(t) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (6)$$

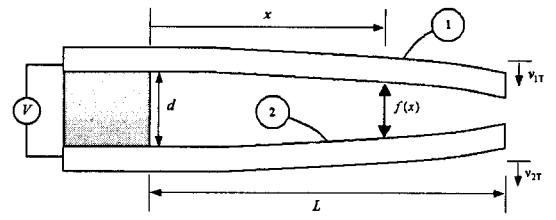


Fig. 1 Configuration of micro double cantilever beams interacted by electrostatic force

변위를 식(6)과 같이 근사화 한 후 식(4)와 식(5)에 대입하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} m_{ij}^1 \ddot{q}_{1j} + \sum_{j=1}^{\mu_1} k_{ij}^1 q_{1j} = r_i \quad (i = 1, \dots, \mu_1) \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} m_{ij}^2 \ddot{q}_{2j} + \sum_{j=1}^{\mu_2} k_{ij}^2 q_{2j} = -r_i \quad (i = 1, \dots, \mu_2) \quad (8)$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{ij}^\alpha &\equiv \int_0^L \rho_\alpha \phi_i \phi_j dx \\ k_{ij}^\alpha &\equiv \int_0^L E_\alpha I_\alpha \phi_i'' \phi_j'' dx \\ r_i &\equiv \int_0^L f \phi_i dx \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned}$$

또한 식 (7), (8)의 시간에 관한 항을 무시하면 정적 처짐에 대한 방정식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} k_{ij}^1 q_{1j} = r_i \quad (i = 1, \dots, \mu_1) \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} k_{ij}^2 q_{2j} = -r_i \quad (i = 1, \dots, \mu_2) \quad (10)$$

식(9)과 식(10)의 비선형 방정식으로부터 정적 처짐의 평형 위치를 구할 수 있다. 그런데 동적 응답을 효율적으로 구하기 위해서는 정전기력의 선형화가 필요하다. 이를 위해 앞에서 구한 정적 평형 위치를 식(11)과 같이 정의하고 이를 이용해 정전기력을 선형화 한다.

$$v^* \equiv v_1^* - v_2^* \quad (11)$$

$$f \equiv \frac{w\epsilon_0 V^2}{2} \frac{d - 3v^*}{(d - v^*)^3} + \frac{w\epsilon_0 V^2}{(d - v^*)^3} (v_i - v_2) \quad (12)$$

식(12) 같이 선형화한 정전기력을 운동방정식(7), (8)에 다시 대입하면 다음과 같이 선형화한 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j = \sum_{j=1}^{\mu} R_{ij}^1 q_j + R_i^0 \quad (\mu = \mu_1 + \mu_2, i, j = 1, 2, \dots, \mu) \quad (13)$$

여기서

$$[M_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} m_{lm}^1 & 0 \\ 0 & m_{lm}^2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} k_{lm}^1 & 0 \\ 0 & k_{lm}^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\ddot{q}_j\} \equiv \begin{cases} \dot{q}_{1l} \\ \dot{q}_{2l} \end{cases}, \{q_j\} \equiv \begin{cases} q_{1l} \\ q_{2l} \end{cases}$$

$$[R_{ij}^1] \equiv \begin{bmatrix} r_{lm}^1 & -r_{lm}^1 \\ -r_{lm}^1 & r_{lm}^1 \end{bmatrix}$$

$$\{R_i^0\} \equiv \begin{cases} r_i^0 \\ -r_i^0 \end{cases}$$

$$r_{ij}^1 \equiv \frac{w\epsilon_0 V^2}{(d - v^*)^3} \phi_i \phi_j$$

$$r_i^0 \equiv \frac{w\epsilon_0 V^2}{2} \frac{d - 3v^*}{(d - v^*)^3} \phi_i$$

3. 수치 해석

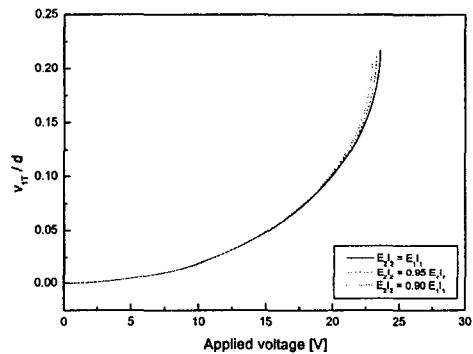
본 절에서는 앞 절에서 유도된 운동 방정식에 근거하여 정전기력을 받는 마이크로 이중 외팔 보의 정적 및 동적 응답 해석과 모드 해석을 수행하였다. 수치 해석에 사용한 물성치들은 Table 1에 나타나 있다.

Fig. 2 는 정적 해석을 수행한 결과로 전압에 대해 무차원화 된 외팔 보의 자유단 처짐을 각각 나타낸 것이다. 전압이 증가할수록 전압에 대한 처짐의 변화율이 증가하는 것을 알 수 있으며 특정 전압에서 변화율이 무한대가 됨으로써 구조물의 허용전압이 존재함을 확인할 수 있다. 또한 두 외팔보의 강성이 같을 경우 처짐이 대칭을 이루다가 외팔보 2 의 강성이 감소할수록 같은 크기의 전압

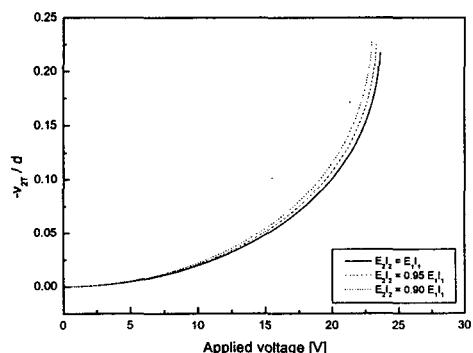
에 더 크게 반응하며 그 변화는 강성이 낮은 외팔보에서 더 큰 것을 확인할 수 있다. 강성 감소에 의한 허용전압의 감소 역시 확인할 수 있다.

Table 1 Numerical data used for the simulation

Notation	Description	Numerical data
ρ	Mass per unit length	$9.320 \times 10^{-9} \text{ kg/m}$
E	Young's modulus	55 GPa
I	Moment of inertia	$1.3333 \mu\text{m}^4$
L	Beam length	100 μm
w	Beam width	2.0 μm
ϵ_0	Free space permittivity	$8.8542 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
V	Applied drive voltage	0 ~ 24 V
d	Gap between fixed tip	2.0 μm

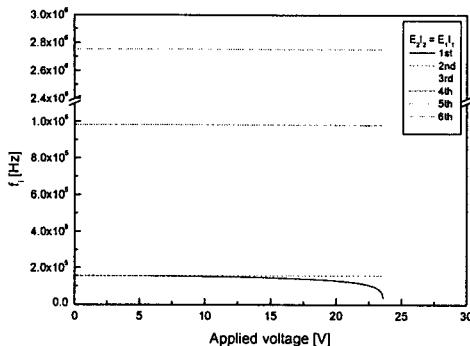


(a) First beam tip deflection

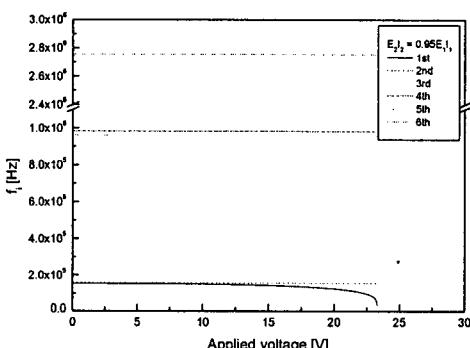


(b) Second beam tip deflection

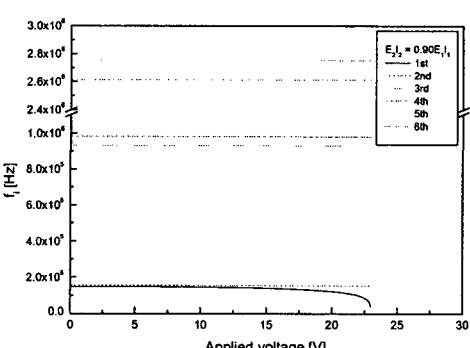
Fig. 2 Variations of static deflection of beam tips versus applied voltage



(a) $E_2 I_2 = E_1 I_1$



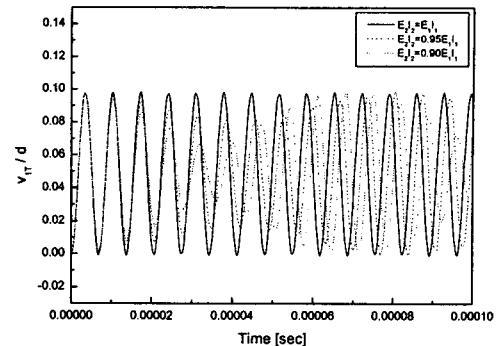
(b) $E_2 I_2 = 0.95 E_1 I_1$



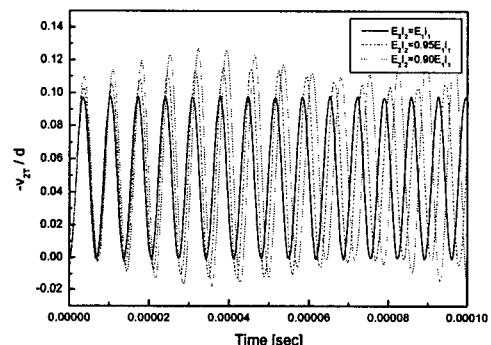
(c) $E_2 I_2 = 0.90 E_1 I_1$

Fig. 3 Variations of the lowest six natural frequencies versus applied voltage

Fig. 3 은 전압의 변화에 의한 강제진동 시의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 강성이 같은 경우 전압이 증가함에 따라 첫번째, 세번째, 다섯



(a) First beam tip deflection



(b) Second beam tip deflection

Fig. 4 Dynamic responses by a direct voltage ($V = 15[V]$)

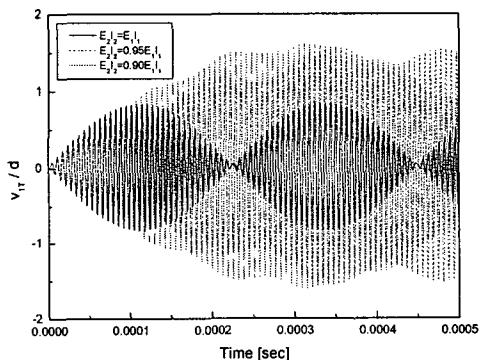
번째 고유진동수는 감소하며 응답에서 가장 지배적인 첫번째 고유진동수의 변화가 가장 큰 것을 볼 수 있다. 또한 전압이 0 일 때 각각 첫번째, 세 번째, 다섯 번째 고유진동수와 같은 값을 갖는 두 번째, 네 번째, 여섯 번째 고유진동수는 전압에 의한 변화 없이 일정 값을 갖는 것을 볼 수 있다. 그러나 외팔 보 2 의 강성이 감소함에 따라 흔수 번째 고유진동수의 값이 전체적으로 감소하는 것을 볼 수 있으며 짹수번째 고유진동수 역시 전압 증가에 따라 미세하게 감소하고 있다.

다음으로 동적 해석결과를 보면 우선 직류 가진 전압에 의한 동적 응답은 Fig. 4 와 같다. 강성이 감소한 경우 진동주기가 변하는 것을 볼 수 있다. 또한 진폭이 증감을 반복하는 형태로 변하는 것을 알 수 있다.

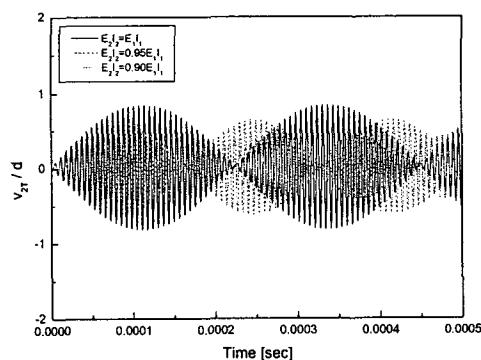
교류에 의해 가진될 경우의 동적 응답은 다소 다른 경향을 갖는다. 그 이유는 교류전압이 구조

전체의 강성을 주기적으로 변화시키기 때문이다. 이런 경우 일반적으로 동적 안정성에 문제가 발생할 수 있다. 이 때문에 고유진동수에 비해 비교적 낮은 주파수의 교류 전압이 가해질 경우에는 정적 처짐의 경향과 유사한 안정적인 응답이 발생하나 교류전압이 고유진동수와 비슷한 크기의 주파수로 가해질 경우 Fig. 5 와 같이 응답의 크기가 크게 증가할 수 있다. Fig. 5 는 고유진동수의 1/2 인 가진주파수로 교류전압이 가해지는 경우로 맥놀이 형태의 응답이 발생하는 것을 볼 수 있다. 또 외팔보 하나의 강성만 감소할 때 두 외팔 보의 응답은 대칭성을 상실하게 된다. 강성이 감소할수록 높은 강성을 가진 외팔 보 맥놀이 진폭은 커지고 낮은 강성을 가진 외팔 보 진폭은 작아지게 된다.

$$v_{\max} / d = (v_1 - v_2)_{\max} / d \quad (14)$$



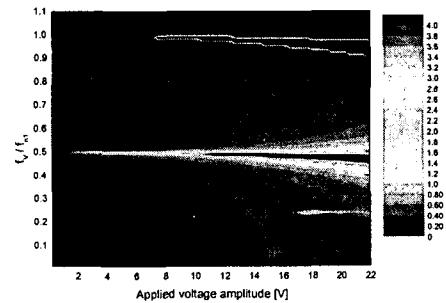
(a) First beam tip deflection



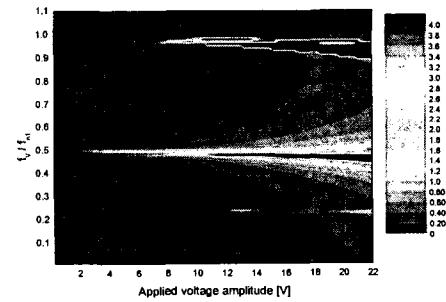
(b) Second beam tip deflection

Fig. 5 Dynamic responses by an alternate voltage ($V = 15 \sin(2\pi f_V t)$ [V], $f_V = 0.5 f_{n1}$)

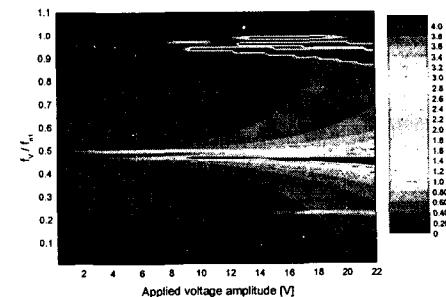
Fig. 6 은 증가할 수 있는 무차원화 된 최대 응답을 교류전압 크기와 무차원화 된 가진주파수에 대해 나타낸 것이다. 여기서 불안정성 기준으로서 식(14)와 같이 정의된 두 자유 단의 처짐을 함께 고려한 값이 사용되었다. 이 값은 이중 마이크로 외팔 보의 구조 상 두 외팔보가 고정된 간격인 d 보다 클 수 없으나 (충돌이 일어나므로) 수치 해석에서는 충돌이 고려되지 않으므로 더 큰 값도



(a) $E_2 I_2 = E_1 I_1$



(b) $E_2 I_2 = 0.95 E_1 I_1$



(c) $E_2 I_2 = 0.90 E_1 I_1$

Fig. 6 Variation of dimensionless maximum dynamic responses by applied voltages

나타날 수 있는데 이는 단지 불안정성의 강도를 나타내는 것이다.

Fig. 6 의 결과로부터 f_v / f_{nl} 가 0.5 나 1.0 인 주위에서 전압에 대한 최대 응답 변화가 급격함을 알 수 있으며 전압이 증가함에 따라 불안정 영역 폭이 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 고유 진동 수가 감소하는 경향과 유사하게 불안정 영역의 중심이 낮은 주파수쪽으로 이동하는 것을 확인할 수 있다. 그리고 외팔 보 하나만 강성이 감소한 경우의 모드 해석에서 비슷한 크기의 첫번째 고유 진동수가 작아졌던 결과와 유사한 경향으로 불안정 영역의 중심이 강성이 작은 경우일수록 더 낮은 것을 볼 수 있으며 이 때 강성 감소에 의해 크게 변하지 않았던 두 번째 고유진동수의 영향으로 특정 부분에서는 불안정 영역이 유사하게 존재함을 확인할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 많은 MEMS 구조물에 이용되는 이중 외팔 보 구조의 정적 및 동적 응답 해석과 모드 해석을 수행하였다. 정적 해석의 결과로부터 전압에 대한 처짐 변화를 예측하였고 최대 처짐을 발생시키기 위한 최소 전압이라 할 수 있는 허용 전압을 제시하였다. 또한 모드 해석 및 동적 해석 결과와 관련해 일반적인 동적 특성 및 동적 안정성을 파악하였다. 특히 본 연구에서 다른 이중 외팔 보 구조물이 제작오차에 의해 대칭성을 잃게 되어 두 외팔 보 사이에 강성 차가 발생할 때의 동적 응답 변화를 비교, 분석하였다.

이와 같은 연구는 마이크로 구조물을 대상으로 기존 연구에서 다루지 않았던 동적 특성의 변화를 다양한 내용으로 다루었다는 점에서 의미가 있다고 생각되며 마이크로 구동기나 스위치 또는 튜이저와 (Tweezer) 같은 기구를 고안하고 설계하기 위한 정보로서 유용하리라 사료된다.

후 기

본 연구는 한국과학재단지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Kovacs, Gregory T. A., 1998, *Micromachined Transducers Sourcebook*, McGraw-Hill, pp. 278~281.
- (2) Hirai, Yoshihiko, Marushima, Yoshinari, Soda, Shinnosuke, Jin, Donghao, Kawata, Hiroaki, Inoue, Kouji, Tanaka, Yoshio, 2000, "Electrostatic Actuator with Novel Shaped Cantilever," 2000 International Symposium on Micromechatronics and Human Science, pp. 223~227
- (3) Wei, Leow Cheah, Mohammad, Abu Baker, Kassim, Norazan Mohd., 2002, "Analytical Modeling for Determination of Pull-In Voltage for An Electrostatic Actuated MEMS Cantilever Beam," ICSE Proc., pp. 233~238.
- (4) Dequesnes, Marc, Rotkin, S. V., Aluru, N. R., 2002, "Calculation of Pull-in Voltages for Carbon-nanotube-based Nanoelectromechanical Switches," IOP publishing, pp. 120~131.
- (5) Wang, P. K. C., 1998, "Feedback Control of Vibration in a Micromachined Cantilever Beam with Electrostatic Actuators," J. of Sound and Vibration, pp. 537~550
- (6) Yoo, H. H., Moon, S. J., Jung, K. S., 2004, "Dynamic Analysis of Micro Cantilever Beams Undertaking Electrostatic Forces," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 14, No. 9, pp. 846~851