볼록이차계획법을 위한 감도분석의 특성 연구
A Study on Properties of Sensitivity Analysis on Convex Quadratic Programming

임성묵
한국전산원

Sungmook Lim
National Computerization Agency

Abstract

본 논문에서는 볼록이차계획법을 위한 감도분석의 특성을 분석한다. 이를 위해, 볼록이차계획법을 위한 ε-감도분석 방법, 최적분할에 의한 감도분석 방법, Yildirim-Todd의 감도분석 방법 등을 유도한다. ε-감도분석의 경우, 내부점방법의 전개상 얻어지는 계산량을 활용할 수 있도록 유도하여 실용성을 높인다. 또한, 선형계획법을 위한 Yildirim-Todd의 감도분석 방법을 볼록이차계획법에 적합하도록 확장하고, ε-감도분석의 범위와의 관계성을 분석한다. 마지막으로 Yildirim-Todd의 방법과 최적분할에 의한 감도분석 방법 간의 관계를 규명한다.

1. 서론

볼록이차계획법(convex quadratic programming, CQP)는 선형계획법과 마찬가지로 여러 가지 방식으로 정형화될 수 있지만, 목적함수가 2차식이며 제약식이 선형이라는 것이 핵심적인 특성이다. 볼록이차계획법의 전형적인 정형화는 선형계획법의 표준형을 확장한 형태이다:

$$QP(b,c):\ \min\ \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \quad s.t.\ \ Ax = b,\ x \ge 0,$$

여기서 Q는 반정치(symmetric positive semidefinite)인 $n\times n$ 행렬이고, $c\in R^n$, $b\in R^m$, $A\in R^{m\times n}$ 이다. 한편, Wolfe에 의한 $QP(b,c)$의 쌍대문제는

$$QD(b,c):\ \max\ \frac{1}{2}x^TQx + b^Ty \quad s.t.\ \ Qx + A^Ty + s = c,\ s \ge 0$$

이고, KKT조건에 의한 $QP(b,c)$, $QD(b,c)$에 대한 최적조건은

$$Ax = b,\ x\ge 0,$$
$$A^Ty + s - Qx = c,\ s\ge 0,$$
$$x^Ts = 0.$$

선형계획법에서는 그 최적해 집합이 강상보해와 최적분할에 의해 특징지어지는 반면, 볼록이차계획법의 최적해 집합은 최대상보해(maximal complementary solutions)와 대응되는 삼분할(tripartition)로 표현될 수 있다[1]. 이 삼분할 $\pi = (B,N,T)$은 아래와 같이 정의된다.

$B = \{ i : x_i > 0$ for an optimal(feasible) solutionx $x(x)$ of QP(LCP) $\}$,
$N = \{ i : s_i > 0$ for an optimal(feasible) solution $(x,y,s)(s)$ of QD(LCP) $\}$,
$T = \{1,\cdots,n\} - (B\cup N)$.

최대상보해 (x,y,s)은,

$$x_i > 0 \Leftrightarrow i\in B,\quad s_i > 0 \Leftrightarrow i\in N;$$

을 만족하는 해로서, Güler와 Ye[2]에 의해 그 존재성이 증명되었고, 대부분의 내부점방법은 최대상보해를 출력한다. 볼록이차계획법을 내부점방법으로 풀 때, 개선방향을 구하기 위한 뉴톤방정식은 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} A & O & O \\ -Q & A^T & I \\ S & O & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_b \\ \xi_c \\ \xi_\mu \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

여기서 $\xi_b = b - Ax$, $\xi_c = c - A^Ty - s + Qx$, $\xi_\mu = \mu e - XSe$이다. 한편, 실제 내부점방법에서는 Δs가 제거된 확장방정식이 사용되는데, 식 (2)와 같다.

$$\begin{bmatrix} -Q-\Theta & A^T \\ A & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_b \\ \xi_c - \xi_\mu X^{-1} \end{bmatrix},\ \Theta = \overline{SX}^{-1}. \quad (2)$$

감도분석은 주어진 최적화문제의 입력요소에 변화가 발생했을 때 최적해의 변화 특성을 분석하는 것이다. 실생활문제에서는 최적화문제의 입력요소가 추정치인 경우가 많이 있기 때문에 감도분석의 정보는 아주 중요하다. 그 중요성 때문에 선형계획법뿐만 아니라 이차계획법 및 반정치계획법에 이르기까지 많은 형태의 최적화문제에 대한 감도분석법이 많이 개발되어 왔다. 그 중에서 ε-감도분석은 김우제 등[4]에 의해 선형계획법을 위한 실용적인 감도분석법으로 개발된 것이며, 이와 유사한 시기에 Yildirim과 Todd[8]도 선형계획법과 반정치계획법(SDP)을 위한 감도분석법을 발표했다. 이 두가지 방법은 내부점방법의 관점에서 접근한 실용적인 감도분석법이라는 공통점이 있다. 박찬규 등[5]은

그들의 논문에서, 선형계획법을 위한 ε-감도분석법에 의한 특성영역이 Yildirim-Todd 방법에 의한 특성영역을 포함한다고 증명하였다. 또한, 일반적으로 ε-감도분석 범위는 최적분할에 의한 범위에 포함된다고 증명하였다. Yildirim과 Todd[9]도 원쌍대 비퇴화인 경우 자신들의 범위가 최적분할에 의한 범위의 대칭형(symmetrized bounds)에 해당하며, 퇴화가 발생한 경우에도 최적분할 범위와 자신들의 범위간의 비율을 증명하여 그 실용성을 보였다.

본 논문에서는 ε-감도분석법과 Yildirim-Todd 방법을 볼록이차계획법을 위한 감도분석법으로 확장하는 방법을 간략히 소개하고, 그들간의 관계성을 비교, 분석한다. 단, 주어진 볼록이차계획법 문제 $QP(b,c)$와 $QD(b,c)$에서 b의 변화에 따른 감도분석만을 대상으로 하는데, 이는 c에 대한 감도분석이 b에 대한 감도분석법으로부터 간단히 변형되어 유도될 수 있기 때문이다.

2. 볼록이차계획법을 위한 ε-감도분석의 확장

ε-감도분석법에서는 ε-최적해를 정의하는데, 볼록이차계획법에서도 (정의 1)과 같이 ε-최적해가 정의된다.

(정의 1) *임의의 양수 ε가 주어졌을 때, 아래 세 식을 만족하는 (x,y,s)는 $QP(b,c)$와 $QD(b,c)$에 대한* ***ε-최적해****이다[6].*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad Ax = b, \quad x \geq 0, \\
&(ii) \quad A^T y + s - Qx = c, \quad s \geq 0, \\
&(iii) \quad x^T s \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

이와 같은 ε-최적해의 정의를 바탕으로, CQP에 대한 일반 ε-감도분석법이 (정의 3)과 같이 유도된다.

(정의 2) *CQP에 대한 일반 ε-감도분석*은 *주어진 ε-최적해가 주어진 일정 방향을 따라 이동하여 ε-최적성이 유지될 수 있도록 하는 원 문제의 입력요소의 변화범위를 구하는 것이다[7].*

이 (정의 2)는 김우제 등[4]의 ε-감도분석 정의보다 더 일반적인 정의로서, 주어진 ε-최적해의 이동방향을 명시하지 않았으므로, 그 방향을 어떤 식으로 정의하느냐에 따라 일반 ε-감도분석법은 다양한 구현이 가능하게 된다.

본 절에서는 김우제 등[4]의 선형계획법을 위한 ε-감도분석법을 직관적으로 확장한 방법[6]을 검토한다.

임의의 양수 ε에 대해 $\bar{x}^T\bar{s}=\varepsilon$을 만족하는 ε-최적해 $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$가 주어졌다고 가정하자. 그러면, $(\bar{x},\bar{y})$는 (정리 1)과 같이 표현될 수 있다.

(정리 1) *$QP(b,c)$와 $QD(b,c)$의 가능해 $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$가 주어졌을 때, 다음의 관계식이 성립한다.*

$$\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix}c-2\bar{z}\\ b\end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix}-Q-\Theta & A^T\\ A & 0\end{pmatrix}.$$

(증명) $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$는 가능해이므로, 다음이 만족된다.

$$A\bar{x}=b, \quad A^T\bar{y}+\bar{s}-Q\bar{x}=c.$$

여기서 $\Theta\bar{x}+\bar{s}=2\bar{s}$라는 관계를 이용하여 $\bar{s}$를 제거하면 다음 식을 얻는다.

$$A\bar{x}=b, \quad A^T\bar{y}+(-Q-\Theta)\bar{x}=c-2\bar{s}.$$

이 식을 행렬식으로 표현하면 정리에 나타난 식이 얻어진다. ■

이제, 우변상수 b가 방향 $\Delta b(\in R^n)$를 따라 $\lambda(\in R)$만큼 이동했다고 가정하자. 그러면, 수정된 볼록이차계획법 $QP(b+\lambda\Delta b,c)$와 $QD(b+\lambda\Delta b,c)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
QP(b+\lambda\Delta b,c):&\ \min \tfrac{1}{2}x^TQx+c^Tx\\
&\ s.t.\ Ax=b+\lambda\Delta b,\ x\geq 0,\\
QD(b+\lambda\Delta b,c):&\ \max -\tfrac{1}{2}x^TQx+(b+\lambda\Delta b)^Ty\\
&\ s.t.\ -Qx+A^Ty+s=c,\ s\geq 0.
\end{aligned}$$

그리고, (정리 1)의 $(\bar{x},\bar{y})$ 표현식에서 b 대신 $b+\lambda\Delta b$를 대입하여 새로운 해 $(\hat{x},\hat{y},\hat{s})$를 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\hat{x}\\ \hat{y}\end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix}c-2\bar{s}\\ b+\lambda\Delta b\end{bmatrix}, \quad \hat{s}=\bar{s}. \tag{3}$$

한편, 새로운 해 $(\hat{x},\hat{y},\hat{s})$는 현재의 해 $(\bar{x},\bar{y},\bar{s})$로부터 다음과 같이 정의되는 방향 $(\Delta x,\Delta y,\Delta s)^T$을 따라 λ만큼 이동한 것으로 볼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \Delta b\end{bmatrix}, \quad \Delta s = 0. \tag{4}$$

새로운 해 $(\hat{x},\hat{y},\hat{s})$가 변화된 문제 $QP(b+\lambda\Delta b,c)$와 $QD(b+\lambda\Delta b,c)$의 ε-최적해가 되려면, (정의 1)의 세 조건 *(i), (ii), (iii)*를 만족시켜야 한다. 결국 이를 위해 다음 식 (5), (6)이 성립되는 범위가 b의 변화가능 범위가 되는 것이다.

$$\hat{x}\geq 0 \tag{5}$$

$$\hat{x}^T\bar{s}\leq\varepsilon \tag{6}$$

이는 다음 (정리 2)에 의해 증명된다.

(정리 2) *λ가 조건 (a), (b)를 만족시키면, 새로운 해 $(\hat{x},\hat{y},\hat{s})$는 변화된 문제 $QP(b+\lambda\Delta b,c)$와 $QD(b+\lambda\Delta b,c)$의 ε-최적해가 된다.*

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \lambda\Delta x \geq -\bar{x}\\
&(b) \quad \lambda\Delta x^T\bar{s}\leq 0.
\end{aligned}$$

여기서 Δx는 식 (4)에서 정의된 바와 같다.

(증명) *(a)*는 새로운 해가 원가능성을 만족시키는 것을 의미한다. 그리고, *(b)*는 새로운 쌍대간격이 ε보다 작음을 의미하는데, 아래와 같이 유도된다:

$$\hat{x}^T\bar{s}\leq\varepsilon \Rightarrow (\bar{x}+\lambda\Delta x)^T\bar{s}\leq\varepsilon \Rightarrow \lambda\Delta x^T\bar{s}\leq 0. \ ■$$

여기서 한가지 주목할 점은 볼록이차계획법을 풀기 위한 대부분의 내부점방법의 구현에서 M^{-1}

이 쉽게 얻어진다는 점이다. 즉, 선형계획법의 ε-감도분석의 경우와 마찬가지로, 볼록이차계획법에서도 ε-감도분석법은 실용성이 높다고 할 수 있다.

3. 볼록이차계획법을 위한 Yildirim-Todd 감도분석의 확장

본 절에서는 Yildirim과 Todd[8]가 선형계획법을 위하여 개발했던 내부점방법을 이용한 감도분석법을 CQP의 경우로 확장한 방법을 검토한다. 그들의 방법은 2절에서 설명한 일반 ε-감도분석법의 일종으로 볼 수 있는데, 주어진 ε-최적해를 이동시키는 방향으로 뉴톤방향을 사용한다.

그들의 논문의 'Proposition 1'을 CQP의 경우로 확장하면 다음 (정리 3)과 같다.

(정리 3) *$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$가 $QP(b, c)$와 $QD(b, c)$의 내부가능해이고, b가 $b' = b + \lambda\Delta b$ ($\Delta b \in R^m$)로 이동했다고 가정하자. 또한, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$로부터 $X'S'e = \overline{XS}e$를 만족하는 $QP(b', c)$와 $QD(b', c)$의 가능해 (x', y', s')로 향하는 뉴톤방향이 취해졌다고 하자. 그러면, 뉴톤방향으로 개선폭 1만큼 이동해도 새로운 해가 가능해가 되는 필요충분조건은 아래와 같다.*

$$\|\lambda \bar{S}^{-1}[Q \ \ -A^T] \begin{bmatrix} -Q-\Theta & A^T \\ A & O \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta b \end{bmatrix} \|_\infty \le 1. \quad (7)$$

또한, 새로운 해의 쌍대간격은 $x^T s$보다 작다.

위 (정리 3)의 증명은 임성묵 등[6]의 논문을 참고하기로 하고 생략한다. 다만, 해당 필요충분조건은 $\|\lambda \bar{S}^{-1}\Delta s\|_\infty \le 1$ 또는 $\|\lambda \bar{X}^{-1}\Delta x\|_\infty \le 1$와 동치임을 강조해 둔다.

4. ε-감도분석과 Yildirim-Todd 감도분석의 비교

볼록이차계획법을 위한 ε-감도분석법에서 특성영역을 구하는 식은 (정리 2)에 의하면,

$$\lambda\Delta x \ge -\bar{x}$$
$$\lambda\Delta x^T \bar{s} \le 0,$$

인데, 이를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda \bar{X}^{-1}\Delta x &\ge -e \\ \lambda \bar{s}^T \bar{X}\bar{X}^{-1}\Delta x &\le 0. \end{aligned} \quad (8)$$

한편, 3절에서 확장한 Yildirim-Todd의 감도분석법에서는 그 특성영역이,

$$\|\lambda \bar{X}^{-1}\Delta x\|_\infty \le 1,$$

이다. 박찬규 등[5]이 선형계획법을 위한 ε-감도분석의 특성을 논한 그들의 논문에서 주장한 취지를 따르면, 주어진 ε-최적해 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$가 최적해에 수렴해 가면 $\bar{s}^T\bar{X}$가 영에 수렴하므로 식 (8)의 두 번째 식은 항상 만족된다고 할 수 있다. 그러나 이는 Yildirim과 Todd[8]가 주장한 바와 같이 엄밀히 옳은 주장은 아니다. 즉, $\bar{s}^T\bar{X}$가 영에 수렴하기는 하나, 이를 영으로 간주하여 식 (8)의 두 번째 식을 무시하게 되면 새로운 해의 쌍대간격이 ε보다 적지않은 양만큼 커진다. 반면, 쌍대간격이 ε보다 커지게 되면 ε-감도분석 범위가 최적분할 감도분석 범위에 포함된다는 증명은 이루어질 수 없게 된다.

만일 주어진 ε-최적해 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$가 일반적인 내부점 방법이 제공하는 내부가능해(strictly feasible solution)일 경우, $\bar{X}^{-1}$가 존재하므로 (정리 2)의 식 (a)와 (b)는

$$\lambda \bar{X}^{-1}\Delta x \ge -e, \quad \bar{s}^T\bar{X}(\lambda \bar{X}^{-1}\Delta x) \le 0,$$

와 같이 된다. Yildirim-Todd 범위와의 비교를 편리하게 하기 위해 공통 계산량인 $\lambda\bar{X}^{-1}\Delta x$의 범위를 비교대상으로 생각하자. 먼저 일반적인 경우, Yildirim-Todd의 감도분석 범위와 ε-감도분석의 범위는 아무런 포함관계가 성립하지 않는다. 다만, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$가 중심경로 상에 정확히 위치한다고 가정하면, 즉 $x_i s_i = \varepsilon/n$, $\forall i$ 이라면, ε-감도분석의 범위는

$$\lambda \bar{X}^{-1}\Delta x \ge -e, \quad e^T(\lambda \bar{X}^{-1}\Delta x) \le 0,$$

가 되어, ε-감도분석의 범위는 Yildirim-Todd의 감도분석 범위의 정확한 절반이 된다. 이는 ε-감도분석법과 달리 Yildirim-Todd의 감도분석법은 쌍대 여유변수 s의 이동도 허용하기 때문이라고 설명할 수 있다.

5. Yildirim-Todd 감도분석과 최적분할 감도분석의 비교

Yildirim과 Todd[9]는 선형계획법을 위한 감도분석법에서, 원쌍대 비퇴화의 경우 그들의 범위가 최적분할에 의한 감도분석 범위의 대칭형에 해당한다고 증명하였다. 그들은 이를 위해, 최적분할 감도분석 범위와 이를 변형한 대칭형 범위(symmetrized bounds)를 구한 후, 이를 자신들의 감도분석 범위와 비교하는 방법을 취하였다.

본 논문에서도, 볼록이차계획법 문제를 위한 최적분할 감도분석 범위와 이를 변형한 대칭형 범위를 유도한 후, 이를 3절에서 확장한 Yildirim-Todd 감도분석 범위와 비교하도록 한다.

우선, 최적분할 감도분석의 대칭형 범위를 구하도록 한다. 볼록이차계획법 $QP(b, c)$, $QD(b, c)$의 최적해 (x^*, y^*, s^*)와 삼분할 (B, N, T)가 주어졌다고 가정하자. 삼분할 (B, N, T)은 해당 변수의 지수집합을 표현하는데, 편의상 해당 변수에 대응되는 행렬 A의 부분행렬을 표시하는 표현식으로도 중복하여 사용하기로 한다.

최적분할 감도분석법에서는 아래와 같은 별도의 선형계획법 문제 식 (9)를 풀어 그 특성영역을 구한다[3].

$$\begin{aligned} \min_{x, y, s, \lambda} \ & \lambda \\ s.t. \ & Ax = b + \lambda\Delta b, \ x_B \ge 0, \ x_{N \cup T} = 0 \\ & A^T y + s - Qx = c, \ s_N \ge 0, \ s_{B \cup T} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

이 식을 삼분할에 따라 분리하여 다시 쓰면 식 (10)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \min_{x, y, s, \lambda} \ & \lambda \\ s.t. \ & Bx_B = b + \lambda\Delta b \\ & B^T y - Q_{BB} x_B = c_B \\ & T^T y - Q_{TB} x_B = c_T \\ & N^T y + s_N - Q_{NB} x_B = c_N \\ & x_B \ge 0, \ s_N \ge 0 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 $u = x_B - x_B^*$, $v = y - y^*$, $w = s_N - s_N^*$와 같이 변수 치환을 하면, 다음 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y,s,\lambda} \quad & \lambda \\
s.t. \quad & Bu = \lambda \Delta b \\
& B^T v - Q_{BB} u = 0 \\
& T^T v - Q_{TB} u = 0 \\
& N^T v + w - Q_{NB} u = 0 \\
& u \geq -x_B^*, \quad w \geq -s_N^*
\end{aligned}
\tag{11}
$$

여기서, 변수 u와 w에 하한의 절대값과 같은 값으로 상한을 부여하는 방식으로 대칭화시키면 식 (12)를 얻는다.

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y,s,\lambda} \quad & \lambda \\
s.t. \quad & Bu = \lambda \Delta b \\
& B^T v - Q_{BB} u = 0 \\
& T^T v - Q_{TB} u = 0 \\
& N^T v + w - Q_{NB} u = 0 \\
& -x_B^* \leq u \leq x_B^*, \quad -s_N^* \leq w \leq s_N^*.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

이제, 식 (12)를 통해 얻어지는 최적분할 감도분석의 대칭형 범위와 3절에서 확장된 Yildirim-Todd의 감도분석 범위를 비교한다. 단, 그 비교가 용이한 경우인, B가 가역 정방형 행렬이고 T가 공집합인 경우만을 고려한다. 우선, 식 (12)를 다시 고려하자. B의 역행렬이 존재하므로 $u = \lambda B^{-1}\Delta b$이고 $v = \lambda B^{-T} Q_{BB} B^{-1} \Delta b$이다. 그러면, $w = \lambda(Q_{NB} - N^T B^{-T} Q_{BB}) B^{-1} \Delta b$이므로, 식 (12)는 결국 식 (13)이 된다.

$$
\begin{aligned}
& \| \lambda (X_B^*)^{-1} B^{-1} \Delta b \|_\infty \leq 1 \\
& \| \lambda (S_N^*)^{-1} (Q_{NB} - N^T B^{-T} Q_{BB}) B^{-1} \Delta b \|_\infty \leq 1 .
\end{aligned}
\tag{13}
$$

한편, Yildirim-Todd 감도분석 범위는 $\|\lambda \overline{S}^{-1} \Delta s\|_\infty \leq 1$ 또는 $\|\lambda \overline{X}^{-1} \Delta x\|_\infty \leq 1$로서, Δx과 Δs는

$$
\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -Q & A^T & I \\ S & 0 & X \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta s \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \Delta b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\tag{14}
$$

로부터 구해지는데, 행렬식 (14)의 첫 번째 등식에서는 다음이 유도된다.

$$
\begin{aligned}
A\Delta x = \Delta b \ \leftrightarrow \ & A\overline{X}\Delta p = \Delta b \ \ (\Delta p = \overline{X}^{-1} \Delta x) \\
\leftrightarrow \ & (B \ N) \begin{pmatrix} \overline{X}_B & O \\ O & \overline{X}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_B \\ \Delta p_N \end{pmatrix} = \Delta b \\
\leftrightarrow \ & B\overline{X}_B \Delta p_B + N\overline{X}_N \Delta p_N = \Delta b \\
\leftrightarrow \ & \Delta p_B = X_B^{*-1} B^{-1} \Delta b + O(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

또한, 행렬식 (14)의 두 번째 등식으로부터는 다음이 유도될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
& -Q\Delta x + A^T \Delta y + \Delta s = 0 \\
\leftrightarrow \ & -Q\overline{X}\Delta p + A^T \Delta y + \overline{S}\Delta q = 0 \ \ (\Delta p = \overline{X}^{-1}\Delta x, \ \Delta q = \overline{S}^{-1} \Delta s) \\
\leftrightarrow \ & -\begin{pmatrix} Q_{BB} & Q_{BN} \\ Q_{NB} & Q_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X}_B & O \\ O & \overline{X}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_B \\ \Delta p_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^T \\ N^T \end{pmatrix} \Delta y \\
& \qquad + \begin{pmatrix} \overline{S}_B & O \\ O & \overline{S}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q_B \\ \Delta q_N \end{pmatrix} = 0 \\
\leftrightarrow \ & -\begin{pmatrix} Q_{BB}\overline{X}_B & Q_{BN}\overline{X}_N \\ Q_{NB}\overline{X}_B & Q_{NN}\overline{X}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta p_B \\ \Delta p_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^T \\ N^T \end{pmatrix} \Delta y \\
& \qquad + \begin{pmatrix} \overline{S}_B \Delta q_B \\ \overline{S}_N \Delta q_N \end{pmatrix} = 0 \\
\leftrightarrow \ & -\begin{pmatrix} Q_{BB}\overline{X}_B \Delta p_B + Q_{BN}\overline{X}_N \Delta p_N \\ Q_{NB}\overline{X}_B \Delta p_B + Q_{NN}\overline{X}_N \Delta p_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^T \Delta y \\ N^T \Delta y \end{pmatrix} \\
& \qquad + \begin{pmatrix} \overline{S}_B \Delta q_B \\ \overline{S}_N \Delta q_N \end{pmatrix} = 0 \\
\leftrightarrow \ & \Delta y = B^{-T} Q_{BB} B^{-1} \Delta b + O(\varepsilon), \\
& \Delta q_N = \overline{S}^{-1} (Q_{NB} B^{-1} \Delta b - N^T \Delta y) + O(\varepsilon) \\
\leftrightarrow \ & \Delta q_N = S_N^{*-1} (Q_{NB} - N^T B^{-T} Q_{BB}) B^{-1} \Delta b + O(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

이로부터, B가 가역 정방형 행렬이고 T가 공집합인 경우, 주어진 내부점 최종해 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$가 최적해에 수렴할수록 Yildirim-Todd의 감도분석 범위는 CQP의 최적분할 감도분석의 대칭형 범위에 수렴한다는 것을 알 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 볼록이차계획법을 위한 실용적인 감도분석 방법으로, 기존의 선형계획법을 위한 감도분석 방법으로 개발되었던 ε-감도분석과 Yildirim-Todd의 감도분석을 확장한 방법을 검토하였다. 이를 통해, 두 가지 감도분석법을 비교하여, 중심경로 상에 있는 해로부터 감도분석을 수행할 경우 ε-감도분석 범위는 Yildirm-Todd 범위의 정확한 절반에 해당한다는 결과를 얻었다. 또한, 특정한 비퇴화의 경우에 Yildirim-Todd 감도분석 범위는 최적분할 감도분석 범위의 대칭형 범위로 수렴함을 보였다.

추후 연구방향으로는 Yildirim-Todd 감도분석 범위와 최적분할 감도분석 범위의 상호 관계성을 일반적인 경우로 확장하여 분석하는 것이다.

참고문헌

[1] J.F. Bonnans, C.C. Gonzaga: Convergence of interior point algorithms for the monotone linear complementarity problem. Mathematics of Operations Research 21 (1996) 1-25.

[2] O. GĜler, Y. Ye, Convergence behavior of interior- point algorithms, Mathematical Programming 60 (1993) 215-228.

[3] B. Jansen, Interior point techniques in optimization, Kluwer Academic Publishers (1996)

[4] W. Kim, C. Park, S. Park, An ε-sensitivity analysis in the primal-dual interior point method, European Journal of Operational Research 116 (1999) 629-639.

[5] C. Park, W. Kim, S. Park, On the properties of e-sensitivity analysis for linear programming, (submitted to) Asia-Pacific Journal of Operational Research (2003).

[6] S. Lim, S. Park, A Sensitivity Analysis for Convex Quadratic Programming and Linear Complementary Problems, 대한산업공학회 추계학술대회 논문집 (2003)

[7] S. Lim, S. Park, An e-Sensitivity Analysis for Semidefinite Programming, (will appear in) European Journal of Operational Research (2004).

[8] E. Yildirim, M.J. Todd, Sensitivity analysis in linear programming and semidefinite programming using interior-point methods, Mathematical Programming 90 (2001) 229-261.

[9] E. Yildirim, M.J. Todd, An interior-point approach to sensitivity analysis in degenerate linear programs, SIAM Journal on Optimization , 12(3) (2002) 692-714.