# 관통자에 의한 경사복판의 관통현상에서 유한요소법을 근간으로한 라그랑지 코드의 변수의 영향에 관한 연구

# 김하윤\*

# A study on Effects of Parameters in the Lagrangian Code based on F.E.M. through Oblique Dual-Plates Perforation Phenomena

Ha-youn Kim

Key Words: Lagrangian Code(라그랑지 코드), Time-step(시간증분), FDM(유한차분법), Oblique Dual-Plates(경사복판), Perforation Phenomena(관통 현상)

#### Abstract

This study is concerned to the perforation phenomena of the oblique dual-plate by projectile. Experiment and simulation related to that was carried out. the variables considered in this phenomena include the electrolytic zinc coated steel sheet and carbon steel rod. In the former, the confirmation and projectile velocity possible phenomena of real phenomena is done, the latter, the effect of parameter such as time-step and grid space length is analized by using the three-dimensional Lagrangian explicit time-integration finite element code, HEMP. this code use the eight node hexahedral elements and in this study, Von-Mises Criteria is used as the strength model, Mie-Gruneisen is as the Equation of State. the simulation was performed by contrast with the experiment. through the calibra -tion of the parameter of lagrangian code, reasonable result was approached.

기호설명

ε <sub>ij</sub>	전변형률텐서
$\varepsilon_{ij}$ , $\varepsilon_{ij}^d$	전변형률속도, 편차변형률속도텐서
ρ	밀도
$v_i$	속도벡터
$f_i$	외부체적력
$V_{7}^{7}V$	체적변화률 속도
σ <sub>kk</sub>	체적변화률
$J_2$	편차응력텐서의 2 \불변치
$\overline{Y}$	단축인장/ 납축시험시의 항복응력
$S_{ii}$	편차응력텐서
$\Delta t$	시간증분

\* 연세대학교 공과대학 기계공학부 대학원 E-mail : khy001@yahoo.co.kr TEL : (02)2123-2817 FAX : (02)362-2736

Г	Mie-Gruneisen 계수
$\delta_{ij}$	kronecker delta
•	total time derivative
P	압력
σ <sub>m</sub>	평균응력텐서
$K_b$	체적탄성계수
q	인공점성력(pseudo viscous force)
$\sigma_E$	평균등가응력, , 미세스응력
ε <sub>E</sub>	유효변형률속도
μ	압축률(1-p/p <sub>0</sub> )
S	엔트로피
С	음속
$\Delta_{ij}$	강체회전보정률
$C_Q$ , $C_L$	2 ,1 ├ 점성계수
$\Delta h$	격자간격

# 1. 서 론

충격하중과 관련된 재료의 동적거동에 관련된 연구는 이공학의 넓은 분야에 깊은 관계를 갖고 있다. 기계의 성능이 향상됨에 따라서 기계의 작동 속도가 높아지게 되고, 부재는 충격하중을 받으면 서 그 기능을 다하도록 설계하는 것이 필수의 요 건으로 되어왔다. 각종 교통기관에서는 충돌에 대 한 안전성의 확보가 중요한 과제이고, 우주개발이 나 에너지 관련기기, 항공기 등의 안전설계에 비례 하는 이물에 대한 내충격성이 중요한문제로 되고 있다. 충격문제의 연구는 이와같이 기기의 안전설 계에 중요한 과제만이 아니고, 충격부하에 수반하 는 고압력, 고에너지를 이용한 신재료의 합성, 고 압물성의 연구도 계속적으로 행해지고, 고에너지 소성가공법이 개발되는 등 충격현상의 적극적인 이용도 이공학의 흥미깊은 과제로 되고 있다.

본 논문에서 시간의 경과에 따라 질량이 불변량 이며, 시간과 공간이 결합되어진 시스템인 라그랑 지법에 의한 시뮬레이션을 수행하였으며, 실제현 상 확인을 위해 실험을 실시하였다. 또한, 실제현 상에 대비하여 변수들의 영향을 분석하고자 한다.

#### 2. 이 론

2.1 Lagrangian Code 이론

2.1.1 배경 이론

해석대상을 거시적인 관점에서 고려할 때 연속 체로 간주할수 있으며, 연속체의 미소관심영역 (Infinitesimal Control Volume)에 뉴톤의 운동법칙 (Newton's law of motion)과 같은 자연법칙을 적용 함으로써 지배방정식을 유도할수 있는데, 이는 미분방정식의 형태가 된다. 일반적으로 재료의 특성과 무관하게 지배방정식은 적용되며, 재료의 특성은 관련소재계수 및 역학적인 기계량과 기하 학적 기계량을 연결시켜주는 역할을 하는 구성관 계식 및 변형공식에 의존한다.

## 2.1.2 지배방정식(Governing Equation)

일반적으로 지배방정식은 질량, 운동량, 에너지 보존 방정식으로 구성되어 있으며, 라그랑지법에 의해 (1), (2), (3)과 같이 표현된다.

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \tag{1}$$

$$\sigma_{ji,j} + \rho f_i = \rho \dot{v}_i \tag{2}$$

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + f_i v_i \tag{3}$$

#### 2.1.3 구성관계식(Constitutive Relations)

재료의 탄소성거동에서 구성관계식은 탄성영역 에서 식 (4)와 같이 편차응력과 편차변형률속도의 관계를 적용하며, 3D의 경우 Δ<sub>ij</sub>를 추가하여 강 체회전에 대한 보정을 고려한다. 탄소성문제의 경우 편차변형률속도는 탄성변형률속도로 고려한 다. 소성영역에서는 적절한 강도모델(Strength Model)을 적용하여 식(11)와 같이  $S_{ij}$ 를 보정함으로써 구현된다.

$$S_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^{d} + \Delta_{ij}$$
$$= 2G\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(V/V)\delta_{ij}\right] + \Delta_{ij}$$
(4)

$$\sigma_{ij} = \sigma_m + S_{ij} = \sigma_{kk} \delta_{ij} + S_{ij} = -P \delta_{ij} + S_{ij}$$
(5)

식 (4)는 등방성재료(Isotropic material)의  $\sigma_{ij}$ 는 식(5)와 같이 체적변화와 관련된  $\sigma_m$ 와 변형에 관 련된  $S_{ij}$ 로 구성이 되어 있다는 가정하에 Hooke's law 및  $K_b$ 를 전응력속도-변형률관계식에 적용함 으로써 유도되어지며, 식(6)과 같이 P에 q를 삽 입하여 재료의 감쇄(damping)효과를 구현하며, q는 식(7),(8)과 같은 조건을 가진다.

$$\sigma_{ij} = -(P+q)\delta_{ij} + S_{ij} \tag{6}$$

$$q = \rho \left[ (C_Q dv_{i,i})^2 - C_L cv_{i,i} \right] \quad v_{i,i} < 0 \quad (7)$$

$$q = 0 \qquad \qquad v_{i,i} > 0 \qquad (8)$$

#### 2.1.4 변형공식(Deformation Formula)

재료의 동적거동 즉, 속도벡터장으로 해석영역 이 정의되어진다면 (9)과 같은 변형률속도-속도관 계식이 적용된다.

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( v_{i,j} + v_{j,i} \right) \tag{9}$$

#### 2.2 강도모델(Strength model)

재료의 항복 및 거동특성 즉, 강도를 묘사하기 위해 식(10)과 같은 응력으로 구성이 되어있는 항 복함수를 사용하게 되는데, 연성재료의 경우 3D 모델에서 식 (11)과 같은 .Von-Mises 항복조건를 빈번히 사용한다.

$$f(\sigma_{ij}) = -J_2 - k^2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - k^2 = 0$$
(10)

$$f(S_{ij}) = \frac{1}{2} S_{ij}S_{ij} - \left(\frac{Y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$$
(11)

$$\Rightarrow S_{ij}S_{ij} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}Y\right)^2 \tag{12}$$

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{n} \left( \frac{-Y}{\sigma_E} \right) = S_{ij} \left( \frac{Y}{\sqrt{-3J_2}} \right)$$
(13)

이는 J<sub>2</sub>가 반경 k인 항복원(Yield Circle)상에 존재하면 재료는 항복하며, 응력이 증가함에 따 라 그 값을 벗어나면 식(13)과 같이 편차응력텐서 를 보정하여 항복조건을 만족시키게 된다. 상기 k값은 유효응력(Equivalent stress, Mises stress)에 의해 결정되어 진다.

여기서, 상첨자(superscript) n은 시간을 의미한다.

2.3 상태방정식(E.O.S., Equation of State)

충격하중과 같은 고압력이 작용하는 재료의 경 우 재료는 단열변화(Adiabatic Conditon)이라 가정 한다 하더라도 온도변화를 수반하게 되고 그에 상태변화(고체-액체-기화)를 수반하게 기인하여 된다. 만약, 탄성영역을 벗어나서 임의의 고압력 에서 발생된 열에 의한 내부에너지가 소성변형에 사용되어 소진된다면(고체상태로 존재한다고 할 경우) 재료의 가공경화현상(working hardening phe -nomena)을 표현해야 하며 , 압축성상태( p+0)의 경우에는 속도구배항의 변수를 구하기 위해 식(3) 과 같은 에너지보존방정식 및 압력과 내부에너 지, 밀도의 관계가 필요하다. 이러한 관계식으로 보편화되어 있는 식(14)와 같은 Mie-Gruneisen Eq -ation of state를 이용하여 압력을 계산하게 된다.

$$P = f(\rho, e) = P_H + \rho \Gamma[e - e_H(\rho)]$$
(14)

여기서, Mie-Gruneisen parameter는 식(15),(16), (17)과 같다.

$$\Gamma \rho = \Gamma_0 \rho_0 \tag{15}$$

$$P_{H} = \frac{\rho_{0}c_{0}^{2}\mu(1+\mu)}{[1-(s-1)\mu]^{2}}$$
(16)

$$e_H = \frac{1}{2} \frac{P_H}{\rho_0} \left( \frac{\mu}{1+\mu} \right) \tag{17}$$

또한, 소성파의 전파속도는 식(18)과 같다.

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right) \tag{18}$$

2.4 명시적 시간적분(Explicit Time Integration)

식(1),(2),(3)과 같은 지배방정식의 시간미분항을 비시간미분항의 값으로 결정한후, 식(19),(20),(21) 과 같이 유한차분법(FDM, Finite Difference Method) 을 적용하여 적분을 수행하는 것을 말한다.

식(19),(20)는 전방차분식(FDE, Finite Difference Equation), 식(21)에는 중앙차분식(CDE, Central Di -fference Equation)이 적용되어 진다. 또한, 식(22)과 같은 구성관계식에도 중앙차분식이 적용되어 진다.

$$\rho^{n+1} = \rho^n + (\Delta t)^n \dot{\rho}$$
<sup>(19)</sup>

$$e^{n+1} = e^n + (\Delta t)^n \dot{e}$$
 (20)

$$v^{n+\frac{1}{2}} = v^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[ (\Delta t)^n + (\Delta t)^{n-1} \right] \dot{v}$$
(21)

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^{n} + 2G\Delta t \left[ \tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \left( -\frac{V}{V} \right) \right]^{n+\frac{1}{2}} + \Delta_{ij}$$
(22)

2.5 시간증분(Time step)

명시적방법은 시간증분에 영향을 크게 받는다. 물리적으로 가능한 속도보다 늦게 이웃한 요소로 변수들이 전파되어 가도록 아주 미소한 시간을 택하게 되면, 변수들의 상호의존성은 무시되어 진다. 즉, 요소상호간에 영향을 무시할수 있는 작 은 시간증분에서는 요소간의 영향을 무시한 운동 방정식을 이용할수 있다. 이러한 미소시간증분이 명시적방법의 단점이지만, 행렬형태로 구성하지 않고 대변형과 비선형 혹은 후탄성거동을 쉽게 모형화 할수있다는 장점이 된다. 시간증분은 식 (22),(23),(24)의 값중 최소값에 안전계수를 고려한 다. 이는 유한차분법에서 시간증분의 크기가 최 소화되어질수록 Exact solution에 대한 오차를 최 소화할수 있기때문이다.

$$\Delta t \leq \frac{d}{c} \quad (23) \qquad \Delta t \leq \frac{1}{\left[4C_Q^2 v_{i,i}\right]} \quad (24)$$
$$\Delta t \leq \frac{d}{\left[4C_L^2 c\right]} \quad (25) \quad ^{(a)}$$

여기서 *d*는 육면체요소(Hexahedral element)의 대각선길이(diagonal length)중 최대값을 의미한다.

#### 2. 시뮬레이션

2.1 해석 모델 Fig 1과 간이 100 × 2

Fig.1과 같이 100 ×200 ×1, 경사각 30°인 경사복 판의 중앙에 L/D=4(D=10)인 관통자가 100m/sec로 경사충돌하는 현상이며,좌우대칭형상이므로, Fig.2 와 같이 Half mesh로 전처리하였다.  $\Delta h$  및  $C_Q$ ,  $C_L$ 의 변경에 따른  $\Delta t$ 에 의한 변수에 대한 영향을 확인하기 위해 Table 1과 같이 기준모델(Case I) 및 해석모델(Case II~V)을 설정하여 시뮬레이션하였으 며, Table 2와 같이 상태방정식. 및 강도모델에 적 용되어지는 물성치 및 계수는 실험과 동일하다.

2.2 변수의 영향 2.2.1 인공점성계수(*C<sub>Q</sub>*, *C<sub>L</sub>*)의 영향







Fig. 2 Predefinition of model

	$h_x$	$h_y$	$h_z$	$C_Q$	$C_L$
Case_I	10.0	18.182	1.0	0.0	0.0
Case_II	10.0	18.182	1.0	2.5	2.5
Case_III	10.0	18.182	1.0	2.5	0.5
Case_IV	10.0	18.182	1.0	0.5	2.5
Case_V	10.0	2.020	1.0	2.5	2.5

Table. 1 Grid space length and viscous term each case

Table. 2 Physical Material Properties and Mie-Gruneisen Parameter





Fig. 3 Pseudo-Viscous Force each case for 0 to 190  $\mu\,\text{sec}$ 



Fig. 4 Pressure due to artificial viscosity value each Case for 0 to 190 µ sec



Fig. 5 Density due to artificial viscosity value each Case for 0 to 190 u sec.





Table 1.과 같이  $C_Q, C_L$ 의 영향을 확인하기 위 해 Δh가 동일한 조건(Case I ~ Case IV)에서 시 간증분의 변화를 확인하여 시간증분에 의한 변수 들의 변화를 확인하였다. 시간증분은 Courant condition 및 viscous term의 영향을 고려하여 Cycle 별 최소값이 고려되므로, Cycle별 시간증분은 수 행시간을 기준으로 Cycle수를 고려하여 판단할수 있다. 190μsec를 기준으로 Case\_I ~IV는 각각 4,580, 21,580, 4,460, 20,000 Cycle임으로 Case\_II에 서 미소시간증분이 반영되어짐을 확인할수 있다. 이에 따라, Fig.4, 5, 6에서와 같이 충격면에서의 수치적발산효과의 감쇄효과로 인하여 압력, 밀도 는 smooth solution이 형성되었으며, 이로인하여 편 차응력속도 및 변형률속도에 의한 편차응력 유효 변형률에 점근해를 형성함으로써 Master의 변형에 너지에 충분히 전달되어짐을 확인할수 있었다. 따 라서, Case II가 최적안으로 고려된다.

#### 2.2.2 격자간격(△h)의 영향

△h의 영향을 확인하기 위해 모델별 적용인공 점성계수가 동일한 조건하에서 Table.1에서와 같 이 Case II와 V의 비교를 통해 각 경우별 시간증 변수들의 영향을 분에 의한 확인하였다. 160 usec 를 기준으로 d의 영향에 기인하여 18,120, 19,230 Cycle로서 Case II에 비해 Case V가 미소 시간증분이 적용됨을 확인할수 있었으며, Fig. 7 과 같이 격자간격의 영향으로 충격면적이 최소화 되어 인공점성력이 Fig.9와 같이 밀도변화가 크 고, 따라서, 압축상태( $v_{i,i}$ <0)에서 Case\_V가 Case II에 비해 큰변형률속도를 나타내어 인공점성 계 수가 0.9 ~2.0 μ sec 에서 큰값을 나타내게 되었으 며, 이는 Fig.8에서와 같이 격자간격의 최소화로 해석영역에서 유동방정식의 불연속부분에서 압력 이 크기 때문에 감쇄에 필요한 효과를 고려해 주 기 위함이다. Fig.10과 같이 내부에너지는 전해석 영역에 대한 값이며, 최초충격압력이 작용하는 격자에서의 응력이 증가함에따라 응력파가 발생 되어 근방격자로 전파되어 되어 가고, 그에 따른 물리량의 특성이 Case II에 비해 Case V에 있어 서 신뢰성을 가지게 됨을 의미한다. 이에 따라 에너지보존의 오차범위가 최소화 되어 Exact Solution에 근접하는 것이다.



Fig. 7 Pseudo-Viscous Force due to grid space length value each Case for 0 to 160 µ sec



t(msec)



Fig. 10 Pressure due to grid space length value each Case for 0 to 160 µ sec

#### 3.실험

3.1 실험장치 및 측정시스템

고속으로 운동하고 변형하는 대상을 실험적으 로 분석하기 위해서는 고도의 실험기술을 사용하 게 되며, 이 실험에는 통상적으로 정적상태의 거 동을 측정하는 기술로는 접근하지 못하는 대상을 취급하게 되어 상당히 고도의 측정기술을 동원해 야 한다. 보통 수만분의 일초 혹은 수십만분의 일 초에서 계측하는 경우가 요구되며, 이러한 찰나의 순간에 발생하는 현상을 포착하고 기록하는 기술 이 필요하다. 또한, 충격하중과 같은 동적하중을 재료내부에 작용시키기 위한 설비가 있어야 한다. 상기와 같이 본 논문에서는 측정장치로서 Osci -lloscope(model:LeCroy 9310A Dual 400MHz) 및 Keyence(model: FS2-65)를 사용하였으며, 동적하중 발생장치로서 Gas-gun을 사용하였다.

3.2 시편

충격시험시 물성치 확인이 가능하며, 마찰저항을 최소화하기 위해 전기아연도금강판(SECC, EI -ectrolytic Zinc Coated Steel sheet, KS D 3528)을 사용 하였으며, 접촉면적 최소화를 고려하기 위해 가능한 L/D=3,4(D=10)인 탄소강봉(SM20CK, Carbon steel rod, KS D 3752)을 사용하였으며, Fig.4와 같다.



Fig. 11 Experiment material snapshot

3.3 실험목적

관통자와 경사복판의 각도에 따른 관통 및 실린 더 압력과의 관계를 도출하여 향후 유사한 실험 시 적용기반자료 및 시뮬레이션에서 관통가능한 초기조건을 확인함에 있다.

#### 3.4 실험결과

관통자속도( $V_{pri}$ ) 및 실린더압력( $P_{cyl}$ )과의 관계는 Fig. 5와 같으며 실린더 압력의 오차범위를 고려하여 linear interpolation을 하였다.



Fig. 5 Experiment material snapshot

SM20CK(L/D=4, mass=24.54g)의 SECC복판(SECC, 경사각 30)에 대한 전후판 완전 관통이 가능한속 도는 대략 100 m/sec이상으로 판단되었다.

4. 결 론

원형단면봉의 경사복판에 대한 관통현상은 최 초 속도가 수십m/sec 혹은 수백m/sec일경우 물리 적으로 회전운동과 병진운동을 하게 된다. 즉, 봉 재에는 비틀림파가 전파가 되며 판재는 전단파가

전파가 된다. 또한, 충격하중이 작용하는 판재는 동적응답을 하게 되며, 동적하중에 기인하여 재 료는 인장과 압축을 반복하게 된다. 즉, 응력의 증가에 기인하여 힘의 평행상태을 만족할수 없게 되어 파의 이동현상이 나타난다. 국부적인 최초 충격면의 유효응력증가에 기인하여 재료는 소성 변형후 극도의 전단변형을 하게되어 관통현상이 발생한다. 충격면의 수치적발산을 피하기 위한 방안으로 인공점성계수가 사용되어진다. 본 논문 의 모델과 같이 좌우 대칭형상의 등방성재료 관 통현상에 있어 라그랑지법에 의한 수치모사에 Erosion model 등을 사용하는 예가 많다. 이것은 재료의 질량이 보존되지 못하는 단점이 된다. 물 리적으로 충격현상은 비례물의 운동에너지가 변 형에너지로 전환되는 것을 말한다. 즉, 에너지보 존의 애로사항이 된다. 하지만, 라그랑지법은 질 량이 보존되며, 체적이 일정한 개념으로 물질좌 표계를 사용한다. 즉 본 논문은 재료의 항복 및 상태방정식에 의존하여 관통현상을 구현하였으 며, 또한, 시간과 공간이 결합되어 있어 지배방 정식의 독립변수는 시간이다. 또한, 라그랑지법에 의한 수치모사에 있어서 각변수들은 시간증분에 크게 영향을 받기 때문에 시간증분에 영향을 미 치는 격자간격 및 점성항들의 영향에 따른 각 변 수들의 영향을 확인 및 분석하였다.

### 참고문헌

(1) Wallace E. Johnson (1987), History and Application of hydrocodes in hypervelocity impact, International Journal of Impact Engineering, Vol.5, pp. 423-439

(2) Charles E. Anderson, Jr. (1987), An overview of the theory of hydrocodes, International Journal of Impact Engineering, Vol.5, pp.33-59

(3) O.C.Zienkiewicz, K.Morgan (1983), Finite Elements and Approximation, University of Wales, Swansea, United Kingdom

(4) Yang, In-young (1995), Impact Engineering

(5) Arthur P. Boresi (1965), Elasticity in Engineering Mechanics, University of Illinois, United States of America

(6) Lubliner, Jacob, Plasticity Theory, University of California at Berkeley, United States of America

(7) Akhtar, S.Khan (1995), Continuum theory of plastics, University of Maryland Batimore country, Maryland, United States of America

(8) Benson, David. J. (1992), Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes, Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.99, pp.235~394

(9) Hughes, Thomas J.R., The Finite Element Method; Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, University of Stanford, United States of America

(10) Abbott, M. M. (1976), Thermodynamics, Resselaer Polytechnic Institute, Unit -ed States of America

(11) Anderson, John D. Jr., Computational Fluid Dynamics, Department of Aero -space Engineering, University of Maryland, United States of America