준해석적 비선형 설계민감도를 위한 개선된 변위하중법

이민욱† · 유정훈* · 이태희**

Augmented Displacement Load Method for Nonlinear Semi-analytical Design Sensitivity Analysis

Min Uk Lee, Jung Hun Yoo and Tae Hee Lee

Key Words : Semi-analytical Design Sensitivity Analysis(준해석 설계민감도해석), Nonlinear Analysis(비선형해석), Commercial Finite Element Package(상용유한요소프로그램), Displacement Load Method(변위하중법), Augmented Displacement Load Method(개선된 변위하중법)

Abstract

Three methods for design sensitivity such as numerical differentiation, analytical method and semi-analytical method have been developed for the last three decades. Although analytical design sensitivity analysis is exact, it is hard to implement for practical design problems. Therefore, numerical method such as finite difference method is widely used to simply obtain the design sensitivity in most cases. The numerical differentiation is sufficiently accurate and reliable for most linear problems. However, it turns out that the numerical differentiation is inefficient and inaccurate because its computational cost depends on the number of design variables and large numerical errors can be included especially in nonlinear design sensitivity analysis. Thus semi-analytical method is more suitable for complicated design problems. Moreover semi-analytical method is easy to be performed in design procedure, which can be coupled with an analysis solver such as commercial finite element package. In this paper, implementation procedure for the semi-analytical design sensitivity analysis outside of the commercial finite element package is studied and computational technique is proposed, which evaluates the pseudo-load for design sensitivity analysis easily by using the design variation of corresponding internal nodal forces. Errors in semi-analytical design sensitivity analysis are examined and numerical examples are illustrated to confirm the reduction of numerical error considerably.

기호설명

g	: 응답함수
$\mathbf{K}_T$	: 접선 강성행렬
$\mathbf{K}_L$	: 선형 강성행렬
$\mathbf{Q}$	: 내력벡터
$\mathbf{Q}_L$	: 힘하중에 의한 내력벡터
$\mathbf{Q}_D$	: 변위하중에 의한 내력벡터
$\mathbf{F}$	: 외력벡터
b	: 설계변수
$\boldsymbol{\sigma}$	: 응력
$\mathbf{D}$	: 구성행렬
$\mathbf{B}$	: 변위-변형률 관계행렬
$\mathbf{u}$	: 변위벡터
$\mathbf{U}$	: 최종 변위벡터

† 한양대학교 대학원 기계설계학과
* 한양대학교 대학원 기계설계학과
**책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : thlee@hanyang.ac.kr
TEL : (02)2299-0449

1. 서 론

설계민감도해석은 최적설계, 신뢰성 설계, 주요

설계변수 선정과정 등에 폭 넓게 이용되고 있다. 설계민감도는 설계자에게 설계방향의 정보를 제공하며 설계자는 이를 통하여 체계적으로 설계개선을 수행할 수 있다.

실제 설계문제에서 설계민감도해석의 효용성은 빠르고 정확하게 효율적으로 설계민감도해석을 수행하는 데 있다. 최근 응답해석이 점차 복잡해지고 많은 해석시간을 요구하는 시점에서 효율적인 설계민감도해석 기법은 필수적이다. 이산계의 준해석 설계민감도해석 기법은 실제 설계문제에 응용 가능한 설계민감도해석을 위하여 많은 연구가 이루어져 왔으며 현재도 활발이 연구되고 있다.

유한요소해석은 시스템의 응답특성을 제공하나 설계개선을 위한 설계민감도 정보는 제공하지 않는다. 유한요소의 형상함수를 이용하면 해석적인 방법으로 민감도를 구할 수 있으나 상용유한요소 프로그램은 형상함수를 제공하지 않는다. 따라서 상용유한요소 해석프로그램과 연동하여 실제적인 설계민감도해석을 프로그램의 외부에서 수행하는 기법연구가 필요하다.

Haftka 와 Adelman 은 1980 년대 후반까지의 이산시스템의 설계민감도해석과 관련된 연구결과를 정리 발표하였다.(1~2) Van Keulen 과 Haftka 는 2000 년까지의 구조문제에 대한 설계민감도해석 연구를 정리 발표 하였다.(3) Ryu 등은 이산계의 비선형 설계민감도해석에 대하여 연구하였으며 Wu 와 Arora 는 준해석 방법론으로 비선형 설계민감도해석을 수행하였다.(4~5) 최근에는 준해석 설계민감도해석의 오차와 정확성에 대한 연구가 많이 이루어 지고 있다. Van Keulen 과 de Boer 는 강체이동에 대하여 해석적 미분을 이용하여 준해석 설계민감도해석의 정확성을 향상시켰다.(6~7) 김현기, 조맹효는 강체모드분리와 뉴만급수를 이용하여 준해석 설계민감도해석의 정확성을 향상시켰다.(8) 유한요소 해석프로그램인 ANSYS 또는 AIDINA 와 연동하는 설계민감도해석 기법에 대한 연구도 있다.(9~10) Zhang 과 Domaszewski 는 국한된 요소와 설계변수에 대하여 설계민감도해석이 가능한 ABAQUS 의 설계민감도해석 모듈을 개발하였다.(11) Lee 등은 준해석 설계민감도해석을 상용 유한요소프로그램에서 실제적으로 적용할 수 있는 변위하중법을 제안하였다.(12)

본 논문에서는 Lee 등이 제안한 준해석 설계민감도해석 과정에서 가상하중 등의 편미분항을 구하는 변위하중법에 대하여 알아본다. 변위하중법은 선형해석이나 비선형 해석의 반복과정에서 해의 정확한 수렴이 보장되는 요소에서는 변위하중법의 사용이 가능하였지만 비선형해석의 수치적인 오차로 인하여 대부분의 요소에서 가상하중의 정확한 계산이 불가능 하였다. 본 연구에서는 이러한 수치적인 제약 사항을 보완할 수 있는 개선된 변위하중법을 제안한다. 마지막으로 예제를 통하여 제안된 방법의 정확성을 검증하였다.

2. 설계민감도해석

2.1 정적 설계민감도해석

구조해석 문제에서 응답함수 및 응답의 설계민감도는 다음과 같이 정의한다.

$$g = g(\mathbf{U}, b) \tag{1}$$

$$\frac{dg}{db} = \frac{\partial g}{\partial b} + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{U}}\frac{d\mathbf{U}}{db} \tag{2}$$

따라서 변위설계민감도($d\mathbf{U}/db$)와 설계변수 및 변위에 대한 응답함수의 편미분을 구하면 설계민감도를 구할 수 있다. 이산계에서 구조물의 정적 해석문제는 식 (3)과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \tag{3}$$

식 (3)을 설계변수에 대하여 미분하면 다음의 설계민감도식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{U})\frac{d\mathbf{U}}{db} = -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b} \tag{4}$$

식 (4)를 풀면 변위의 설계민감도를 구할 수 있다. 여기서 우변을 가상하중(pseudo load)이라고 부른다. 선형 해석일 경우 강성행렬은 변위에 대하여 선형이다. 즉, $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L$ 이 된다. 식 (4)와 같이 변위에 대한 정적 설계민감도해석은 선형해석으로 표현되며 $\mathbf{K}_T$ 는 해석과정에서 구할 수 있기 때문에 설계민감도 해석을 수행하기 위해서 가장 중요한 문제는 설계민감도해석의 하중으로 표현되는 가상하중의 계산이다.

2.2 준해석 설계민감도해석

준해석 방법은 식 (4)와 같은 해석적인 설계민감도식에서 미분으로 표현되는 가상하중을 유한차분법으로 구하는 해석적 방법과 수치적 방법의 혼합적인 방법이다. 준해석 방법은 특히 유한차분법에 비하여 계산상의 효율이 뛰어나 실제 문제에

유용하게 사용될 수 있다. 식 (4)과 같이 설계민감도해석은 선형해석으로 표현되기 때문에 특히 비선형 해석문제의 경우 비선형해석을 반복해야 하는 유한차분법과 비교하여 계산이 효율적이다. 일단 가상하중을 구하면 식 (5)와 같이 설계민감도해석은 다수의 설계변수에 대해서 이미 수행된 해석정보를 이용하여 쉽게 구현된다.

$$\frac{d\mathbf{U}}{db_i} = \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^{-1}\left(-\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b_i}\right) \tag{5}$$

가상하중은 식 (6)와 같은 유한차분법으로 계산할 수 있다. 식 (6)은 편미분 특성상 유한요소모델의 각 요소에 개별적으로 적용할 수 있다. 결국 각 설계변수에 대한 가상하중을 구하기 위하여 설계변수 개수만큼의 해석이 필요하지 않다. 유한요소 모델에서 설계변수로 선정된 각 요소의 설계변수를 동시에 모두 섭동시킨 후 해석하고 각 요소별로 내력의 차분을 계산하면 된다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial b} \cong \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{U}(b), b+\Delta b) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}(b), b)}{\Delta b} \tag{6}$$

준해석 설계민감도해석의 가상하중 계산 및 설계민감도해석을 위한 유한차분법은 전방차분법을 이용하였다. 중앙차분법이 정확성에서 우수하긴 하지만 이 방법을 이용할 경우 설계민감도해석 과정에서 유한요소 해석의 횟수가 증가하기 때문에 해석시간이 긴 실제 문제에서는 전방차분법을 많이 사용한다. 특히 유한차분법을 이용한 설계민감도의 경우 해석횟수가 설계변수에 비례하여 늘어나기 때문에 계산의 효율이 떨어진다. 본 연구에서는 준해석 설계민감도해석과 유한차분법에 의한 설계민감도해석을 동일하게 전방차분법을 이용하였다.

2.3 개선된 변위하중법

상용 유한요소 프로그램과 연동하여 준해석 설계민감도해석을 수행하기 위해서는 가상하중 등의 편미분항을 수치적으로 구해야 한다. 일반적인 유한차분법을 이용하여 가상하중을 근사화 하는 것은 상태변수인 변위의 변화를 포함하기 때문에 식 (7)과 같은 전미분의 의미를 가진다.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{db} \cong \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{U}(b+\Delta b), b+\Delta b) - \mathbf{Q}(\mathbf{U}(b), b)}{\Delta b} \tag{7}$$

따라서 가상하중을 계산하기 위해서는 식(6)의 $\mathbf{Q}(\mathbf{U}(b), b+\Delta b)$ 를 구하는 것이 중요하다. $\mathbf{Q}(\mathbf{U}(b), b+\Delta b)$ 를 구하기 위해 원모델의 모든 절점의 변위결과를 설계변수를 섭동 시킨 모델의 경계조건으로 적용하여 해석한다. 이와 같은 과정을 변위하중법[12]이라 하며, Fig. 1 (a) 에 나타내었다. Fig. 1 에서 주어진 하중조건의 비선형 유한요소해석의 내력과 변위하중에 의한 내력을 각각 $\mathbf{Q}_L$, $\mathbf{Q}_D$ 이라 하겠다.

변위하중법을 비선형해석에 적용하는 경우 가상하중의 계산을 정확하게 하기 위해서는 주어진 하중조건의 비선형 유한요소해석의 내력과 변위하중에 의한 내력이 정확히 일치해야 한다. 물론 두 내력값은 해석적으로는 같은 값을 가진다. 하지만 비선형해석의 경우 각각의 방법으로 구한 내력은 수치적으로 정확히 일치하지는 않는다. 기존의 변위하중법을 이용한 연구에서는 내력의 수렴성이 좋은 일부 요소에 대해서만 제한적으로 비선형 설계민감도해석을 수행할 수 있었다. 이에 따른 대안으로 원모델의 변위결과를 원모델에 변위하중으로 가해주고 얻은 내력값을 가상하중 계산에 사용한다. 이와 같은 과정은 Fig. 1 (b) 에 나타나있다. 이러한 방법을 사용하면 내력의 수렴성이 좋지 않은 요소에서도 수치적으로 안정된 내력의 편미분 값을 구할 수 있다.

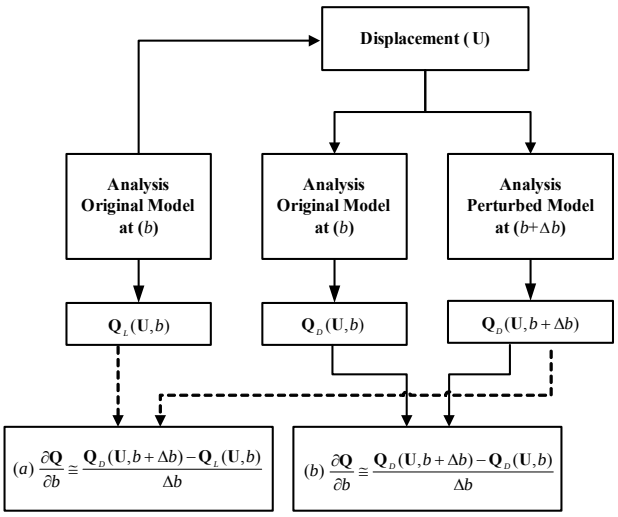

Fig. 1 Computational procedure to compute partial derivatives of internal nodal force : (a) Displacement load method (b) Augumented displacement load method

3. 예 제

본 연구에서는 간단한 평판 쉘 구조물, 곡면 쉘 구조물에 대한 비선형 구조해석과 이에따른 변위 설계민감도해석을 수행하였다. 개선된 변위하중법을 이용하는 준해석 설계민감도해석을 수행하였으며 연동하는 상용 유한요소프로그램은 ANSYS를 사용하였다. 그리고 준해석 설계민감도해석 결과는 유한차분법에 의한 설계민감도와 오차를 비교하여 정확성을 검증하였다.

본 논문 예제의 수행에서 유한차분법의 섭동량을 선정하는 뚜렷한 수학적 기준은 사용되지 않았다. 하지만 계속적인 준해석 설계민감도해석의 연구를 통해서 경험적으로 알맞은 섭동량을 선정하였다. 일반적인 상용 유한요소프로그램은 사용자에게 각종 응답 및 물성치에 대하여 유효자리 6~7 개 정도를 제공한다. 본 연구에서는 유한요소프로그램의 결과 파일을 사용하여 수치적 미분을 위해 사용되는 값들의 유효자리를 15 개까지 제공하였다. 이 경우 설계민감도해석에서 섭동량을 10^{-8}(%)보다 작게 하면 라운드오프 에러가 일어날 수 있고 설계민감도 값 자체의 적당한 유효자리를 확보하기 어렵다. 또한 유한요소 해석의 종류와 모델에 따라 차이를 보이지만 섭동량의 크기가 10^{-3}(%)~10^{-7}(%)인 구간에서 수치적 미분값이 안정적으로 나타났다. 따라서 섭동량은 설계민감도 값의 유효자리를 확보하고 신뢰성 있는 수치적 미분을 위하여 안정적 섭동량 구간의 중간 값인 10^{-5}(%)를 사용하였다. 설계민감도해석 결과의 오차는 식 (7)와 같이 유한차분법의 설계민감도에 대한 상대오차로 계산하였다.

$$Error(\%) = \frac{|\Delta g/\Delta b - dg/db|}{dg/db} \qquad (7)$$

여기서, $\Delta g/\Delta b$ 는 전방차분법에 의한 설계민감도이며, dg/db 는 준해석 설계민감도이다.

3.1 변위하중법과 개선된 변위하중법의 비교

기존의 변위하중법과 개선된 변위하중법을 사용한 설계민감도해석의 차이점과 개선사항을 다음의 예제를 통하여 확인한다. 설계변수에 섭동을 주지 않은 요소의 가상하중은 0 이어야 하며, 설계변수에 섭동을 가한 요소의 가상하중은 설계민감도해석에서 정확한 결과를 얻을 수 있는 값이어야 한다. 이를 검증하기 위해 다음 Fig. 3 과 같은 판 모델의 비선형 변위민감도해석을 고려해 보았다. 모델은 상용유한요소해석 프로그램 ANSYS의 Shell63 요소를 사용하였고 물성치는 Table 1 에 나타나 있다. 설계변수는 우측 자유단에 위치한 요소의 두께이다. 기존의 변위하중법과 개선된 변위하중법으로 구한 가상하중의 정확도를 비교해보았다. 각각의 방법으로 구한 가상하중으로 설계민감도해석을 수행한후 유한차분법으로 구한 설계민감도 값과 비교한다.

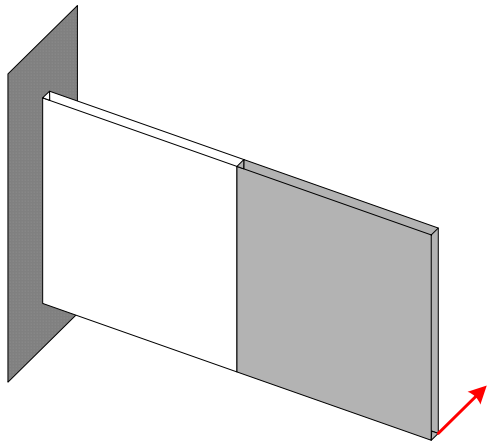

Fig. 2 Finite element model of a simple nonlinear shell structure

Table 1 Material properties and design variable of a simple shell structure

Length of side (mm)	200
Load (N)	2
Young's modulus (GPa)	210
Poisson's ratio	0.3
Design variable (thickness, mm)	1
Perturbation (%)	0.00001

Table 2 는 Fig. 2 에서 중앙 하단 절점의 설계변수가 아닌 요소의 내력값과 가상하중값을 나타낸다. 설계변수를 섭동하지 않은 요소에서의 가상하중은 이론적으로 0 이어야 한다. 그러나 기존의 변위하중법으로 계산한 내력차이는 Table 2 에서 보는것 처럼 0 이 아님을 알 수 있다. 이것은 두 해석 방법의 정확도에 차이가 있음을 보여준다. 개선된 변위하중법을 이용하여 가상하중을 구하면 Table 3 에서 보는것 처럼 정확히 0 이 되는 것을 볼 수 있다. 이것으로 해석과정에서 발생하는 작은 내력의 오차가 위와 같이 설계민감도 가상하중을 구하는 과정에서 커질 수 있음을 알 수 있다.

Table 2 Internal forces and pseudo-load with displacement load method at the no-perturbed element

	$Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)$	$Q_L(\mathbf{U},b)$	$(Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)-Q_L(\mathbf{U},b)/\Delta b)$
Qx	-7.02173E+03	-6.74850E+03	-2.73238E+09
Qy	-9.63027E+05	-9.62760E+05	-2.66901E+09
Qz	-2.01189E+06	-2.01108E+06	-8.09343E+09
Qyz	1.10581E+07	1.13131E+07	-2.55030E+12
Qzx	1.05598E+08	1.05616E+08	-1.81162E+11
Qxy	1.30113E+05	1.00690E+05	2.94236E+11

Table 3 Internal forces and pseudo-load with displacement load method at the no-perturbed element

	$Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)$	$Q_D(\mathbf{U},b)$	$(Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)-Q_D(\mathbf{U},b))/\Delta b$
Qx	-7.02173E+03	-7.02173E+03	**0.00000E+00**
Qy	-9.63027E+05	-9.63027E+05	**0.00000E+00**
Qz	-2.01189E+06	-2.01189E+06	**0.00000E+00**
Qyz	1.10581E+07	1.10581E+07	**0.00000E+00**
Qzx	1.05598E+08	1.05598E+08	**0.00000E+00**
Qxy	1.30113E+05	1.30113E+05	**0.00000E+00**

설계변수를 섭동한 요소에서 두 방법을 이용하여 구한 가상하중값 중 어떤 값이 정확한지 검증해보려면 다음 Table 4, Table 5 와 같이 각각의 방법으로 구한 가상하중으로 설계민감도해석을 수행한 후 유한차분법으로 구한 설계민감도와의 상대오차를 비교해 본다.

Table 4 Internal forces and pseudo-load with displacement load method at the perturbed element

	$Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)$	$Q_L(\mathbf{U},b)$	$(Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)-Q_L(\mathbf{U},b))/\Delta b$
Qx	6.00763E+03	6.74803E+03	-7.40401E+09
Qy	9.63484E+05	9.62758E+05	7.25987E+09
Qz	2.01007E+06	2.01108E+06	-1.01264E+10
Qyz	-1.15677E+07	-1.13131E+07	-2.54594E+12
Qzx	-1.05568E+08	-1.05616E+08	4.76052E+11
Qxy	-2.32201E+04	-1.00687E+05	7.74671E+11

Table 5 Internal forces and pseudo-load with displacement load method at the perturbed element

	$Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)$	$Q_D(\mathbf{U},b)$	$(Q_D(\mathbf{U},b+\Delta b)-Q_D(\mathbf{U},b))/\Delta b$
Qx	6.00763E+03	6.00763E+03	8.60119E+04
Qy	9.63484E+05	9.63483E+05	9.50326E+05
Qz	2.01007E+06	2.01007E+06	6.02216E+06
Qyz	1.15677E+07	-1.15677E+07	-3.47048E+07
Qzx	-1.05568E+08	-1.05568E+08	-3.16705E+08
Qxy	-2.32201E+04	-2.32201E+04	-1.57617E+05

Table 6 Comparison of tip displacement sensitivities obtained by displacement load method and augmented displacement load methods

	Sen. : FDM	Sen. : DLM	Error(%)
Ux	-2.94191E-04	-3.37163E-04	**-1.46068E+01**
Uy	-3.72751E-05	-3.19978E-05	**1.41579E+01**
Uz	-3.26806E-02	-3.77399E-02	**-1.54811E+01**
ROTx	-3.12514E-03	-8.32997E+01	**-2.66537E+06**
ROTy	1.58939E-03	2.26765E+01	**-1.42664E+06**
ROTz	1.51758E-02	1.76283E+00	**-1.15160E+04**
	Sen. : FDM	Augmented DLM	Error(%)
Ux	-2.94191E-04	-2.93405E-04	**2.67386E-01**
Uy	-3.72751E-05	-3.70787E-05	**5.26954E-01**
Uz	-3.26806E-02	-3.25533E-02	**3.89499E-01**
ROTx	-3.12514E-03	-3.07136E-03	**1.72092E+00**
ROTy	1.58939E-03	1.56047E-03	**1.81971E+00**
ROTz	1.51758E-02	1.50321E-02	**9.47145E-01**

DLM : Displacement load method

위의 Table 6 은 평판의 중앙 하단 절점에서 변위하중법과 개선된 변위하중법으로 구한 각각의 변위설계민감도 값을 유한차분법과 비교한 것으로 본 연구에서 제안한 개선된 변위하중법에 의한 설계민감도해석이 신뢰할 만한 결과임을 알 수 있다.

3.2 곡면 쉘 구조물

본 예제에서는 본 연구에서 제안된 준해석적 비선형 설계민감도해석방법의 정확도와 효율성을 검증하기 위해 다음 Fig. 3 과 같은 곡면 쉘 구조물의 민감도를 고려한다. 설계변수는 요소의 두께이며 기하비선형 해석을 수행하였다. 모델에 사용된 요소는 Shell63 이며, 모델의 제원은 Table7 와 같다. Table 8 은 변위하중법과 개선된 변위하중법으로 구한 각각의 변위설계민감도 값을 유한차분법과 비교한 것으로, 이 예제에서는 회전 변위민감도의 정확도가 뚜렷하게 향상됨을 볼 수 있다.

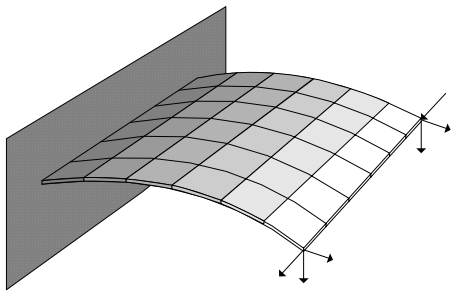

Fig. 3 Finite element model and deformed shape of nonlinear curved shell

Table 7 Material properties and design variable of a simple shell structure

Length of side (mm)	100
Load (N)	10
Young's modulus (GPa)	210
Poisson's ratio	0.3
Design variable (thickness, mm)	1
Perturbation (%)	0.00001

Table 8 Comparison of tip displacement sensitivities for geometrical nonlinear curved shell computed by the developed methods with those computed by finite difference method

	Sen. : FDM	Sen. : DLM	Error(%)
U_x	-1.35418E-01	-1.35418E-01	6.00000E-05
U_y	4.93623E-01	4.93623E-01	6.30000E-05
Uz	-1.17644E-03	-1.17634E-03	8.02500E-03
ROT_x	4.85863E-04	5.75051E-01	**1.18260E+05**
ROT_y	1.43954E-04	-2.25191E+00	**1.56440E+06**
ROT_z	2.33253E-02	2.91752E-02	**2.50790E+01**
	Sen. : FDM	Modified DLM	Error(%)
U_x	-1.35418E-01	-1.35418E-01	2.40000E-05
U_y	4.93623E-01	4.93623E-01	3.20000E-05
Uz	-1.17644E-03	-1.17645E-03	1.26500E-03
ROT_x	4.85863E-04	4.84645E-04	**2.50700E-01**
ROT_y	1.43954E-04	1.46647E-04	**1.87120E+00**
ROT_z	2.33253E-02	2.33253E-02	**4.70000E-05**

4. 결 론

준해석 설계민감도기법은 정확성과 효율성을 만족하면서 실제 설계문제에 적용하기 알맞은 방법이다. 준해석 설계민감도기법을 상용유한요소해석 프로그램에 적용하기 위해서는 민감도식에서 나타나는 편미분항을 수치적으로 엄밀하게 구현하여야 한다. 이를 위해 변위하중법이 제안되었다. 하지만 기존의 변위하중법은 비선형 해석의 경우 정확한 가상하중을 구할 수 없었다. 이러한 현상은 비선형 해석의 수렴성이 좋지 않은 요소의 해석에서 심각하게 나타난다. 따라서 본 연구에서는 개선된 변위하중법을 제안하여 가상하중 계산의 정확도를 향상시켰다. 그리고 비선형 구조문제의 변위 설계민감도해석을 수행하여 변위하중법과 개선된 변위하중법 이용한 준해석 설계민감도해석의 정확성을 비교하여 우수성을 보였다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술연구센터의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Haftka, R. T. and Adelman, H. M., 1986, "Sensitivity Analysis for Discrete Structural Systems," *AIAA J*, Vol. 24, pp. 823 ~ 832.
(2) Haftka, R. T. and Adelman, H. M., 1989, "Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis," *Structural Optimization*, pp. 137 ~ 151.
(3) Van Keulen, F, Haftka,R. T. and Qu, X-Y, 2000, " Review of Option for Structural Sensitivity Calculations," AIAA-00-1351, pp. 1~14.
(4) Ryu, Y. S., Hapipian, M., Wu, C. C., and Arora, J. S., 1985, "Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response," *Computers & Structures*, Vol. 21. No. 1/2, pp. 245~255.
(5) Wu, C. C., and Arora, J. S., 1987, "Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structural Response Using Incremental Procedure," *AIAA J*, Vol. 25, No. 8, pp. 1118~1125.
(6) Van Keulen, F. and de Boer, H., 1998, "Rigorous Improvement of Semi-Analytical Design Sensitivities by Exact Differentiation of Rigid Body Motion," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 42, pp. 71~91.
(7) Van Keulen, F. and de Boer, H., 2000, "Refine Semi-analytical Design Sensitivities," *Int. J. Solids and Structures* Vol. 37, pp. 6961-6980.
(8) Kim, H. and Cho, M., 2001, "A Refined Semi-Analytic Sensitivity Study Based on the Mode Decomposition and Neumann Series Expansion (Ⅰ)," *Transactions of the KSME, A.,* Vol. 27, No. 4, pp.585~592.
(9) Choi, K.K., Santos, J.T.L, and Frederick, M.C., 1987, Implementation of Design Sensitivity Analysis with Existing Finite Element Codes," *ASME Journal of Mechanism, Transmissions, Automation in Design*, Vol. 109, pp. 385-391.
(10) Arora, J.S. and Cardoso, J.E.B., 1989, "A Design Sensitivity Analysis Principle and Its Implementation into ADINA," *Computers & Structures*, Vol. 32, pp. 691-705.
(11) Zhang, W.H. and Domaszewski, M., 1998, "Recent Developments of Sizing Optimization with ABAQUS Code," *AIAA-98-4710*, pp. 190-197.
(12) T. Lee, J. Yoo and M. Lee, 2004, "Refined Semi-analytical Design Sensitivity Analysis with Commercial Finite Element Package", AIAA-2004-4534