

K0

An Effective Stress Based Constitutive Model on the Behavior under K_0 Condition

¹⁾, Seboong Oh, ²⁾, Wook Kim, ²⁾, Hui-Beom Park

¹⁾ , Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Yeungnam Univ.

²⁾ , Graduate Student, Dept. of Civil Engineering, Yeungnam Univ.

개요(SYNOPSIS) : A constitutive model was proposed in order to model dilatancy under K_0 conditions. The model includes an anisotropic hardening rule with bounding surface and hypothetical peak stress ratio and dilatancy function which are dependent on a state parameter. The triaxial stress-strain relationship under K_0 conditions was calculated reasonably by the proposed model. In particular the model could consistently predict dilatancy in volume change, softening with peak strength and small strain behavior.

주요어(Key words) : anisotropic hardening rule, stress-strain relationship, dilatancy, softening, K_0 condition

1. 서론

풍화토나 사질토의 경우에 등방압축시 거동과 상이하게 나타나는 K_0 압축후 거동에 대한 합리적인 구성모델이 필요하다. 이러한 거동의 특징으로는 (1) 구속압과 응력경로에 따른 강도의 변화를 나타내고 (2) 미소변형률 영역의 거동도 역시 비선형적이며 (3) 초기조건에 따라 취성과 연성이 잠재되어 있을 뿐 아니라 (4) 체적의 팽창과 압축이 모두 가능하다는 것이다.

흙의 구성모델과 관련된 현대 탄소성론은 많은 부분 고전 이론을 포기하고 있으며 흙의 다양한 거동 엄밀하게 모델할 수 있는 복잡한 모델들이 개발되고 있다 (Pestana-Nascimento 1994, Arulanadarajah and Dafalias 1986). 또한 정설이 부재할 정도로 견해가 분분하지만 다음과 같은 관점은 공유한다고 판단된다.

- ① 항복면은 탄성과 소성 거동의 뚜렷한 경계 역할을 하지 않는다. 단지 수학적 전개과정에 필요한 하나의 포텐셜 함수이며, 극단적으로는 정의하지 않을 수 있다. 또는 명확하고 실제적인 정의가 중요하지 않을 수 있다. 다만 기하학적인 개념을 제공하는 데는 유의미하다.
- ② 경계면 이론에서 적용하는 개념은 편리하다. 이러한 비등방 경화규칙은 흙의 전반적인 거동을 모델하는 데 유리하다.
- ③ 유동규칙은 또 하나의 포텐셜 함수를 의미한다. 따라서 포텐셜 함수 자체보다는 그 도함수가 필요하다. 통상적으로 포텐셜 함수를 직접 정의하지 않는다.
- ④ 파괴규칙은 침투강도 및 잔류강도를 나타내는 기준을 구분한다. 특히 침투강도와 관련된 경계면은 간극비 변화에 따라 의존하며, 연성거동과 취성거동이 혼재한 흙의 거동을 동시에 모델하는 역할을 한다.

따라서 이러한 개념을 토대로 한 실용적인 탄소성 구성모델을 제안하고 실험결과와 비교하였다.

2. 사질토의 비등방경화 구성모델

제안된 모델은 (1) 경계면 모델의 개념을 포함하고 (2) K_0 압축후 전단거동을 모델할 수 있고 (3) 미소변형률 영역의 거동을 포함하며 (4) 축차응력-변형률 관계에서 나타나는 취성 및 연성을 표현하고 (5) 체적변형률의 압축과 팽창을 모델할 수 있다. 편의상 GK0모델이라고 명명하였으며 비등방경화규칙은 일반등방경화규칙을 적용하였다. 이로 인하여 GK0 모델은 Li와 Dafalias (2000) 모델과 경화규칙이 상이하며 K_0 압축후 전단거동을 모델하는데 적합하다.

항복면의 형태는 그림 1과 같이 콘 형상으로 체적응력에 비례하여 항복면의 크기가 증가하며 면에서는 원형을 나타낸다. 그러나 콘 형상은 항복면의 가상적인 형태를 기하학적으로 설명하는데 필요할 뿐이며 실제 체적응력에 대한 도함수를 가지지는 않는다. 항복면은 원형으로 단순한 형태이지만, 항복면의 중심 위치가 자유로워서 소성유동이 일어나기 편리하다. 따라서 항복면은 식 (1)₁과 같이 나타난다. 식 (1)₂에서는 응력불변수를 이용하여 단순화하였다.

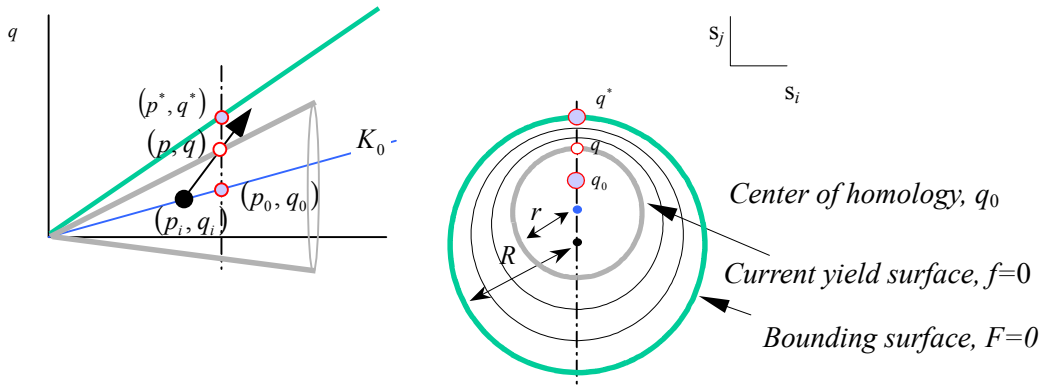


그림 1 제안된 모델의 항복면과 경계면

$$f = \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}r^2 = 0, \quad f = (q - \alpha)^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$

여기서 $\boldsymbol{\sigma} = p\mathbf{1} + \mathbf{s}$ Cauchy 응력 텐서, $p = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$ 체적응력 불변수
 \mathbf{s} 축차응력 텐서, $\mathbf{1}$ Kronecker delta
 $\boldsymbol{\alpha}$ 항복면 중심응력 텐서, r 항복면 반경
 $q = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathbf{s}\|$ 축차응력 불변수, $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\alpha}\|$ 항복면 중심응력 불변수

취성을 나타내는 흙의 강도를 표현하기 위하여 2가지 파괴규준이 필요하다. 한계상태선은 잔류강도를 의미하며 경계면은 첨두강도를 표현하기 위하여 간극비에 따라 변화한다. 한계상태 강도는 $q = Mp$ 로 정의한다. 경계면은 다음 식으로 정의한다.

$$F = \|\mathbf{s}^*\|^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}R^2 = 0, \quad F = q^{*2} - R^2 = 0, \quad R = M^*p \quad (2)$$

여기서 \mathbf{s}^* 동일 체적응력에 대하여 경계면으로의 사상된 축차응력 텐서, R 경계면 반경,

$q^* = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\mathbf{s}^*\|$ 사상된 축차응력 불변수, M^* 가상 첨두응력비

가상 첨두응력비 M^* 는 첨두강도를 나타내는 변수로 가상적 첨두 축차응력과 체적응력의 비를 나타낸다. 이를 이용하여 취성이 나타나는 상태에서는 연화거동(softening)을 모델하고 연성 상태에서는 경화거동(hardening)을 나타내며 최종상태에서는 한계상태 잔류강도를 모델한다. 이를 위하여 다음과 같이

정의된다 (Li and Dafalias, 2000).

$$M^* = M e^{-n\psi}, \quad \psi = e - e_{cr}, \quad (3)$$

여기서 n 은 계수이며, 그리고 e_{cr} 은 한계상태 간극비이며 체적응력 p 에 의존한다.

$$e_{cr} = \lambda p^{-l} \quad (4)$$

λ 와 l 은 한계상태 간극비를 조절하는 계수이다.

ψ 는 그림 2와 같이 현재 간극비와 한계상태 간극비와의 상대위치를 정의하는 상태변수이다. $\psi < 0$ 이면 취성적인 거동을 나타내며 $M^* > M$ 이고, $\psi > 0$ 이면 연성적인 거동을 보이며 $M^* < M$ 는 보다 작다. $\psi = 0$ 이면 한계상태에 도달하며 는 $M^* = M$ 이다.

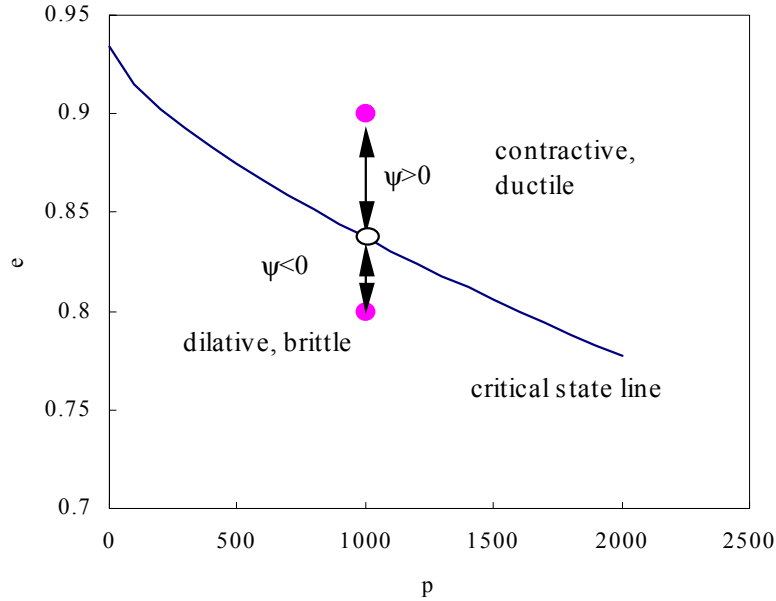


그림 2 한계상태 간극비

그림 3에서 보여지듯이 $\eta \equiv q/p$ 와 ψ 축에서 나타나는 모델경로는 상태변수 $\psi < 0$ 이면 η 가 증가함에 따라 ψ 는 증가하며 0에 접근하여 한계상태에 도달한다. 반면 초기에 $\psi > 0$ 이면 η 가 증가함에 따라 ψ 는 감소하며 한계상태에 도달한다. 각각에 대하여 η 는 서서히 M^* 에 접근하며 최종적으로 한계상태에 도달한다. 이 때 식 (3)에 나타나는 M^* 는 한계상태에 접근하는 부분에서 여러 실험경로들이 접근하는 대표 곡선으로 유일하게 결정한다.

유동규칙 (flow rule)은 다음 식으로 정의한다.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \left(\frac{1}{3} D\mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} \right) \quad (5)$$

여기서 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p \mathbf{1} + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \mathbf{n}$

소성변형률 증분텐서

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p = \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p)$$

소성 체적변형률 불변수

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \frac{1}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v^p \mathbf{1} \right\|$$

소성 축차변형률 불변수

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{s} - \mathbf{a}\|}$$

소성축차변형률의 방향 단위텐서

$$D \equiv \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_v^p}{\dot{\bar{\epsilon}}^p}$$

팽창율(dilatancy)

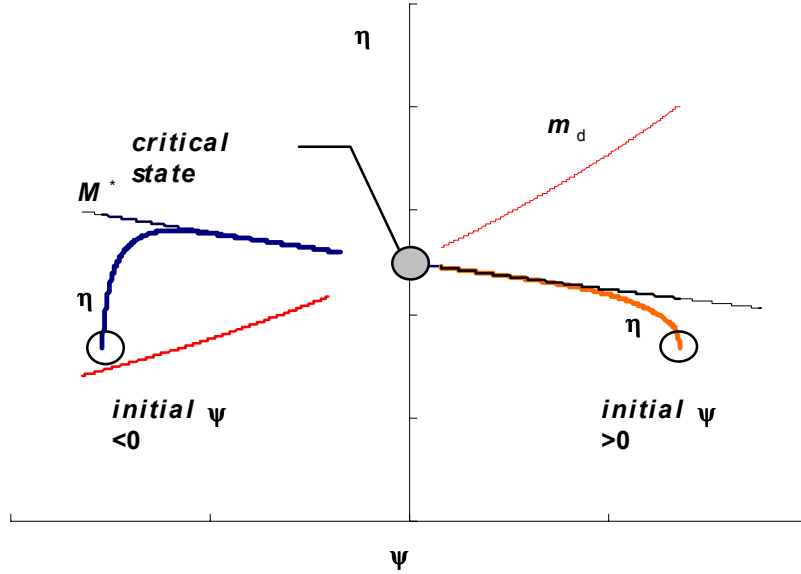


그림 3 ψ 에 따른 M^* 와 m_d

팽창율(dilatancy)은 소성 체적변형률과 축차변형률의 증분 비율을 나타내는 것으로 다음과 같이 정의된다 (Li and Dafalias 2000).

$$D = \frac{d_0}{M} (m_d - \eta), \quad m_d = M e^{m\psi} \quad (6)$$

이 때 d_0 와 m 은 팽창율을 조절하는 계수이다.

식 (6)에서 보여지듯이 $\eta < m_d$ 이면 소성 체적변형률이 압축이 일어나고, $\eta > m_d$ 이면 팽창이 일어난다. 그림 3과 같이 η - ψ 축에서 나타나는 경로에서 상태변수 ψ 가 초기에 0보다 작을 때, η 가 증가함에 따라 ψ 가 초기에는 다소 감소하다가 다시 증가하는 데 이러한 전환부를 지나도록 m_d 를 결정한다.

경화규칙 (hardening rule)은 다음과 같다(오세봉 등 2000).

$$\bar{\epsilon}^p = a \frac{(r/R)^b}{(1-r/R)^c} \quad (7)$$

$\bar{\epsilon}^p$ 는 단순재하(monotonic loading) 구간내에서 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ 를 적분한 양이며 a, b, c 는 소성 축차변형률과 관련된 계수이다.

그림 4에서는 소성 축차변형률에 따른 항복면의 반경 r 과 경계면의 반경 R 의 변화를 보여준다. 변형률이 증가함에 따라 r 는 서서히 R 에 접근하여 변형률 수준이 높은 경우에는 거의 일치하는 경향을 나타낸다. 이는 경화함수 식 (7)에 의하여 항복면이 경계면에 접근하는 과정을 의미한다. 초기에 $\psi < 0$ 이면 축차변형률이 증가함에 따라 R 과 r 은 침투값을 나타내며 그 이후 서서히 감소한다. 초기에 $\psi > 0$ 이면 R 과 r 은 서서히 증가하는 양상을 나타낸다. K0압축 삼축시험시 경로에서도 초기 항복면은 한 점이므로 그 크기는 0에서 시작한다.

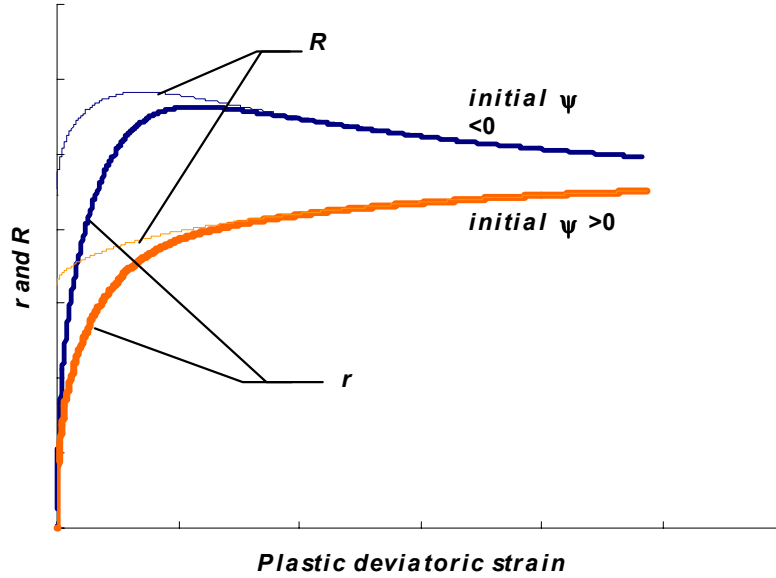


그림 4 소성 축차변형률에 따른 항복면과 경계면의 반경

위와 같은 경우에 축차변형률이 증가함에 따라 η 는 서서히 M^* 에 접근하여 변형률 수준이 높은 경우에는 거의 일치하는 경향을 나타낸다. 초기에 $\psi < 0$ 이면 축차변형률이 증가함에 따라 M^* 는 감소하고 η 는 침투값을 나타내며 그 이후 서서히 감소한다. 초기에 $\psi > 0$ 이면 M^* 는 증가하며 η 도 서서히 증가하는 양상을 나타낸다.

탄성거동은 등방적이고 체적계수 K 와 전단계수 G 가 일정하다고 가정한다. 속도형식의 탄소성 구성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K \left(1 - \frac{L_1}{H} g_{,p} \right) & -\frac{KL_2}{H} g_{,p} \\ -\frac{3GL_1}{H} g_{,q} & 3G \left(1 - \frac{L_2}{H} g_{,q} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_v \\ \dot{\bar{\epsilon}} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $\bar{H} = H + 3Gf_{,q} g_{,q} + KL_p g_{,p}$, $H = -(f_{,r} r_{,\bar{\epsilon}^p} + f_{,\alpha} \alpha_{,\bar{\epsilon}^p})$

$$L_1 = KL_p + L_v, \quad L_2 = 3Gf_{,q}$$

$$L_p = f_{,r} r_{,R} R_{,p} + f_{,r} r_{,R} R_{,\psi} \Psi_{,p} + f_{,\alpha} \alpha_{,p}, \quad L_v = f_{,r} r_{,R} R_{,\psi} \Psi_{,\epsilon_v}$$

$$\alpha_{,p} = q_{0,p} (1 - r/R), \quad \alpha_{,\bar{\epsilon}^p} = -(q_0/R) r_{,\bar{\epsilon}^p}$$

$$q_0 = kp, \quad k = p_i/q_i$$

$$g_{,p} = d, \quad g_{,q} = 1$$

이다.

전단계수 G 는 G_{\max} 로부터 구하며 초기체적응력에 따라 선형적으로 비례하는 것으로 가정하여 식 (9)와 같은 관계를 적용하면 관련된 탄성 변형률을 구할 수 있다

$$G \equiv G_{\max} = g_0 + g_1 p_i \quad (9)$$

여기서 g_0 와 g_1 은 일정하며 p_i 는 압밀후 체적응력이다.

포아송비 ν 는 일반적으로 응력상태 및 간극비에 따라 변화하는 것으로 알려졌지만 지반재료의 경우 탄성변형률이 소성변형률에 비하여 전체 거동에 큰 영향을 미치지 않으므로 일정하다고 가정하였다. 이러한 가정에 따른 탄성거동은 경험적으로 포아송비가 점성토 지반에서는 0.25, 비점성토에서는 0.30을 사용하면 탄성거동의 영향이 크게 발생하는 낮은 응력수준(low stress level)에서 실제거동을 비교적 일관되게 예측할 수 있다. 이 때 배수 삼축시험경로의 구성관계는 식 (8)으로부터 $\dot{q}/\dot{p} = 3$ 이라는 조건을 적용함으로써 쉽게 구할 수 있다.

3. K_0 압밀 삼축시험 결과와의 비교

제안된 모델을 구현하기 위하여 삼축시험을 수행하였을 경우에 필요한 자료는 다음과 같다 (1) 축차응력-축차변형률 관계 (2) 체적변형률-축차변형률 관계 (3) 간극비-체적응력 관계. 특히 미소변형 조건에서의 거동을 포함하기 위해서는 미소변위 측정을 필요로 한다.

식 (3)에 나타난 가상 침투응력비 M^* 는 침투강도를 나타내는 변수로 계수 n 과 한계상태 강도정수 M 이 필요하다. 이러한 계수들은 η - ψ 축에서 나타나는 실험적인 경로의 상부를 수렴하는 곡선으로부터 결정한다. 그리고 한계상태 간극비 e_{cr} 은 최종상태에서 정의한 후 한계상태 간극비와 체적응력 관계에서 계수 λ 와 l 을 구한다 (식 (4)). 팽창율(dilatancy) m_d 를 정의하기 위해서는 계수 d_0 와 m 이 필요하며 (식 (6)), 실험치에서 나타나는 소성체적변형률과 소성축차변형률의 비율로부터 구한다.

경화규칙 (hardening rule)은 항복면 크기와 경계면 크기의 비율로 나타나며 소성 축차변형률과 관련된 계수 a , b , c 를 구해야 한다. 따라서 시험조건에 따라 항복면 크기의 비와 소성 축차변형률을 구한 후 회귀분석하여 구할 수 있다. K_0 압축 삼축시험시 항복면 및 경계면의 크기는 다음과 같다.

$$r = q - q_0, \quad q_0 = kp, \quad k = \frac{3(1 - K_0)}{1 + 3K_0}, \quad (10)$$

여기서 k 는 K_0 압축 완료시 축차응력과 체적응력의 비로부터 결정하며, 일정하다고 가정한다. 등방압축 시에는 0이 된다. 그리고 축차변형률은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}^e, \quad \bar{\epsilon} = \frac{2}{3}(\epsilon_1 - \epsilon_3), \quad \bar{\epsilon}^e = \frac{q - q_i}{3G} \quad (11)$$

그림 5에서는 한계상태 강도정수 M 과 계수 n 및 가상 침투 응력비 M^* 를 구하는 과정을 보여준다. 그림 6은 K_0 압밀후 간극비와 최종간극비로부터 구한 λ 와 l 을 추정하는 과정을 보여주고 있다. 표 1에는 필요한 계수들을 정리하였다.

표 1 재료계수

| 구분 | 강도 | | | | 팽창율 | | 경화함수 | | | 탄성계수 | | |
|-----|-----|-----|-----------|------|-------|-----|-------|------|-----|--------|-------|-------|
| | M | n | λ | l | d_0 | m | a | b | c | g_0 | g_1 | ν |
| 포화토 | 1.8 | 8 | 0.61 | 0.15 | 2 | 8 | 0.018 | 2.02 | 0.3 | 135000 | 270 | 0.3 |

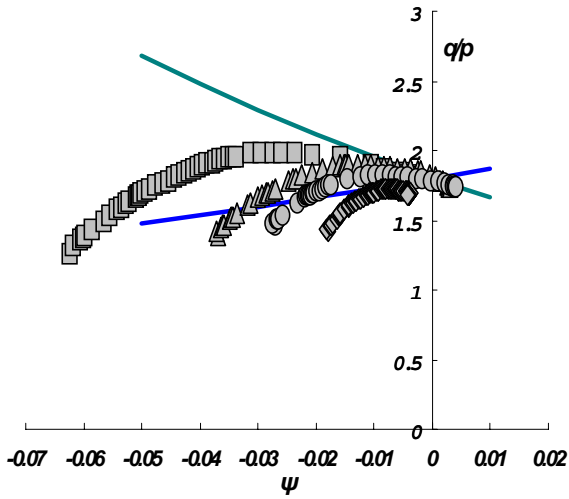


그림 5 강도정수 M^* 의 추정

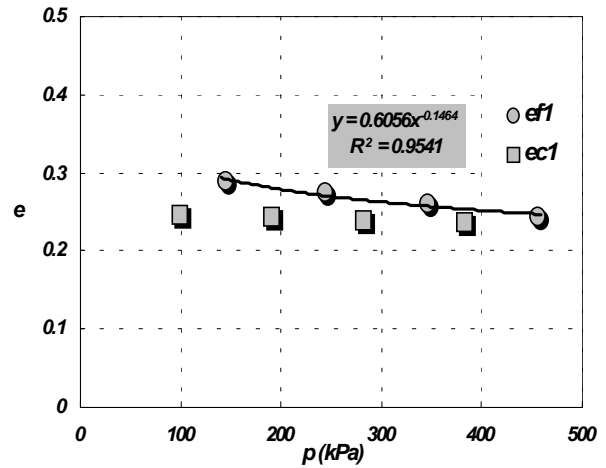


그림 6 계수 λ 와 l 의 추정과정

그림 7에서 나타난 응력-변형률 관계에서, 전체적으로 취성적인 거동을 적절히 예측하나 구속압별로 다소의 차이를 보이고 있다. 특히 구속압이 큰 경우에 강도를 다소 과대평가하는 경향을 나타낸다. 이는 재료계수 도출과정에서 전반적인 거동을 기준으로 계수를 결정하였으며, 구속압이 큰 경우의 거동이 전반적인 거동과 일관되지 않게 나타났기 때문으로 보인다.

그림 8은 실제 η 와 ψ 의 관계를 모델과 비교한 것이며, 전반적인 경향이 잘 맞는 것으로 판단된다. 그림 9는 각 구속압별로 체적변형률과 축방향변형률의 관계를 비교한 것이다. 체적변형은 대체로 팽창적이었으며 그 경향을 적절하게 모델하고 있다. 그림 10에서는 실제 할선계수와 대수변형률의 관계를 모델과 비교한 것이다. 각 구속압별 미소변형 영역의 거동을 잘 예측하고 있음을 알 수 있다.

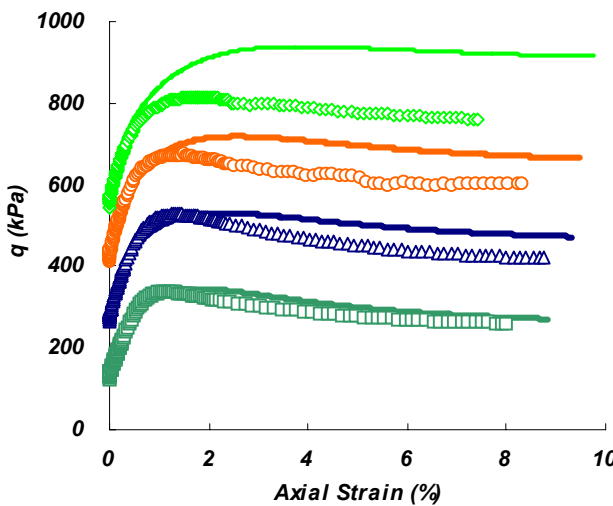


그림 7 응력-변형률 관계

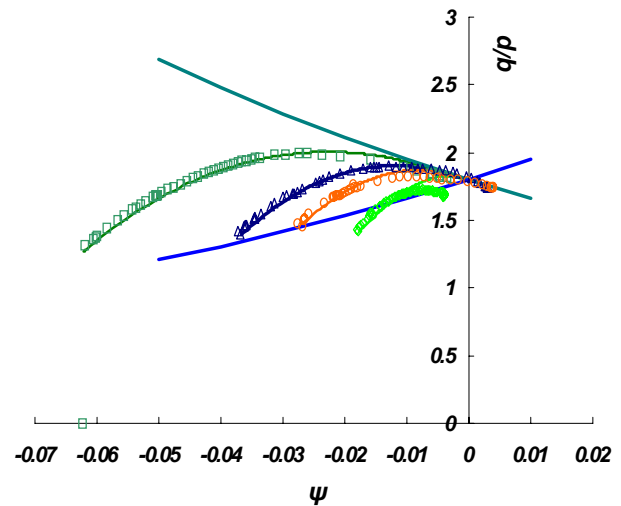


그림 8 $\eta - \psi$ 관계

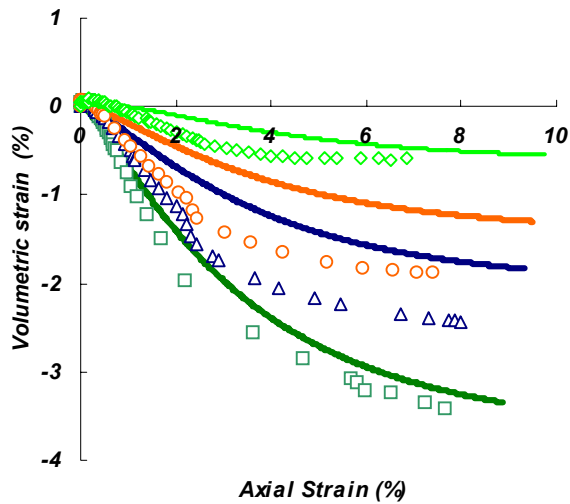


그림 9 체적변형률

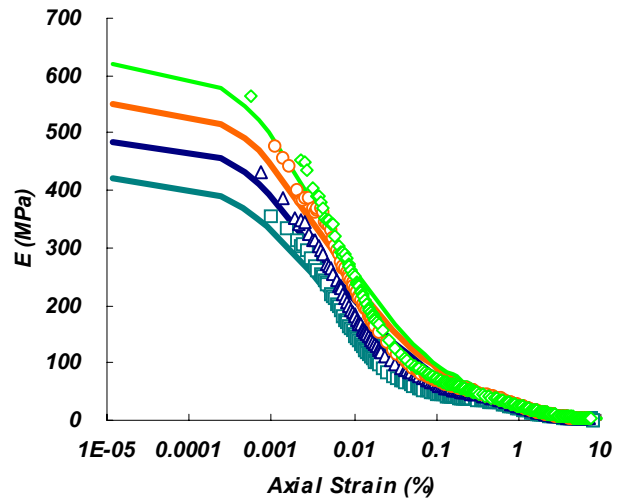


그림 10 할선계수-대수변형률 관계

4. 결론

본 연구에서는 K_0 압축시 응력-변형률 관계를 모델할 수 있는 구성모델을 제안하였다. 제안된 구성 모델은 일반등방경화규칙을 적용하였으며 항복면과 경계면을 단순한 원형으로 적용하여 상대적으로 덜 복잡하다. 또한 상태변수에 따라 변화하는 첨두응력비 및 팽창률을 정의하여 첨두강도와 유동규칙을 단순화하였다.

제안된 모델은 K_0 삼축시험시 응력-변형률 관계와 비교한 결과, 첨두응력을 포함한 응력-변형률 관계를 합리적으로 모델할 수 있었다. 또한 간극비 변화 및 체적팽창을 모델하였고 미소변형률 영역에서 나타나는 비선형적인 할선계수를 비교적 정확하게 모델하는 것이 가능하였다.

참고문헌

1. 오세봉, 권기철, 김동수, 정순용(2000), "미소변형률 및 대변형률 조건의 거동에 대한 비등방경화 탄소성 구성모델," 한국지반공학회지, 제16권, 제1호, pp.65~73
2. Li, X. S. and Dafalias, Y. F. (2000), "Dilatancy for Cohesionless Soils," *Geotechnique*, 50, 449-460
3. Arulanadarajah, A. and Dafalias, Y. F. (1986) "Bounding Surface Plasticity. III: application to anisotropic cohesive soils," *J. Engineering Mechanics Div.*, ASCE, 112, 1292-1318
4. Pestana-Nascimento, J. M. (1994), *A Unified Constitutive Model for Clays and Sands*, DSc Thesis, Dept. of Civil and Environmental Eng., MIT