

접에서 실용적 활용은 극히 미비하다. 본 연구에서는 기존의 토립자 미시역학 이론을 발전시켜 미시역학적으로 흙의 거동을 예측할 수 있는 해석 프로그램을 개발하였다. 접촉면에서 발생하는 힘-변위 관계는 기존의 Hertz-Mindlin 이론을 수정하여 적용하였으며, 이를 통해 실제 거동에 보다 가까운 강성 변화를 묘사할 수 있었다. 개발 모델에 포함된 변수의 정량적 평가를 위해, 등방 압력 하에서의 직교 이방적 탄성계수를 미시역학 이론으로부터 해석적으로 유도하였다.

2. 미시역학 모델의 개발

본 연구에서는 기존의 토립자 미시역학 이론을 발전시켜 새로운 미시역학 모델을 개발하였다. 모델에 포함된 특징 및 가정을 간단히 정리하면 다음과 같다.

- (1) 간극비의 변화에 따른 입자 간 접촉 개수의 변화를 고려할 수 있다.
- (2) 입자 접촉면에서 접선 방향 접촉력이 항복치에 도달할 경우 미끄러짐이 발생한다.
- (3) 입자 접촉면에서 인장력이 발생할 경우, 입자는 서로 분리되어 접촉력을 받지 못한다.
- (4) 응력비에 따른 조직 이방성의 변화를 고려할 수 있다.
- (5) 접선 하중에 의한 입자의 회전은 발생하지 않는다.
- (6) 접촉면에서 저항 모멘트는 발생하지 않는다.
- (7) 대상 입자 집합은 동일한 직경의 구형 입자로 이루어졌다.
- (8) 각 입자는 탄성체이며 그 물리적 성질은 동일하다.
- (9) 응력상태의 변화가 발생하더라도 조직(fabric)은 직교 이방적 성질을 유지한다.

2.1 미시적 관점에서의 접촉 모델(microscopic contact model)

입자의 두 입자에서 접평면의 수직 방향에 대한 접촉력과 변위를 각각 f_N 과 d_N 이라 하고, 접선 방향에 대한 두 개의 접촉력(변위)을 f_S (d_S)와 f_T (d_T)이라고 하자. 수직 방향 접촉력과 접선 방향 변위가 서로 독립적이고, 접선 방향의 접촉 강성은 접선 방향 접촉력의 방향과 무관하다고 가정한다면, 접촉력과 변위의 관계를 다음의 강성 행렬로 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \delta f_N \\ \delta f_S \\ \delta f_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_N & 0 & 0 \\ 0 & K_R & 0 \\ 0 & 0 & K_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta d_N \\ \delta d_S \\ \delta d_T \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 δf 와 δd 는 각각 접촉력 증분과 변위 증분이다. K_N 은 접평면의 수직 방향에 대한 접촉 강성이며, K_R 은 접선 방향에 대한 접촉 강성이다. 개발 모델에서는 K_N 과 K_R 을 Hertz-Mindlin 모델을 바탕으로 식 (2)와 같이 정의하였다. 식 (2)에서 ϕ_μ 는 입자 간 내부 마찰각이며, C_1 , C_2 , α , η 는 모두 모델 변수이다. 그림 1은 식 (2)에 의해 정의된 접촉면에서의 힘-변위 관계 곡선을 보여준다.

$$\begin{aligned} \text{수직방향 접촉 강성: } K_N &= C_1 f_N^\alpha \\ \text{접선방향 접촉 강성: } K_R &= C_2 K_N \left(1 - \frac{f_R}{f_N \tan \phi_\mu} \right)^\eta \end{aligned} \quad (2)$$

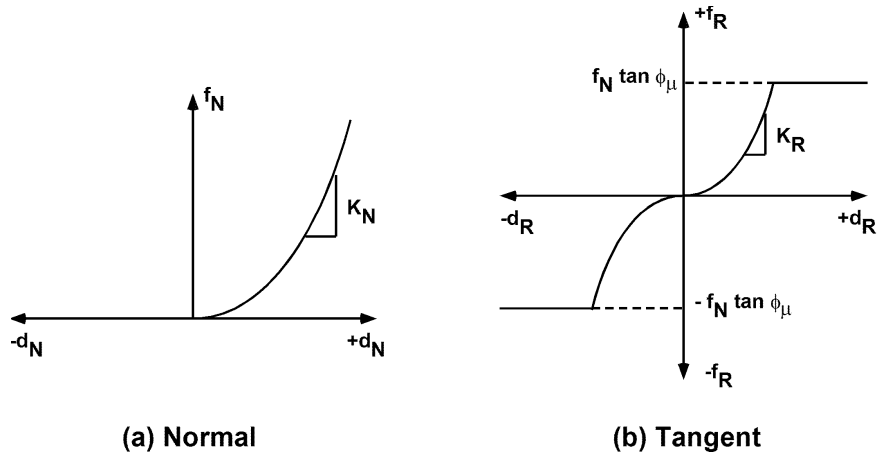


그림 1. 접촉면에서의 힘-변위 관계 (a) 접촉면의 수직 방향, (b) 접촉면의 접선 방향

2.2 접점 방향성 - 조직 텐서 (fabric tensor)

입자의 공간적 배열, 즉 조직(fabric)을 물리적으로 표현하는 방법은 크게 두 가지 방법이 있다(Oda, 1972). 첫 번째 방법은 개별 입자 형상의 공간적 방향성과 분포를 수학적으로 표현하는 방법이다. 두 번째 방법은 각 입자의 공간적 위치와 근접 인자와의 상호 관계를 고려하는 방법이 있다. 이 방법은 접촉면의 방향성을 나타내는 단위 벡터(contact normal)의 공간적인 분포를 통해 접점 방향성을 표현하는 방법이다. 본 연구에서는 동일한 직경의 구형 입자가 입상체를 이룬다고 가정하였으므로 접촉면의 접선 방향 단위 벡터의 통계적 분포만으로 흙의 조직을 표현하였다.

본 연구에서는 식 (3)에 제시한 바와 같이 입상체의 조직을 정의하기 위해 Oda와 Nakayama (1988)가 제시한 조직 텐서 F_{ij} 를 사용하였고, 이 때 접점 단위 벡터의 공간적 확률 분포 $E(\tilde{n})$ 는 Chang 등 (1989)이 제시한 2차 퓨리에 급수식을 이용하였다. 식 (4)에서 알 수 있듯이 접점의 공간 분포는 조직 이방성 정도(degree of fabric anisotropy, a)에 의해 결정되며, 직교 이방적 성질을 표현하므로 주어진 이방성에 대하여 γ 만의 함수로 표현될 수 있다. 그림 2는 공간에서 접점 위치와 a 의 변화에 따라 접점의 공간 분포가 어떻게 변화하는 지 보여준다.

$$F_{ij} = \int_{\Omega} n_i n_j E(\tilde{n}) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} n_i n_j E(\gamma, \beta) \sin \gamma d\gamma d\beta \quad (3)$$

$$E(\tilde{n}) = E(\gamma) = 3(1 + a \cos 2\gamma) / 4\pi(3 - a) \quad (4)$$

식 (4)에서 a 는 -1.0에서 1.0 사이의 값을 가지며, 연직 방향과 수평 방향의 접점 발생 확률을 변화시킨다. 즉 $a=0$ 이면 토립자 구조가 등방 상태를 의미하며, $a>0$ 이면 연직 방향으로 접점이 집중됨을 의미한다. 반대로 $a<0$ 이면 수평 방향으로 접점이 집중함을 의미한다.

2.3 거시적 관점에서의 응력-변형률 관계

거시적 관점에서의 응력과 변형률을 미시적 접촉면에서의 힘 또는 변위와 연관시키는 방법은 크게 정적 가설(static hypothesis)와 동적 가설(kinematic hypothesis) 두 가지로 나눌 수 있다. 본 연구에서는 정적 가설을 통해 거시적 응력과 각 입자에서 발생하는 접촉력의 관계를 식(5)와 같이 정의하였다.

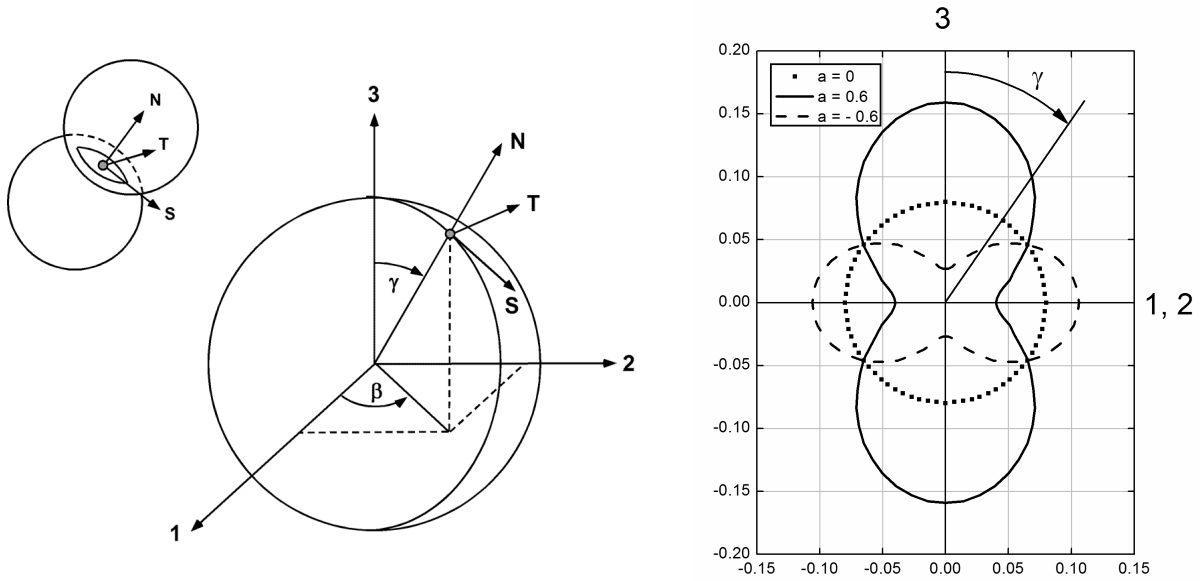


그림 2. 공간에서 점점 위치 및 a 의 변화에 따른 점점의 공간적 분포

$$\delta f_i = \frac{1}{2rn_v} \delta \sigma_{ij} \bar{F}_{jk} n_k \quad (5)$$

여기서 r 은 입자의 평균 반경이며, n_v 는 단위 체적 당 평균 점점수 또는 점점 밀도이다. $\bar{F}_{jk} = F_{jk}^{-1}$ 이다. n_k 는 입의 접촉면의 수직 방향을 나타내는 단위 벡터이며 $\tilde{n} = [\sin \gamma \cos \beta, \sin \gamma \sin \beta, \cos \gamma]$ 이다. 에너지 보존 법칙을 이용하여 거시적 변형률 증분을 구하고, 이를 이용하여 거시적 관점에서의 컴플라이언스 행렬(macroscopic compliance matrix)를 식 (6)과 같이 유도할 수 있다. 보다 자세한 유도 과정은 Yimsiri와 Soga (2000)에 기술되어 있다.

$$\delta \varepsilon_{on} = C_{onij} \delta \sigma_{ij}$$

$$C_{onij} = \frac{1}{4r^2 n_v} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\bar{F}_{oo} n_o) (\bar{T}_{nl} K_u T_{iv}) (F_{ij} n_j) E(\gamma) \sin \gamma d\gamma d\beta \quad (6)$$

식 (6)에서 T_{ij} 는 전체-국부 좌표계 간의 변환 행렬이며, 식 (7)과 같이 정의된다. 또한 $\bar{T}_{ij} = T_{ij}^{-1} = T_{ij}^T$ 이다.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \gamma \cos \beta & \sin \gamma \sin \beta & \cos \gamma \\ \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta & -\sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

일반적으로 거시적 관점의 컴플라이언스 행렬, 즉 식 (6)에 대한 해석적인 해를 정확히 유도하기 힘든데, 이는 입의 각도 γ 와 β 에 대한 접촉력과 접촉 강성이 위치와 조직 특성에 따라 모두 다르기 때문이다. 본 연구에서는 mid-point method를 이용한 수치 적분을 통해 식 (6)으로부터 거시적 컴플라이언스 행렬을 구하였다. 수치 적분 시 각도 증분 $\Delta \gamma$ 와 $\Delta \beta$ 는 1도로 하였다. 그림 3은 개발 프로그램의 순서도를 보여주며, 표 1에서는 개발 프로그램에 필요한 변수를 정리하였다.

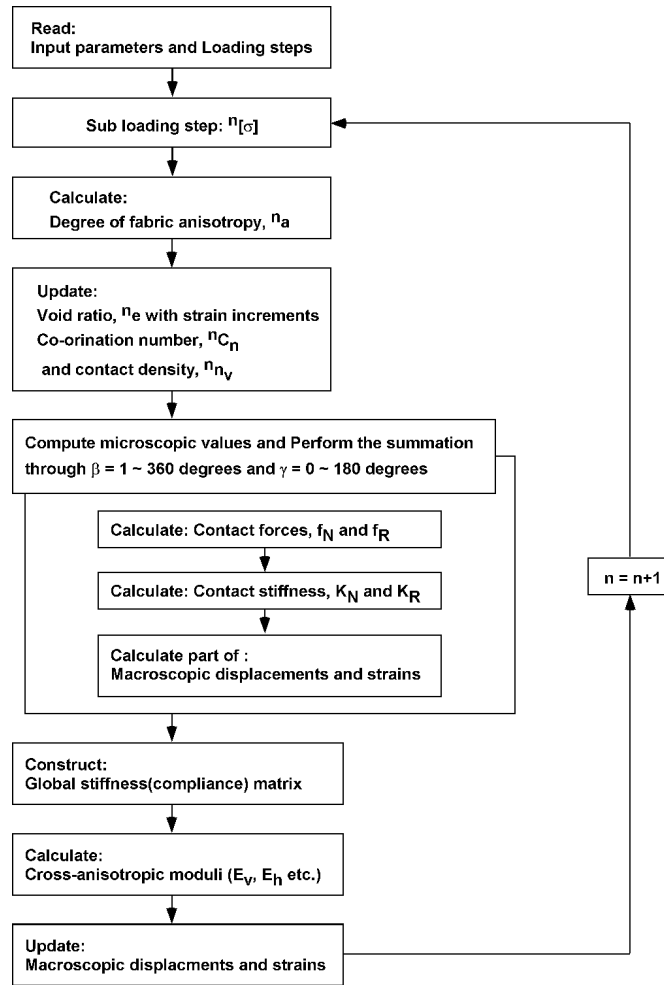


그림 3. 개발 프로그램의 순서도

표 1. 미시역학 모델의 변수

범주	미시역학 모델의 변수	
접촉면 모델	C_1	접촉면 수직 방향 강성 K_N 에 필요한 변수
	a	
	C_2	접촉면 접선 방향 강성 K_R 에 필요한 변수
	η	
접점 밀도	ϕ_μ	토립자의 내부 마찰각
	e_0	초기 간극비
	r	토립자의 평균 반경
접점 방향성	a	조직 이방성

3. 등방압 하에서 이방적 강성에 대한 해석식

일반적으로 미시역학을 통해 거시적 탄성계수에 대한 해석식을 구하는 것은 매우 어렵다. 이는 식 (2)의 접촉 강성 K_N 과 K_R 이 접촉력의 함수이고 또한 접촉력은 접촉면의 방향과 조직 상태에 따라 다른 값을 가지기 때문이다. 따라서 해석식은 매우 제한된 조건에 대해서만 유도할 수 있다. 본 연구에서는 미시역학 모델에 포함된 변수들을 결정하기 위해 등방압 조건에 대한 직교 이방적 탄성계수의 해석식을

유도하였다. 유도된 해석식을 실험을 통해 구한 경험적인 식과 직접 비교하여 미시역학 모델에 필요한 변수들을 추정할 수 있다.

등방압 σ_c 가 가해지는 조건에서 임의의 접점에서 발생하는 접촉력은 정적 가설과 좌표 변환을 통해 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f_N &= \frac{1}{2rm_v} \sigma_c [\overline{F}_{11} n_1 n_1 + \overline{F}_{22} n_2 n_2 + \overline{F}_{33} n_3 n_3] \\ f_S &= \frac{1}{2rm_v} \sigma_c [\overline{F}_{11} n_1 s_1 + \overline{F}_{22} n_2 s_2 + \overline{F}_{33} n_3 s_3] \\ f_T &= \frac{1}{2rm_v} \sigma_c [\overline{F}_{11} n_1 t_1 + \overline{F}_{22} n_2 t_2 + \overline{F}_{33} n_3 t_3] \end{aligned} \quad (8)$$

위의 식에서 \overline{F}_{ij} 는 직교 이방적 조직 텐서 F_{ij} 의 역행렬이다. 식 (3)을 적분하고 적절히 분리하면 \overline{F}_{ij} 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\overline{F}_{ij} = \frac{5(3-a)}{5-3a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-3a}{5+3a} \end{bmatrix} = \overline{F}_a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \overline{F}_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 $\overline{F}_a = 5(3-a)/(5-3a)$ 이며, $\overline{F}_b = -20a(3-a)/(5+a)(5-3a)$ 이다. 식 (8)과 (9)를 식 (2)에 대입하여 접촉 강성 K_N 과 K_R 을 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_N &= C_1 (\overline{F}_a / 2rm_v)^\alpha (\sigma_c)^\alpha \left[1 + \frac{\overline{F}_b}{\overline{F}_a} \cos^2 \gamma \right]^\alpha \approx C_1 (\overline{F}_a / 2rm_v)^\alpha (\sigma_c)^\alpha \\ K_R &= C_1 C_2 (\overline{F}_a / 2rm_v)^\alpha (\sigma_c)^\alpha \left[1 + \frac{\overline{F}_b}{\overline{F}_a} \cos^2 \gamma \right]^\alpha \left[1 - \frac{|\overline{F}_b| \cos \gamma \sin \gamma}{(\overline{F}_a + |\overline{F}_b| \cos^2 \gamma) \tan \phi_\mu} \right]^\eta \approx C_1 C_2 (\end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 \overline{F}_b 의 값을 무시할 정도로 작은 값이라고 가정한다면, 등방압 하에서의 접촉 강성은 식 (10)의 마지막 항과 같이 σ_c 의 지수함수 형태로 나타나며 각도 γ 에 무관한 값이 된다. 이 때의 접촉 강성을 식 (6)에 대입하고 적분을 실시한 후 정리하면, 직교 이방성 탄성계수에 대한 해석해를 식 (11)과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} E_v &= C_1 C_2 \left[\frac{28r^2 n_v (5+a)^2}{5(3-a)[14-2a+C_2(21+9a)]} \right] \left[\frac{5(3-a)}{2rm_v(5-3a)} \right]^\alpha (\sigma_c)^\alpha \\ G_{vh} &= C_1 C_2 \left[\frac{14r^2 n_v (5-3a)^2 (5+a)^2}{5(5-a)(3-a)[105-46a-23a^2+C_2(70-24a+2a^2)]} \right] \left[\frac{5(3-a)}{2rm_v(5-3a)} \right]^\alpha (\sigma_c)^\alpha \\ G_{hh} &= C_1 C_2 \left[\frac{14r^2 n_v (5-3a)^2}{5(3-a)[21-11a+C_2(14-10a)]} \right] \left[\frac{5(3-a)}{2rm_v(5-3a)} \right]^\alpha (\sigma_c)^\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)을 살펴보면 각 탄성계수는 $(\sigma_c)^\alpha$ 의 함수이며, 이는 실험적으로 구한 경험식의 형태(Roesler, 1979; Yu and Richart, 1984; Bellotti 등, 1996; Kuwano와 Jardine, 2002)와 일치한다. Kohata 등 (1997)은 점착성이 없는 다양한 사질토에 대한 실험 결과를 종합하여 이방적 탄성계수가 재료의 입경에 관계없이 약 0.5임을 보였다. 이러한 실험적 결과를 종합해 볼 때, 식 (11)에서 α 의 값은 0.5로 보는 것이 타당하다.

식 (11)의 해석하는 유도 과정 중 \bar{F}_b 를 무시하면서 오차를 내포하게 된다. 식 (10)을 살펴보면 K_N 가 내포한 오차(E_{RR}^N)는 $[1+(\bar{F}_d/\bar{F}_b)\cos^2\gamma]^\alpha$ 에 의해 발생한다. 적분 과정 중 γ 는 소거되므로 E_{RR}^N 는 a 와 α 의 함수이다. K_R 의 경우 K_N 을 포함하므로, K_R 에서의 오차는 E_{RR}^N 및 a 와 η , ϕ_μ 의 함수인 $[1-|\bar{F}_b|\cos\gamma\sin\lambda/(\bar{F}_a+|\bar{F}_b|\cos^2\gamma)\tan\phi_\mu]^\eta$ 에 의해 발생한다. 이 오차를 E_{RR}^R 라 하자. 발생 오차를 살펴보면 E_{RR}^N 과 E_{RR}^R 를 고려한다고 하더라도 앞서 언급한 바와 같이 이방적 탄성계수가 $(\sigma_c)^\alpha$ 의 함수 형태임은 변하지 않는다. α 의 값은 경험식과 비교해 볼 때 약 0.5이며, η 의 값은 Hertz-Mindlin의 이론(Johnson, 1985)을 참고할 때 약 0.3의 값을 가진다. 따라서 ϕ_μ 의 값이 결정된다면, E_{RR}^N 과 E_{RR}^R 은 a 만의 함수로 볼 수 있다. 2절에서 언급한 개발 프로그램을 이용하여 탄성계수를 구하면 해석식과 달리 E_{RR}^N 과 E_{RR}^R 에 의해 발생하는 오차를 배제한 정확한 값을 구할 수 있다. 따라서 특정 조건에서 프로그램을 통해 구한 탄성계수와 해석해로 구한 탄성계수를 비교하면 a 의 변화에 따른 오차의 양상을 파악할 수 있다.

그림 4는 $\alpha = 0.5$ 그리고 $\eta = 0.3$ 으로 가정하고 입자 간의 내부 마찰각이 20도일 때, 해석해로 구한 탄성계수와 개발 프로그램을 통해 구한 값을 서로 비교한 결과를 보여준다. 개발 프로그램으로 탄성계수를 구할 경우 수치적분에 의한 오차가 발생할 수 있지만, 충분히 작은 각도 증분으로 적분을 수행하였으므로 정해에 매우 가까운 값을 구할 수 있다. 그림 4를 살펴보면, 해석해로 구한 탄성계수는 정해에 비해 대체로 큰 값을 예측하며, a 가 $-0.75 \sim 0.2$ 의 범위에 있을 때 정해의 $\pm 10\%$ 이내의 오차를 내포한 탄성계수를 구할 수 있다. $a = -0.75 \sim 0.2$ 는 탄성계수비 $n = E_H/E_v$ 로 환산하면 약 0.8~1.7이다. 이는 Yimsiri와 Soga(2002)가 제시한 사질토에서 나타나는 탄성계수비의 범위와 근사하게 일치한다.

또한 Kuwano와 Jardine (2002)의 결과를 살펴볼 때 $\pm 10\%$ 의 오차는 실험에서도 허용될 수 있는 값이므로, 조직 이방성의 크기(즉 a 의 값)가 크지 않을 경우 해석해를 통해 구한 직교 이방적 탄성계수는 충분히 정확한 값이라고 볼 수 있다. E_{RR}^N 과 E_{RR}^R 에 의해 발생할 수 있는 해석해의 오차를 보정하여 보다 정확한 값을 결정하기 위해서는, 그림 4과 같이 보정 차트를 구성하고 보정치를 해석해에 곱하여 값을 수정할 수 있다. 따라서 본 연구에서 유도한 해석해를 실험적으로 구한 경험식과 직접 비교한다면, 접촉 강성에 포함된 여러 미시역학적 모델 변수들을 쉽게 결정할 수 있다.

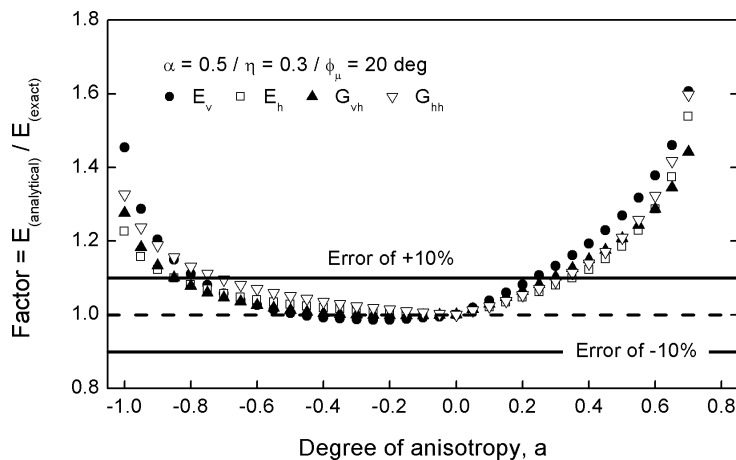


그림 4. a 의 변화에 따른 해석해의 발생 오차

4. 결론

본 연구에서는 기존의 토립자 미시역학 이론을 발전시켜 토립자 간 접촉면에서 발생하는 힘-변위 관계와 토립자로 이루어진 입상체의 응력-변형률 관계를 유도하였다. 이를 이용하여 미시적 관점에서 토체의 응력-변형률 관계와 직교 이방적 탄성계수를 구할 수 있는 프로그램을 개발하였다. 접촉면에서 발생하는 힘-변위 관계는 기존의 Hertz-Mindlin 이론을 수정하여 적용하였으며, 이를 통해 실제 거동에 가까운 강성 변화를 모사할 수 있다.

기존의 미시역학 모델의 문제점 중 하나인 변수 추정 of 어려움을 해결하기 위해, 등방압 조건에 대한 해석해를 유도하였다. 유도 과정 중 포함된 가정 조건으로 인한 오차를 평가하기 위해 해석해와 정해를 비교해 본 결과, 조직 이방성 정도를 나타내는 a 가 비교적 작은 값일 경우 10% 이내의 오차로 해석해를 통해 탄성계수를 구할 수 있음을 확인하였다. 따라서 해석해와 실험으로부터 구한 경험식을 직접 비교하여 미시역학적 변수들을 적절히 추정할 수 있다. 향후 본 연구에서 제시한 해석해와 개발 프로그램을 이용하여 기존에 발표된 실험적 결과를 분석하고, 이를 통해 사질토의 이방적 변형 특성에 대한 미시역학적 분석을 수행할 필요가 있다.

참고 문헌

1. Bellotti, R., Jamiolkowski, M., Lo Presti, D.C.F. and O'neill, D.A. (1996), Anisotropy of small strain stiffness in Ticino sand, *Geotechnique*, Vol. 46, No. 1, pp. 115-131.
2. Chang, C.S., Sundaram, S.S. and Misra, A. (1989), Initial moduli of particulated mass with frictional contacts. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* Vol. 13. pp.629-644.
3. Johnson, K.L. (1985), *Contact mechanics*, Cambridge, Cambridge University Press.
4. Kohata, Y., Tatsuoka, F., Wang, L., Jiang, G.L., Hoque, E. and Kodaka, T. (1997), Modelling of non-linear deformation properties of stiff geomaterials, *Geotechnique*, Vol. 47, No. 3, pp.563-580.
5. Kuwano, R. and Jardine, R.J. (2002), On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains, *Geotechnique*, Vol. 52, No. 10, pp.727-749.
6. Oda, M. (1972), The mechanism of fabric changes during compressional deformation of sand, *Soils and Foundations*, Vol. 12, No. 2, pp.1-18.
7. Oda, M. and Nakayama, H. (1988), Introduction of inherent anisotropy of soils in the yield function, *Micromechanics of granular materials*, Amsterdam, pp. 81-90.
8. Roesler, S.K. (1979), Anisotropic shear modulus due to stress anisotropy, *J. Geotech. Engng*, ASCE, Vol. 105, No. GT7, pp. 871-880.
9. Yimsiri, S. and Soga, K. (2000), Micromechanics-based stress-strain behaviour of soils at small strains, *Geotechnique*, Vol.50, No.5, pp.559-571.
10. Yimsiri, S. and Soga, K. (2002), Application of micromechanics model to study anisotropy of soils at small strains, *Soils and Foundations*, Vol.42, No.5, pp.15-26.
11. Yu, P. and Richart, F.E. Jr. (1984), Stress ratio effects on shear modulus of dry sands. *J. Geotech. Engng.*, ASCE, Vol.110, No.3, pp.331-345.