

$$N_\gamma$$

Numerical Computation of Bearing Capacity Factor N_γ

¹⁾, Won-Cheul Kim

¹⁾ , Adjunct Professor, Dept. of Civil Engineering, Hanyang Uni.

SYNOPSIS : This study is to present explicit analytical expressions for calculating bearing capacity factor N_γ , to provide results of the numerical computation instead of the graphical method. In this study, N_γ is proposed in the critical failure surface on assumption that the center of log spiral in the radial shear zone can be located at the any points of around footing. The critical failure surface is one which yields minimum passive pressure P_γ on the radial shear zone from the family of log spirals according to change of the center of log spiral. This study adopts Terzaghi's bearing capacity principle(e.g., Prandtl's mechanism, limit equilibrium equation, superposition principle) but the soil wedge in an elastic zone makes angle $45^\circ + \phi/2$ with the horizontal and the location of the log spiral's center.

Key words : Bearing capacity N_γ , Log-spiral, Radial shear zone, Numerical computation

1. 서론

Terzaghi(1943)는 얇은기초의 지지력 산정시 기초지반의 전반전단파괴를 가정하고 그 파괴형태를 3개의 영역(탄성영역, 원호전단영역, Rankine의 수동영역)으로 나누어 각 영역의 영향을 고려하였다. 그리고 지지력계수 N_c , N_q 산정시에는 원호전단영역의 대수나선 중심점을 기초저면의 모서리에 고정된 것으로 가정하고, 지지력계수 N_γ 산정시에는 대수나선의 중심점이 원호전단영역과 Rankine 수동영역의 경계선상에 존재하는 것으로 가정하여 한계평형방정식을 이용하여 구하였다. 이후 Meyerhof(1951, 1963), Hansen(1970), Vesic(1973) 등 여러 공학자들에 의해 지지력공식은 계속적으로 연구되어 왔고 다양한 제안식들이 발표되었다.

다른 제안식에서도 Terzaghi(1943)의 기본가정을 받아들였지만, DeBeer와 Vesic(1958)이 모형실험 결과를 통하여 탄성파괴영역의 흩째기와 수평면이 이루는 각이 Terzaghi(1943)가 제안한 지반 내부마찰각(ϕ)과는 다른 $45^\circ + \phi/2$ 를 이룬다고 제안한 이후 일반적으로 DeBeer와 Vesic이 제안한 $45^\circ + \phi/2$ 를 적용하고 있다. 그리고 지지력계수 N_c , N_q 의 산정 방법은 다른 제안식에서도 Terzaghi(1943)의 산정법과 큰 차이를 보이지 않지만, N_γ 의 경우에는 제안자들에 따라 크게 차이를 보인다. 이는 N_c, N_q 와 달리 N_γ 는 지반의 중량에 의한 영향인 자이므로 지반파괴형상에 크게 영향을 받기 때문이다. 특히 원호전단영역의 형태에 따라 그 값이 크게 영향을 받으므로 원호전단영역의 대수나선 형태를 정확히 파악하는게 중요하다. 이는 원호전단영역의 대수나선 중심점을 보다 정확히 산정해야 함을 의미한다.

그러므로 본 연구는 원호전단영역의 대수나선 중심점을 얇은기초하 지반평면내 어디에나 존재가능하다는 가정아래 각 중심점의 변화에 따른 여러 대수나선 중, 원호전단영역상의 수동도압 P_γ 의 최소값을 유도하는 대수나선을 극한 파괴면으로 보고 이때의 N_γ 를 제시하고자 한다. 그리고 본 연구에서도 기존의 Terzaghi(1943) 지지력 이론의 지반파괴메카니즘을 기본으로 하지만, 기초아래 탄성영역의 흩째기와 수평면과의 각도는 DeBeer와 Vesic(1958)이 제안한 $45^\circ + \phi/2$ 로 가정하였고 기존의 trial and error method에 의한 Graphical Analysis 대신 Numerical Analysis를 통한 N_γ 를 제시하고자 한다. 이는 지반 내부마찰각(ϕ)에 따라 N_γ 가 민감하게 변화하므로(Kumbhojkar, 1993) 산정자에 의해 발생할 수 있는 개인오차를 최대한 줄이기 위함이다.

2. 이론적 배경- 기존의 지지력계수 N_γ 산정식

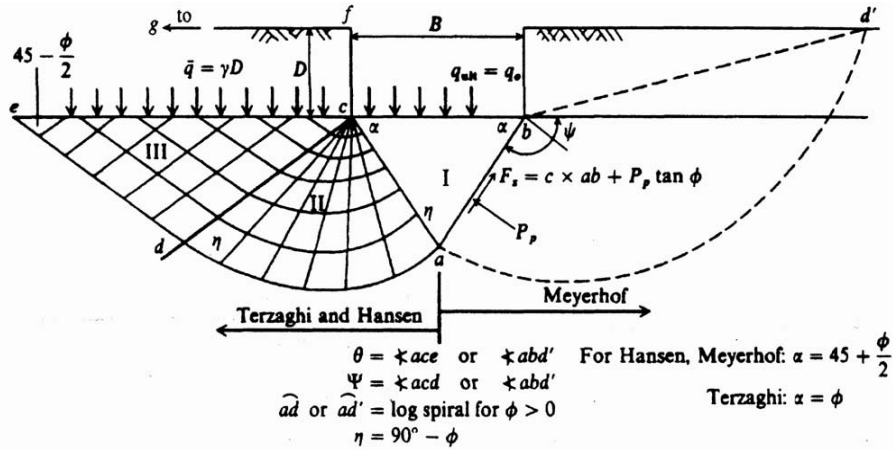


그림 1. general footing soil interaction for bearing capacity equations for strip footing- left side for Terzaghi(1943), Hansen(1970) and right side Meyerhof(1951).

Terzaghi(1943), Meyerhof(1951, 1963), Vesic(1975)의 지지력 공식을 살펴보면 기본적으로 지반은 반무한한 등방이고 균질한 상태이며, 전반전단파괴가 발생하며 기초의 바닥은 거친 강성연속기초이며 파괴형태를 3개의 영역으로(그림 1에서 I (abc)는 탄성영역, 영역II (acd)는 원호전단영역, 영역III(cde)는 Rankine의 수동영역) 나누어 한계평형방정식(limit-equilibrium equation)과 중첩의 원리(superposition principle)를 적용하였다. 단 Terzaghi는 기초위의 흙은 상재하중으로 가정하고 그림 1에서 de를 따라 발생하는 전단저항은 고려하지 않았다. 그리고 기초아래 흙층의 수평면과의 각도 α 는 내부마찰각 ϕ 와 같다고 가정한다 반면, Meyerhof는 파괴면이 대수나선을 따라 지표면까지 연장되는 형태를 가정하였고, 기초위의 흙의 전단저항을 고려하였으며 α 는 $45^\circ + \phi/2$ 로 가정하였다. 이들의 지지력 계수와 여러 학자들에 의해 제안된 지지력 계수를 정리하면 표 1과 같다. 모든 제안식들은 Terzaghi(1943)의 파괴메카니즘에 따른 지지력 공식(식 1)을 기본으로 하였다.

$$q_{ult} = c N_c + \gamma D_f N_q + \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (1)$$

q_{ult} : 극한지지력
 γ : 지반의 단위중량

c : 점착력
 B : 기초폭

D_f : 기초의 근입깊이
 N_c, N_q, N_γ : 지지력 계수

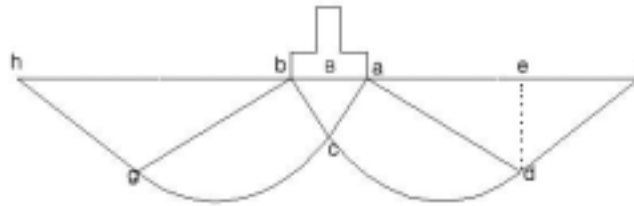
표 1. 지지력 공식과 지지력계수

제안자	N_c	N_q	N_γ
Terzaghi(1943)	$(N_q - 1) \cot \phi$, Prandtl(1921)	$\frac{e^{2(0.75\pi - \phi/2)\tan \phi}}{2 \cos^2(45 + \frac{\phi}{2})}$, Reissner(1924)	$\frac{1}{2} \left[\frac{K_p}{\cos^2 \phi} - 1 \right] \tan \phi$, Terzaghi(1943)
Meyerhof (1951, 1963)	$(N_q - 1) \cot \phi$, Prandtl(1921)	$e^{\pi \tan \phi} \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$, Reissner(1924)	$(N_q - 1) \tan(1.4\phi)$, Meyerhof(1963)
Vesic(1973)	$(N_q - 1) \cot \phi$, Prandtl(1921)	$e^{\pi \tan \phi} \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$, Reissner(1924)	$2(N_q + 1) \tan \phi$, Caquot와 Kerisel(1953)
Hansen(1970)	$(N_q - 1) \cot \phi$	$e^{\pi \tan \phi} \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$	$1.5(N_q - 1) \tan \phi$

Chen(1975)	$(N_q - 1) \cot \phi$	$e^{\pi \tan \phi} \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$	$2(N_q + 1) \tan \phi \tan(45 + \frac{\phi}{2})$
Eurocode 7	$(N_q - 1) \cot \phi$	$e^{\pi \tan \phi} \tan^2(45 + \frac{\phi}{2})$	$2(N_q - 1) \tan \phi$

3. Numerical Solution for N_γ

본 연구에서는 위에서 언급한 Terzaghi(1943)의 지반파괴메카니즘을 바탕으로 기초아래 흙층의 수평면과의 각도는 Meyerhof(1963)나 Vesic(1973)과 같이 $45^\circ + \phi/2$ 로 가정하였다. 본 연구의 주목적이 N_γ 산정에 있으므로 상재하중과 점착력의 영향을 배제하고($c=0, q=0$) 지반의 단위하중에 의한 영향만을 고려하여 한계평형방정식을 적용하여 N_γ 를 구하는 알고리즘의 유도 과정은 다음과 같다.



B: 기초폭

그림 3. 거친 강성 연속기초 하부에 발생된 기초지반의 파괴형상

Terzaghi(1943)는 N_c, N_q 산정시 원호전단영역의 대수나선 형태는 일정하며, 그 중심점은 기초의 모서리(그림 3에서 a, b 점)에 고정되어있다고 가정하였다. 그래서 기초의 모서리(그림 3에서 a, b 점)를 모멘트 중심점으로하여 토체 acde에 작용하는 힘들을 한계평형방정식을 적용하여 지지력계수를 산정하였다. 하지만 N_γ 를 산정시에는 이 가정이 논리적이지 않다. 이는 중첩의 원리에 N_c, N_q, N_γ 를 각기 구함에 있어서 N_c, N_q 는 지반을 weightless soil로 가정하여 산정하는데 비해, N_γ 는 지반의 weight를 고려하여 산정하기 때문에 대수나선의 중심점의 변화에 따른 지반파괴형태에 크게 영향을 받기 때문이다. 따라서 Terzaghi(1943)는 대수나선의 중심점이 고정된 것이 아니라 ad 선상에서 변화한다고 가정하여 여러개의 대수나선에서 acde 토체상의 수동토압 P_γ 의 최소값을 유도하는 대수나선이 극한 파괴면을 graphical method를 적용하여 산정하였다. 이후 Kumbhojkar(1993)이 graphical method 대신 Numerical method를 개발하여 전산화 하였다. 하지만 본 연구에서는 지반내에 형성가능한 모든 지반파괴모형을 고려하기 위해 대수나선의 중심점을 대수나선을 포함한 평면상 임의의 지점에 존재가능한 것으로 가정하였다. 그림 3에서 토체 acde의 대수나선 cd의 중심점 o를 임의의 지점에 가정하여 도시하면 그림 4와 같다.

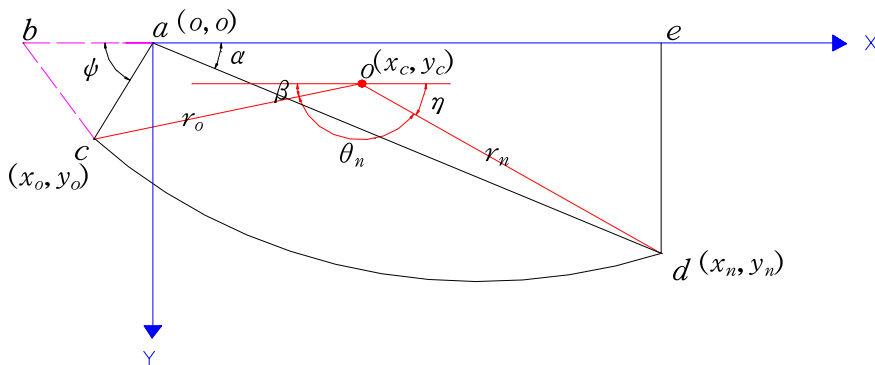


그림 4. 토체 acde에서 log spiral의 중심점 가정

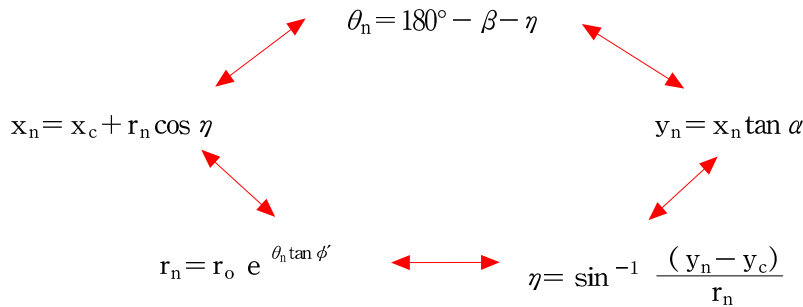
ϕ' = specified soil의 내부마찰각

$$\phi = 45^\circ + \frac{\phi'}{2} \quad \alpha = 45^\circ - \frac{\phi'}{2} \quad \beta = \tan^{-1} \frac{(y_o - y_c)}{(x_c - x_o)}$$

$$x_o = -\frac{B}{2}, \quad y_o = -x_o \tan \phi, \quad x_c = \text{varied}, \quad y_c = \text{varied}, \quad r_o = \sqrt{(y_o - y_c)^2 + (x_c - x_o)^2}$$

가정된 대수나선의 중심좌표로 대수나선의 중심각을 계산하기 위해 그림 5와 같은 순환계산과정을 거치게 된다. 여기서 아래첨자 n은 대수나선의 중심각을 n등분하였을때 n번째의 값을 의미한다.

순환계산영역



- 최대반복계산 10000번, 변화한도값 0.0001

그림 5. 순환계산영역

대수나선 중심각을 n등분하여 파괴면을 n개의 절편으로 나눈다. 본 연구에서는 20등분으로 나누었다. 이 n개의 절편에 관한 평형방정식을 세워 N_γ 를 산정하게 되는 것이다. 이를 도시하면 그림 6과 같다.

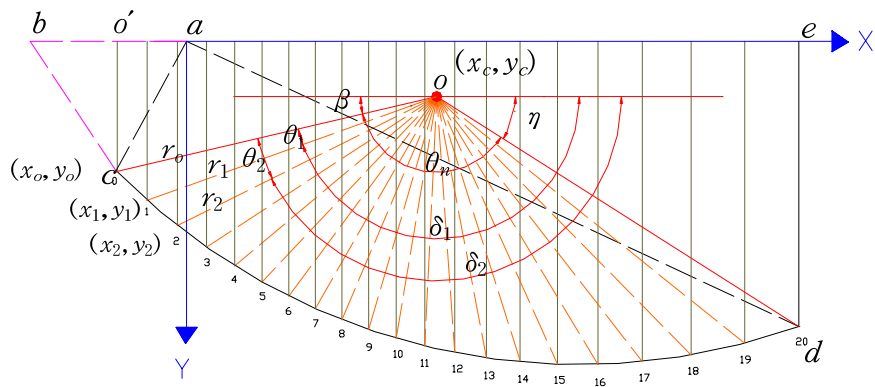


그림 6. 20개의 절편으로 나눈 토체 acde

n=number of slices

$$\Delta\theta = \frac{\theta_n}{n}, \quad \theta_i = i\Delta\theta, \quad \delta_i = 180^\circ - \beta - \theta_i, \quad r_i = r_o e^{\theta_i \tan \phi}$$

$$x_i = x_c + r_i \cos \delta_i, \quad y_i = y_c + r_i \sin \delta_i$$

여기서 x_i, y_i 는 i번째 절편의 대수나선 원호 좌표(i= 0~20)

평형방정식은 대수나선 중심에서의 Moment Equilibrium을 이용한다. 이를 Soil Weight에 의한 Moment와 Passive Force에 의한 Moment로 나누어 살펴보면 다음과 같다.

3.1 Soil Weight 에 의한 Moment

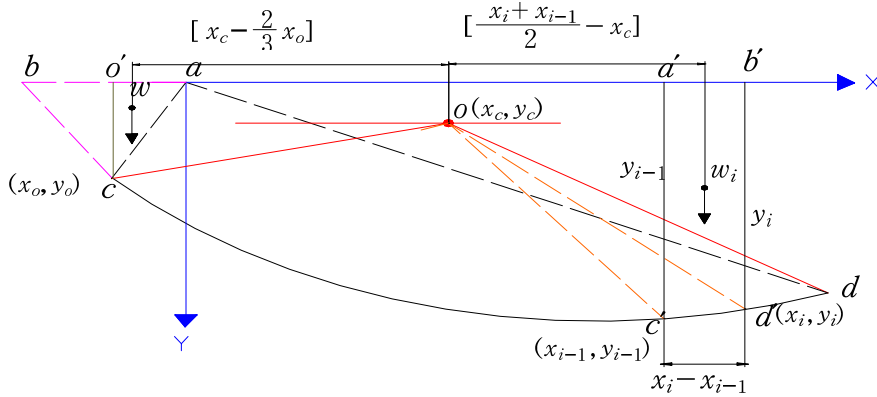


그림 7. Moment Equilibrium의 적용

① 흙썰기 $ao'c$ 에서의 moment component

$$S = \frac{1}{2} x_o y_o, \quad w = \gamma S, \quad M_w = w \left(x_c - \frac{2}{3} x_o \right)$$

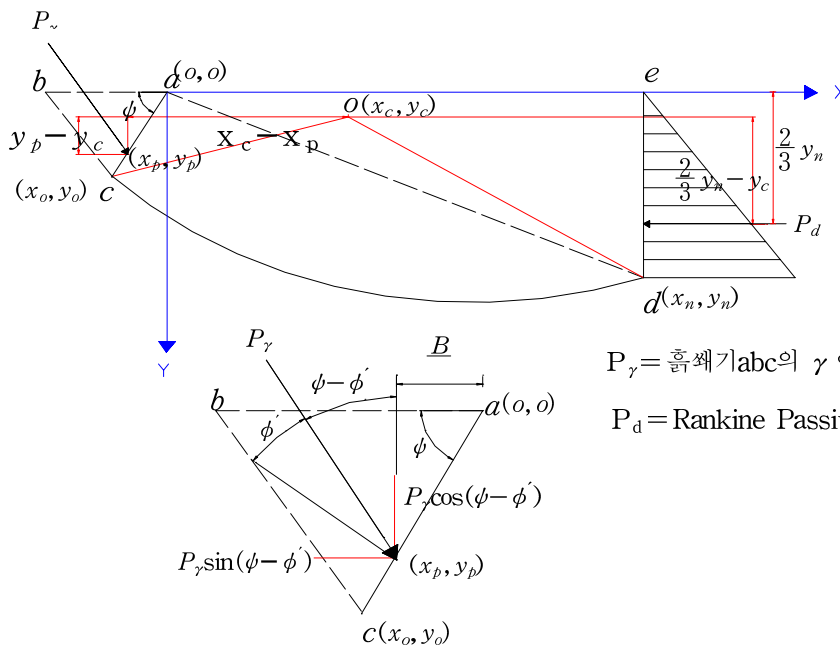
② 절편 $a'b'c'd'$ 에서의 moment component

$$S_i = \frac{1}{2} (y_i + y_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \quad w_i = \gamma S_i, \quad M_i = w_i \left[\frac{1}{2} (x_i + x_{i-1}) - x_c \right]$$

여기서 $S, S_i = \text{area}$, $w, w_i = \text{weight}$, $\gamma = \text{unit weight of soil}$, 모멘트방향 : 시계방향을 양의 방향
 절편 $a'b'c'd'$ 의 $c'd'$ 는 원호지만 잘게 여러 절편으로 나누게 되면 직선으로 간주해도 무방하기 때문에 위와 같이 계산되었다. 그러므로 soil weight를 고려한 전체 모멘트 평형방정식은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{\text{soil}} = \Sigma M_i - M_w = \Sigma M_i - \gamma \frac{1}{2} x_o y_o \left(x_c - \frac{2}{3} x_o \right) \quad (2)$$

3.2 Passive Force 에 의한 Moment



$P_\gamma =$ 흙썰기 abc 의 γ 에 의한 Passive Force
 $P_d =$ Rankine Passive Force

그림 8. 토체 $acde$ 와 abc 의 Free Diagram

Rankine의 수동토압은 $P_d = \frac{1}{2} \gamma y_n^2 K_p$ 로 구할 수 있고, 여기서 수동토압계수는 $K_p = \frac{1}{\tan^2 \alpha}$ 로 산정된다. 그러므로 P_d 에 의한 모멘트 M_{RP} 는 식 (3)과 같다.

$$M_{RP} = \frac{1}{2} K_p \gamma y_n^2 \left(\frac{2}{3} y_n - y_c \right) \quad (3)$$

흙썰기 abc의 단위중량 γ 에 의한 수동토압 P_γ 의 작용점(x_p, y_p)은 $x_p = -\frac{B}{3}$, $y_p = -x_p \tan \phi$ 로 나타낼 수 있다. 그러므로 P_γ 에 의한 모멘트 M_{P_γ} 는 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} M_{P_\gamma} &= (x_c - x_p) P_\gamma \cos(\psi - \phi') + (y_p - y_c) P_\gamma \sin(\psi - \phi') \\ &= P_\gamma [(x_c - x_p) \cos(\psi - \phi') + (y_p - y_c) \sin(\psi - \phi')] \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $arm = (x_c - x_p) \cos(\psi - \phi') + (y_p - y_c) \sin(\psi - \phi')$ 로 하여 식 (4)를 간단히 하면 식 (5)와 같다.

$$M_{P_\gamma} = P_\gamma \times arm \quad (5)$$

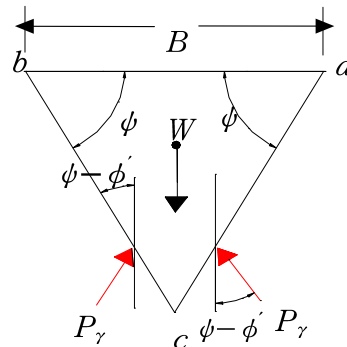
식 (2), (3), (5)에 Moment Equilibrium Equation을 적용하면 식 (6)과 같다.

$$-M_{P_\gamma} + M_{soil} + M_{RP} = 0 \quad (6)$$

식 (6)를 P_γ 에 대하여 정리하면 식 (7)과 같다.

$$P_\gamma = \frac{M_{soil} + M_{RP}}{arm} \quad (7)$$

3.3 흙썰기에서의 평형방정식(Force Equilibrium)을 적용, 최종적으로 N_γ 산정



- Q_r : 극한하중
- W : 흙썰기 abc의 weight
- q_r : 극한지지력
- B : 기초폭
- P_r : 흙썰기 abc의 γ 에 의한 Passive Force

그림 9. 흙썰기 abc에 작용하는 Forces

$$W = \gamma \frac{B^2}{4} \tan \phi \quad (8)$$

$$Q_r = 2P_r \cos(\psi - \phi') - W = 2P_r \cos(\psi - \phi') - \frac{1}{4} \gamma B^2 \tan \phi = B q_r \quad (9)$$

N_γ 치 산정하기 위해 식 (1)에서 c, q 는 0 으로 가정 (비점착성 사질토위의 근입깊이 D_f 가 0 인 상태) 그러므로 Terzaghi(1943)의 지지력식과 식 (9)를 비교하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$q_r = \frac{Q_r}{B} = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma \quad (10)$$

그러므로 최종적으로 지지력계수 N_γ 는 식 (11)에 의해 구해진다.

$$\begin{aligned} N_\gamma &= 2 \frac{q_r}{\gamma B} \\ &= \frac{4P_r \cos(\psi - \phi')}{\gamma B^2} - \frac{1}{2} \tan \phi \end{aligned} \quad (11)$$

4. 해석 결과 N_γ 치와 기존 식들에서의 N_γ 치와의 비교

아래 표 2는 내부마찰각 ϕ 의 변화에 따른 지지력계수 N_γ 의 변화를 나타낸 것이다. 본 연구에서 제시한 알고리즘으로 구한 N_γ 는 편의상 제안식(2003)으로 나타내었다.

표 2. 지지력 계수 N_γ 치 비교

ϕ degree	Terzaghi* (1943)	Meyerhof (1963)	Hansen (1970)	Vesic (1973)	Chen (1975)	Eurocode7	Kumbhojkar (1993)	제안식 (2003)
16	1.82	1.37	2.29	3.06	3.42	1.91	1.82	2.96
18	2.59	2.00	3.05	4.07	4.61	2.77	2.59	3.97
20	3.64	2.87	4.04	5.39	6.20	3.93	3.64	5.32
22	5.09	4.07	5.35	7.13	8.32	5.51	5.09	7.10
24	7.08	5.72	7.08	9.44	11.17	7.66	7.08	9.47
26	9.84	8.00	9.40	12.54	15.05	10.59	9.84	12.67
28	13.70	11.19	12.54	16.72	20.35	14.59	13.69	17.01
30	19.13	15.67	16.80	22.40	27.66	20.09	19.13	22.97
32	26.87	22.02	22.66	30.21	37.85	27.72	26.87	31.25
34	38.04	31.15	30.80	41.06	52.18	38.37	38.04	42.89
36	54.36	44.43	42.23	56.31	72.60	53.40	54.36	59.52
38	78.61	64.07	58.52	78.02	102.05	74.90	78.61	83.65
40	115.31	93.69	82.06	109.41	145.19	106.05	115.31	119.32

*본 연구에서는 보다 정확한 N_γ 비교를 위해 Terzaghi(1943)의 N_γ 를 Kumbhojkar(1993)가 제시한 값으로 대신하였다.

본 연구의 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 본 연구에서 사용된 프로그램에 Terzaghi의 기본가정들을 모두 만족하는 조건을 적용하여 N_γ 를 구하여, Kumbhojkar(1993)이 제안한 N_γ 와 비교 결과는 상대오차가 0.098, 절대오차가 0.092로 거의 값이 일치함을 보였다.

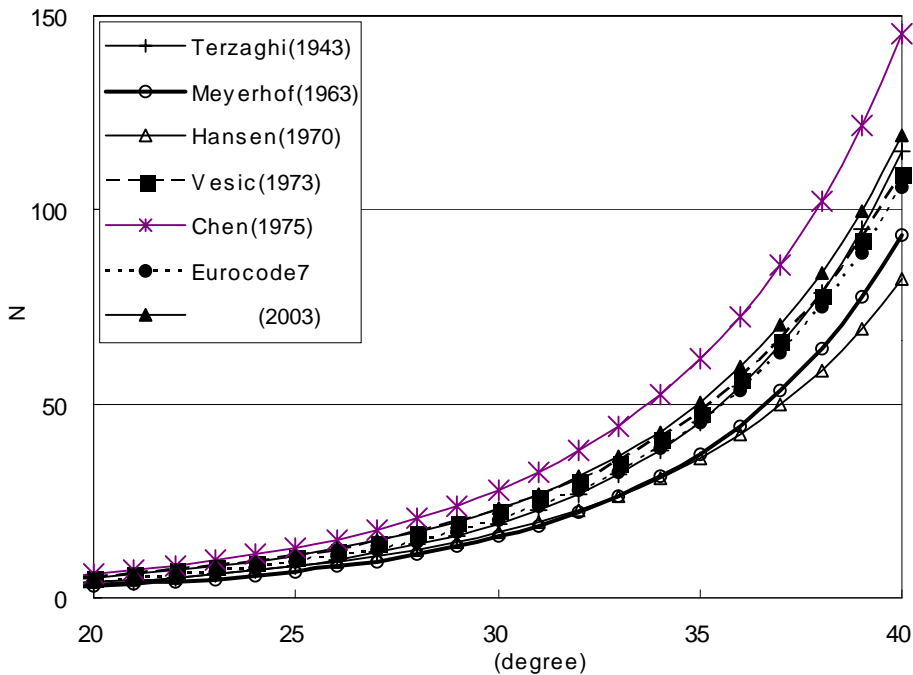


그림 10. 지지력계수 N_γ 치 비교

표 2의 지지력계수 N_{γ} 치들을 그래프로 비교하면 그림 10과 같다. 그림 10에서 Hansen(1970)과 Meyerhof(1963)의 N_{γ} 치가 전반적으로($\phi < 46$) 낮은 값을 보이며, 그 다음이 Terzaghi(Kumbhojkar, 1993)의 N_{γ} 치이며($\phi < 37$), Vesic(1973)과 제안식(2003)의 N_{γ} 치는 거의 비슷한 값을 가지며 전반적으로($\phi < 42$) Terzaghi의 N_{γ} 치보다 큰값을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그리고 Chen(1975)이 제안한 N_{γ} 가 거의 모든 범위에서 가장 큰 값을 보임을 알 수 있다.

5. 결론

Terzaghi(1943)가 제시한 지지력공식은 흙의 점착력과 흙의 자중 및 상재하중에 의한 저항을 각기 독립적으로 평가한다. 그러나 이러한 가정은 보수적인 결과를 주는 것으로 나타났다(Lambe & Whitman; 1979). 이렇게 Terzaghi(1943)의 제안식이 실제의 지반내 지지력을 완벽히 산정할 수 없는데에는 여러 문제들이 있겠으나, 본 연구에서는 지지력계수중 기초하 지반의 내부마찰각에 가장 민감한 변화를 보이는 N_{γ} 의 산정에 대해 고찰해 보았다.

본 연구에서는 Terzaghi(1943)의 기초하 지반의 파괴 메카니즘을 바탕으로 하였지만, 기초하 흙췌기가 수평면과 이루는 각은 DeBeer와 Vesic(1958)이 제안한 $45^{\circ} + \phi/2$ 로 하였고, radial shear zone의 대수나선의 중심은 특정 직선상에 존재하는게 아니라 임의의 지점에 존재한다고 보고 지반내의 모든 지점에 대한 대수나선의 형태를 조사하여 수동토압 P_{γ} 가 최소치일때의 N_{γ} 를 구하였다.

따라서 본 연구를 통한 N_{γ} 는 기존의 Terzaghi(1943)와 Meyerhof(1963), Hansen(1970), Eurocode7이 제안한 N_{γ} 와는 다소 큰 차이를 보였고, Vesic(1973)이 제안한 N_{γ} 와는 일부의 내부마찰각 범위에서는 비슷한 값을 보이며, Chen(1975)의 N_{γ} 보다는 작은 값을 보였다.

지반내 지지력에 영향을 미치는 수많은 요소들을 생각해 볼때, 단순히 지지력 계수만을 새로이 제안함으로써 정확한 지지력 산정방법을 제시하기는 어렵다. 하지만 지지력 산정의 영향인자 하나하나를 논리적으로 산정하고자하는 노력은 공학적으로 많은 의미가 있다고 생각한다. 따라서 본연구에서는 기존의 N_{γ} 값 산정시 적용되는 비논리적인 요소를 보완한 N_{γ} 값 산정을 제시하였다. 앞으로 지지력의 다른 영향 인자들에 대한 연구가 끊임없이 계속되고, 정확한 실제 현장실험 데이터로 이를 비교해 볼 수 있다면, 좀더 실제에 근접한 지지력을 산정할 수 있으리라 사료된다.

참고문헌

1. Braja M. Das (1998). Principles of Geotechnical Engineering, 4th ed., PWS publishing company, pp. 520-565
2. Caquot, A. and Kerisel, J.(1953), "Sul le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulverulent", Proc. 3rd ICSMFE, Zurich, Switzerland(1), pp. 336-337
3. Chen, W. F.(1975), "Limit Analysis and Soil Plasticity", Elsevier Scientific Publishing Company, London.
4. DeBeer, E. E. and Vesic, A. S.(1958), "Etude Experimentale de la Capacité Portante du Sable Sous des Fondations Directes Etablies en Surface", Ann. Trav. Publics Belg., Vol. 59, No. 3
5. Hansen, J. B.(1970) "A revised extended fomula for bearing capacity", Danish Geotechnical Institute, Bulletin No. 28, Copenhagen, Denmark, pp. 3-11
6. Joseph E. Bowles (1997). Foundation Analysis And Design, 5th ed., McGraw-Hill, pp. 213-236
7. Karl Terzaghi (1943). Theoretical Soil Mechanics, Wiley, New York, pp. 120-135
8. Kumbhojkar, A. S.(1993). "Numerical Evaluation of Terzaghi's N_{γ} ", Journal of Geotechnical Engineering. ASCE, Vol. 119, No. GT3, pp. 598-607

9. Meyerhof, G. G.(1951). " The Ultimate Bearing Capacity of Foundations", Geotechnique, vol. 2, No. 4, pp. 301-331
10. Meyerhof, G. G.(1963), "Some recent reserch on the bearing capacity of foundations", Can. Geotech. J., Ottawa, 1(1), pp. 16-26
11. Prandtl, L.(1921), "Über die Eindringungsfestigkeit(Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Basel, Switzerland, Vol. 1, No. 1, pp. 15-20
12. Reissner, H.(1924), "Zum Erddruckproblem", Proc. Int. Congress for Applied Mechanics, Delft, The Netherlands, pp. 295-311
13. T. William Lambe & Robert V. Whitman (1979). Soil Mechanics, SI version., JOHN WILEY & SONS, pp. 195-226
14. Vesic, A. S.(1973). "Analysis of Ultimate Loads on Shallow Foundations", Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, Vol. 99, No. Sm1, pp. 45-73