

강인 칼만필터를 이용한 유도탄 기체 진동 주파수 추정기 설계

나원상, 황익호

국방과학연구소, 유도조종기법팀

Direct Missile Bending Frequency Estimation using the Robust Kalman Filter

Ra, Won-Sang and Whang, Ick-Ho

Department of Guidance & Control, Agency for Defense Development

Abstract - A robust bending frequency tracker is proposed to design the adaptive notch filter which removes the time-varying missile structural modes from the sensor measurements. To do this, the state-space form of a bending frequency model is derived under the assumption that the bending signal could be described as the lightly damped sinusoid. Since the resultant bending frequency model contains the parametric uncertainties in the measurement matrix, the design problem of bending frequency tracker is tackled by applying the robust Kalman filter to the model. This technique could be easily expanded to the multiple frequencies case because it newly illuminates the bending frequency tracking problem in view of general state estimation.

1 서론

본 논문에서는 유도탄 기체진동 신호 제거를 위해 병렬구조의 적응 노치필터를 제안하고 여기에 필요한 밴딩 주파수 추정기 설계 문제를 고려한다. 자세 혹은 가속도 제어를 위해 유도탄에 축력이 가해지면 순간적으로 기체가 휘면서 조종 루프의 가속도 및 가속도 도덕임 신호에 강제 운동과는 관계없는 진동 신호가 실리게 된다. 이렇게 유발된 진동 신호를 기체 밴딩으로 정의하며, 밴딩 주파수는 유도탄의 구조적 특성에 의해 결정된다. 기체 밴딩에 의한 진동 신호는 주파수 특성 및 부호에 따라 공진을 유발할 수 있으므로, 그 크기가 매우 작은 경우라도 조종 루프 혹은 기체의 구조적 불안정성을 초래하는 원인이 될 수 있다 [1]. 이러한 문제점을 해결하기 위한 가장 일반적인 방법은 감지기 출력단 혹은 조종루프 앞 단에 노치 필터를 삽입하는 것이다. 이 경우, 노치 필터 설계는 비행이전에 수행하는 유도탄 구조분석 시험에 의해 측정 혹은 예측된 밴딩 주파수를 기반으로 한다. 불행하게도 실제 비행환경의 불확실성 등에 의해 유도탄의 물리량 등이 변화하므로, 예측된 밴딩 주파수 값과 실제 밴딩 주파수 간에 오차가 존재하는 경우가 많다. 따라서 다양한 상황에 대처하기 위해서는 예측된 밴딩 주파수를 중심으로 비교적 넓은 주파수 영역에 걸쳐 진동 신호 감쇄가 가능하도록 노치필터를 설계하는 것이 바람직하다. 반면, 조종루프 설계관점에서는 필터에 의해 감소되는 위상여유 크기를 최소화 하기위해 가급적 노치 성능이 우수하도록 필터를 설계하는 것이 유리하다.

최근 고기동 유도탄 설계가 일반화 되고, 이에따라 조종루프의 상대 안정도 확보가 매우 어려워지고 있는

상황에서 노치 필터에 의한 안정도 저하 문제를 해결하기 위한 방편으로 적응 노치필터의 필요성이 대두되는 실정이다. 기존의 적응 노치필터 설계 방법들은 일반적으로 주파수 추정문제를 최적화 문제로 접근하여 수치해석 방법을 이용해 주파수를 찾아내거나, 간단한 정현파 신호 모델을 이용한 확장 칼만 필터 알고리즘 등이 주류를 이루고 있다 [2]. 하지만 이러한 방법들은 감지기 측정 잡음에 매우 취약하거나, 실시간 구현 및 필터 운용상의 안정성이 고려되어야 하는 탑재 알고리즘의 특성상 적합하지 않은 경우가 대부분이다 [3].

본 논문에서는 전술한 문제점들을 고려하여 집합추정관점에서 유도된 강인 칼만필터에 기반한 실시간 밴딩 주파수 추정기를 제안한다. 제안되는 밴딩 주파수 추정기는 예측된 밴딩 주파수와 실제 밴딩 주파수 간의 오차를 상태변수로 하며, 구조시험에 의해 얻어진 기체 동특성을 밴딩 주파수 모델링 과정에 충실히 반영한 것이다. 주파수 추정기 설계를 위해 우선 진동신호의 순환관계를 이용하여 주파수 오차에 삼각함수를 취한 값을 상태변수로 하는 상태공간 모델을 찾아낸다. 유도된 주파수 모델을 근거로 강인 칼만 필터링 알고리즘을 이용한 주파수 추정 알고리즘을 제안한다. 제안된 방법은 시변 주파수 특성에 강인한 특성을 가질 뿐만 아니라 추정된 주파수 오차의 크기를 지속적으로 감시함으로써 구조적으로 주파수 추정기의 이상동작에도 대처 가능하다. 이와더불어 기존의 방법과 달리 상태추정 관점에서 주파수 추정문제를 정의하고 주파수 추정기를 순환 필터 형태로 구현함으로써, 여러 종류의 측정치를 주파수 추정에 사용하는 것이 용이할 뿐만 아니라 상태변수를 추가하면 여러개의 밴딩 모드 추정문제에도 확장 가능하다는 장점을 갖는다.

2 밴딩 주파수 모델링 및 추정 문제 정의

밴딩 주파수가 천천히 변한다는 가정하에 다음과 같이 측정 잡음을 포함한 이산시간 진동 신호를 고려한다.

$$d_k = s_k + \bar{v}_k = Ae^{-\zeta T s k} \cos(\omega k + \phi) + \bar{v}_k, \quad \omega = 2\pi f_b T, \quad (1)$$

여기서 \bar{v}_k 는 분산이 $\bar{\sigma}_k$ 인 영평균 백색잡음으로 가정한다. 진동신호 모델 (1)로부터 다음과 같은 순환식을 유도할 수 있다.

$$d_k + e^{-2\zeta T s} d_{k-2} = 2e^{-\zeta T s} (d_{k-1} - \bar{v}_{k-1}) \cos \omega + \bar{v}_k + e^{-2\zeta T s} \bar{v}_{k-2}$$

밴딩 주파수 ω 를 추정하는 문제에서, 주파수 추정이 잘 이루어지는 경우에는 진동을 유발하는 요인에 의해 공

진 현상이 나타나지 않으므로 주파수 추정기의 가관측성이 급격히 저하된다. 따라서 벤딩 주파수가 변경되어 노치 필터가 제대로 동작하지 못하게 될 때까지는 추정 오차가 증가할 수 있다. 조종 알고리즘에 적응 노치 필터를 적용할 때 관찰되는 이러한 고질적인 문제는 조종 루프의 안정도를 저해할 수 있는 요인이다. 언급된 문제점은 사전에 동특성 시험으로 얻어진 주파수 예측치 $\bar{\omega}$ 를 이용함으로써 해결할 수 있다. 즉, 주파수 예측 오차 $\delta\omega$ 가 일반적으로 $\delta\omega \ll \bar{\omega}$ 를 만족한다고 가정하고 미소각 근사를 통해 다음 관계를 얻을 수 있다.

$$\cos \omega = \cos(\bar{\omega} + \delta\omega) \simeq \cos \bar{\omega} - \sin \bar{\omega} \sin \delta\omega \quad (3)$$

대부분의 시변특성은 사전에 주어진 주파수 예측치 $\bar{\omega}$ 에 반영되어 있으므로 실제로 벤딩 주파수 오차 $\delta\omega$ 의 시변특성은 두드러지지 않는다. 따라서 위의 근사식을 순환식 (2)에 대입해 벤딩 주파수 추정기 설계를 위한 상태 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k \\ y_k = (H_k + \Delta H_k)x_k + v_k \end{cases} \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} x_k &= \sin \delta\omega, & y_k &= d_k - 2e^{-\zeta T_s} d_{k-1} \cos \bar{\omega} + e^{-2\zeta T_s} d_{k-2} \\ v_k &= \bar{v}_k - 2e^{-\zeta T_s} \bar{v}_{k-1} \cos \bar{\omega} + e^{-2\zeta T_s} \bar{v}_{k-2} \\ H_k &= -2e^{-\zeta T_s} d_{k-1} \sin \bar{\omega}, & \Delta H_k &= 2e^{-\zeta T_s} \bar{v}_{k-1} \sin \bar{\omega} \end{aligned}$$

따라서 진동 주파수 추정 문제는 측정행렬 H_k 이 주어져 있는 경우 측정 행렬의 불확실성 ΔH_k 를 고려하여 측정치 y_k 로부터 파라미터 x_k 를 동정하는 문제로 귀결된다. 감지기에 의해서 측정된 각속도는 강체 운동과 기체 벤딩 신호를 포함하므로, 조종루프의 대역폭 보다 2.5 ~ 3.0배 넓은 대역폭을 갖는 고역통과 필터를 이용하여 기체 벤딩 신호 d_k 만을 추출해 낼 수 있다. 진동 주파수 예측 오차의 시변특성을 반영하기 위한 공정잡음 u_k 는 편의상 분산이 Q_k 인 영평균 백색잡음으로 가정한다. 측정잡음 v_k 의 분산 $R_k = \text{cov}(v_k, v_k)$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} R_k &= E[(\bar{v}_k - 2e^{-\zeta T_s} \bar{v}_{k-1} \cos \bar{\omega} + e^{-2\zeta T_s} \bar{v}_{k-2})^2] \quad (5) \\ &= (1 + e^{-4\zeta T_s} + 4e^{-\zeta T_s} \cos^2 \bar{\omega}) \bar{R}_k \end{aligned}$$

3 벤딩 주파수 추정 알고리즘

본 절에서는 집합추정 관점에서 유도된 강인 칼만 필터링 알고리즘을 이용하여 적응 벤딩 주파수 추정 알고리즘을 설계한다. 측정행렬에 파라미터 불확실성이 포함된 이산시간 불확정 선형 시스템에 대한 강인 칼만 필터식을 표 1에 정리하였다. 적응 벤딩 주파수 추정기는 표 1의 강인 칼만 필터식을 시스템 모델 (4)에 적용함으로써 손쉽게 유도할 수 있다.

$$F_k \mapsto I, \quad G_k \mapsto I \quad (6)$$

강인 칼만 필터식을 적용하기 위해 시스템 모델 (4)에서 측정행렬의 파라미터 불확실성을 다음과 같이 재정의한다.

Table 1: 집합추정 관점에서 유도된 강인 칼만 필터 [4]

<ul style="list-style-type: none"> • State-space equation $\begin{cases} x_{k+1} = F_k x_k + x_k + G_k u_k \\ y_k = H_k x_k + E_k \Delta_k K_k x_k + v_k \\ s_k = K_k x_k \end{cases}$ • Definitions $\tilde{H}_j = \begin{bmatrix} H_j \\ K_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_j = \begin{bmatrix} R_j + E_j E_j^T & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ • Robust Kalman filter $\begin{aligned} \hat{x}_{k k} &= (I - P_{k k} K_k^T K_k) \hat{x}_{k k-1} + K_{f,k} (y_k - H_k \hat{x}_{k k-1}), \\ \hat{x}_{k+1 k} &= F_k \hat{x}_{k k}, \\ K_{f,k} &= P_{k k} H_k^T (R_k + E_k^T E_k)^{-1} \\ P_{k+1 k} &= F_k P_{k k} F_k^T + G_k Q_k G_k^T, \\ P_{k k}^{-1} &= P_{k k-1}^{-1} + \tilde{H}_k^T \tilde{R}_k^{-1} \tilde{H}_k \end{aligned}$ • Existence condition $P_{k k}^{-1} = P_{k k-1}^{-1} + \tilde{H}_k^T \tilde{R}_k^{-1} \tilde{H}_k > 0$

$$\Delta H_k = E_k \Delta_k K_k = 2e^{-\zeta T_s} \bar{v}_{k-1} \sin \bar{\omega} \quad (7)$$

여기서 파라미터 불확실성은 $\|\Delta_k\| \leq 1$ 을 만족하는 것으로 가정한다. 실제 상황에서는 엄밀한 의미에서 에너지가 무한대인 백색잡음이 존재하지 않으므로 근사적으로 감지기 측정잡음 \bar{v}_k 가 3σ 범위 내에 존재한다고 가정해도 일반성을 잃지 않는다.

$$2e^{-\zeta T_s} \bar{v}_{k-1} \sin \bar{\omega} \leq 6e^{-\zeta T_s} \sqrt{\bar{R}_{k-1}} \sin \bar{\omega} \triangleq E_k K_k \quad (8)$$

벤딩 주파수 추정문제의 경우 시스템을 구성하는 행렬들과 사후 추정오차 공분산 행렬 P_k 모두 스칼라 값이므로 주파수 추정을 위한 필터식은 다음과 같이 간략하게 정리된다.

$$\hat{x}_k = (1 - P_k K_k^2) \hat{x}_{k-1} + \frac{P_k H_k^2}{R_k + E_k^2} (y_k - H_k \hat{x}_{k-1}), \quad \hat{x}_0 = 0 \quad (9)$$

$$P_k = \frac{P_{k-1} + Q_{k-1}}{1 + (P_{k-1} + Q_{k-1}) \left(\frac{H_k^2}{R_k + E_k^2} - K_k^2 \right)}, \quad P_0 = \text{given} \quad (10)$$

최종적인 적응 노치 필터의 중심주파수는 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{\omega}_k = \bar{\omega}_k + \sin^{-1} \left(\lim(\hat{x}_k, 1.0) \right) \quad (11)$$

지금까지 설계된 벤딩 주파수 추정기를 포함한 적응 노치 필터 구조는 그림 1과 같다. 노치 필터의 오동작을 막기 위해 주파수 예측오차 $\delta\omega$ 의 추정치가 허용된 범위를 넘는 경우 그 값을 제한할 수 있다.

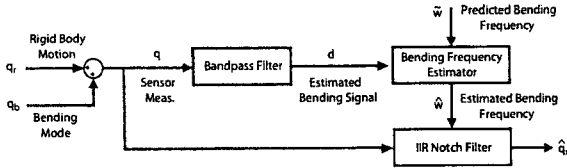


그림 1: 적응 노치 필터 구조

4 시뮬레이션 결과

제안된 기체 진동 주파수 추정기의 추정 성능을 확인하기 위해 그림 1의 추진구간 벤딩 각속도 자료를 사용한다. 성능평가를 위해 식 (2)의 순환관계를 만족하는 진동신호 s_k, s_{k-1} 및 진동신호의 크기 A 를 상태변수로 하는 확장칼만필터 [2]와 주파수 직접 추정방법으로 널리 사용되는 PSD(Pisarenko Harmonic Decomposer)[3] 알고리즘을 비교 대상으로 하였다. 제안된 알고리즘의 초기 값 및 설계 파라미터는 다음과 같이 설정한다.

$$\hat{x}_{0|0} = 0, P_{0|0} = 0, \zeta = 0.0, T_s = 2.5(ms)$$

$$Q_k = (T_s \sin(2\pi \cdot 1.0 \cdot T_s))^2, \bar{R}_k = 2.8 \cdot 10^{-7} (rad/s)^2,$$

$$E_k = 0.24 \sqrt{\bar{R}_{k-1}}, K_k = 25 \sin \bar{\omega}_k$$

시험 자료를 이용해 시뮬레이션을 수행한 결과는 그림 2와 같다. 추정 성능 비교를 위해 푸리에 변환을 이용한 스펙트럼 해석 결과로부터 산출된 진동 주파수가 포함되어 있는 오차는 무시할 수 있다고 가정한다. 실험 결과, 제안된 강인 주파수 추정 필터의 추정 오차는 벤딩 주파수의 시변 특성이 나타나는 구간에서 평균적으로 1Hz 이내가 되는 것으로 판단된다. 제안된 알고리즘은 동특성 시험결과로부터 예측된 진동 주파수를 모델링 과정에 적절히 반영함으로써 가관측성이 결여된 9초 부근에서도 비교적 만족할만한 추정 성능을 보여준다. 진동신호의 위상 및 크기가 급격히 변화하는 2.5초 및 3.5초에서 순간적인 천이 현상이 발견되지만 기존의 PSD 알고리즘 보다는 과도 상태에서의 진폭이 크게 개선되었을 뿐만 아니라, 확장 칼만필터에 비해서는 훨씬 수렴속도가 우수한 것으로 판단된다. 또한 진동신호 측정 잡음에 대한 통계적 정보가 부족한 상황에 대처하기 위해 \mathcal{H}_∞ 필터를 주파수 추정에 적용한 방법 [3]이 강인성 확보에 치중하여 추정 성능 관점에서 지나치게 보수적인 경향을 보이는 반면, 강인 칼만 필터를 이용한 방법은 측정 잡음의 특성을 적절히 반영할 수 있으므로 실제 상황에서 성능 향상을 기대할 수 있다는 장점이 있다.

5 결론

본 논문에서는 기체 벤딩 주파수의 시변 특성을 고려한 강인 벤딩 주파수 추정기를 제안하였다. 제안된 알고리즘은 계산량이 비교적 적을 뿐만 아니라, 예측된 주파수를 이용하여 가관측성이 결여된 상태가 지속되는 상황에서 주파수 추정치의 이상 동작 상황에 대처할 수 있는 구조적 장점을 갖는다. 추후, 정량적인 성능 예측을 위해 필터의 안정성과 관련된 분석이 뒤따라야 할 것으로 생각된다.

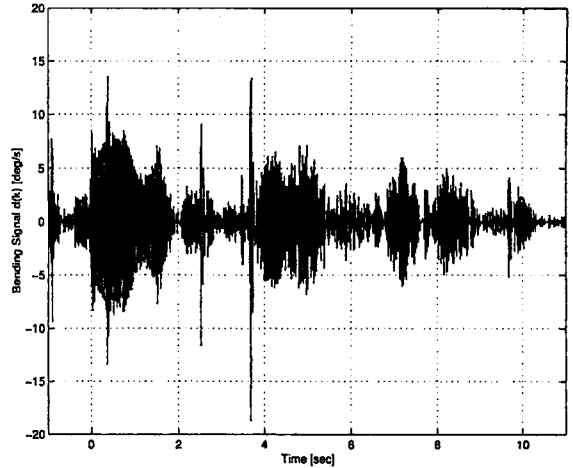


그림 2: 각속도로부터 추출된 기체 진동 신호

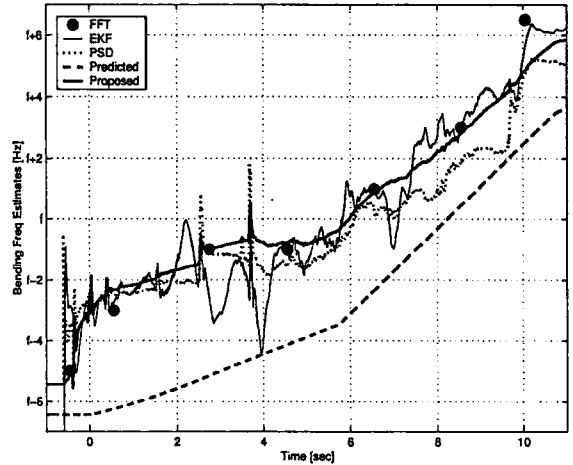


그림 3: 벤딩 주파수 추정 결과

References

- [1] Greensite, A. L., *Control Theory : Volume II, Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems*, Spartan Books, (1970).
- [2] Routray, A., Pradhan, A. K. and K. P. Rao, "A Novel Kalman Filter for Frequency Estimation of Distorted Signals in Power Systems", *IEEE Trans. Instr. Measurement*, vol. 51, no. 3, (2002), pp. 469-479.
- [3] Ra, W.S., "Practical Adaptive Notch Filter for Missile Bending Mode Rejection", *IEE Electron. Letters*, vol. 41, (2005), pp. 228-229.
- [4] Ra, W. S., Jin, S. H. and J. B. Park, "Set-Valued Estimation Approach to Recursive Robust \mathcal{H}_∞ Filtering", *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 6, (2004), pp. 773-782.