

시간지연 선형 시스템의 시간지연 종속  $H_\infty$  제어

이연규, 배진호, 김진훈

충북대학교 전기전자컴퓨터공학부 제어계측공학과

Delay-Dependent  $H_\infty$  control of Time-delayed Linear Systems

Yeom-Gui Yi, Jin-Ho Bae, Jin-Hoon Kim

Dept. of Control And Instrumentation Eng. Chung-buk National University

**Abstract** - 이 논문에서는 시간 지연 선형시스템에 대하여 시간 지연에 종속인 새로운  $H_\infty$ 제어에 관한 결과를 제시한다. 새롭게 제시된 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 이용하여 시간지연 선형시스템에 대한 보다 개선된 시간지연 종속  $L_2$ 이득 안정화 조건을 유도한 후, 이 결과를 바탕으로 시간지연 선형시스템에 대한 상태 궤환  $H_\infty$ 제어기 설계방법을 제시한다. 제시되는 결과들은 LMI 형태로 주어지고, 또한 예제를 통하여 제시된 결과의 유용성을 보인다.

된 제어기의 유용성을 확인한 후 6장에서 결론을 맺는다.

표기법 : 임의의 실수 대칭행렬  $X, Y$ 에 대하여  $X > Y (X \geq Y)$ 는  $X - Y$ 가 양확정(준양확정)임을  $X < Y (X \leq Y)$ 는  $X - Y$ 가 음확정(준음확정)임을 나타내고,  $I$ 는 적절한 차원의 항등행렬을,  $(\cdot)^T$ 는 임의의 벡터 또는 행렬의 전치를 표시한다. 끝으로  $x_t = x(t + \theta), -2\bar{d} \leq \theta \leq 0$ 이다.

1. 서 론

2. 문제 기술 및 예비 결과

시스템의 동적 상태 방정식 내에 시간 지연 항을 포함하고 있는 선형시스템에 대한 안정화 조건이나 안정성을 보장하는 제어기를 설계하는 문제는 시간 지연 항이 시스템의 불안정성이나 성능 하락의 원인이 될 수 있기 때문에 오랫동안 연구의 대상이 되어 왔다[2]-[11]. 시간지연 선형시스템의 안정화 조건을 구하는 문제는 크게 시간지연 독립적인 안정화 조건과 시간지연 종속적인 안정화 조건을 구하는 문제로 분류할 수 있는데, 전자는 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수와 시스템 상태 방정식의 대입을 이용하여 비교적 용이하게 안정화 조건을 구하는 것이 가능하다. 또한 시간지연 종속 안정화 조건의 경우에는 시간지연 요소를 결과적인 LMI 표현 속에 포함시킬 수 있는 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 제시한 후 시스템의 상태 방정식 혹은 Newton-Leibnitz 방정식등과 결합하여 시간지연 안정화 조건을 제시하는 것이 가능하다. 그러나 이러한 시간지연 종속 안정화 조건은 시스템 상태방정식과 Newton-Leibnitz 공식의 대입 혹은 교차항에 대한 부등식 대치에 의해 비교적 보수적인 결과를 나타내기 때문에 부등식 대치를 회피하면서 교차항들 사이의 관계성을 적절히 표현할 수 있는 관계식을 유도하여 안정성을 유지하면서도 보다 큰 시간지연을 허용할 수 있는 LMI 표현을 구하는 것이 중요한 문제로 대두되어 왔다. 따라서 이 논문에서는 이전의 보수적 결과의 원인을 해결하기 위해 새로운 형태의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 제시한 후, 이 결과를 바탕으로 시간지연 선형 시스템에 대하여 왜란(w)로부터 시스템의 측정출력(z)까지의  $L_2$ 이득이 최소가 되게 하는  $H_\infty$  제어기의 설계방법을 제시한다. 이 논문은 다음과 같은 순서로 구성된다. 2장에서는 대상이 되는 시간지연 시스템과 새로운 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수 및 안정화 조건 유도를 위한 예비 결과를 제시한다. 3장에서는 시간지연 선형시스템에 대하여  $L_2$ 이득 해석에 대한 결과를 제시한 후, 4장에서는 시간지연 선형시스템에 대한 안정화 조건을 이용하여 시간지연 선형시스템의  $L_2$ 이득을 최소로 해주는 제어기 설계방법을 제시한다. 5장에서는 수치예제를 통해 제시

다음으로 주어지는 시간지연 선형시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t-d) + B_2 u(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_2 u(t) + D_1 w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ 은 시스템의 상태,  $u \in R^m$ 은 제어,  $w \in R^d$ 는 외란,  $z \in R^p$ 는 측정출력,  $d \in [0, \bar{d}]$ 는 시스템의 시간지연이며,  $A, A_d, B_1, B_2, C, D_1, D_2$ 는 알려진 상수 행렬이다. 그리고 시스템의 초기 상태는 다음을 만족한다.

$$x(t) = 0, \forall t \in [-\bar{d}, 0]. \quad (2)$$

이 논문에서는, 먼저  $u(t) = 0$ 인 경우 외란(w)로부터 측정출력(z)까지의 시간지연(d)에 따른  $L_2$ 이득의 최소값을 구하는 문제에 대하여 LMI 형태로 된 결과를 제시하고, 다음으로 시간지연(d)에 따른  $L_2$ 이득이 최소가 되도록 하는 다음의 상태궤환 제어기를 구하는 것이다.

$$u(t) = Kx(t). \quad (3)$$

다음의 보조정리들은 주요결과의 증명에 이용되는 유용한 결과이다.

보조정리 1 : 다음의 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \left( \int_{t-d}^t x(s) ds \right)^T Z \left( \int_{t-d}^t x(s) ds \right) \\ & \leq d \int_{t-d}^t x^T(s) Z x(s) ds, Z > 0 \end{aligned} \quad (4)$$

보조정리 2: 다음과 같이 함수  $V_1, V_2, V_3$ 를 정의하자.

$$\begin{aligned}
V_1(x_t) &= x^T(t)Px(t) \\
V_2(x_t) &= \int_{t-d}^t x^T(\theta)Qx(\theta)d\theta \\
V_3(x_t) &= \int_{-d}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(\theta)Z\dot{x}(\theta)d\theta d\beta
\end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $P, Q, Z > 0$ 이고,  $x(t) = 0, t \in [-\bar{d}, 0]$ 이다. 그러면, 시간  $t=0$ 에서의 이들 함수 값은 모두 영이다. 즉,  $V_1(x_0) = V_2(x_0) = V_3(x_0) = 0$ 이다.

### 3. $L_2$ 이득 해석

다음의 정리는 시스템(1)로 주어진 시간지연 선형시스템에 대하여 시간지연에 종속적인  $L_2$ 이득을 제시하는 결과이다.

**정리 1 :** 다음을 만족하는 대칭 행렬  $P, S_1, S_2, Z > 0$ 와 임의의 행렬  $N_1, N_2, N_3, N_4$ 가 존재하면, 외란( $w$ )으로부터 측정출력( $z$ )까지의  $L_2$ 이득은 모든  $d \leq \bar{d}$ 에 대하여  $\gamma$ 보다 적다.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \phi_{11} & PA_d + A^TZA & S_2 & PB_1 + A^TZB_1 & C^T \\ \star & -S_1 + A_d^TZA_d & S_2 & 0 & 0 \\ \star & \star & -\frac{1}{d^2}Z & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 + B_1^TZB_1 & D_1^T \\ \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T - N_1 + N_2^T - N_1 + N_2^T & N_4^T & 0 \\ \star & -N_2 - N_2^T - N_2 - N_3^T - N_4^T & 0 \\ \star & \star & -N_3 - N_3^T - N_4^T & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (6)
\end{aligned}$$

여기서  $\phi_{11} = A^TP + PA + S_1 + A^TZA$ .

**간략한 증명 :** 다음의 Lyapunov-Krasovskii 함수에서  $V(x_t) = x^T Px(t) + \int_{t-d}^t x^T(s)(S_1 + 2S_2)x(s)ds + \frac{1}{d} \int_{-d}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s)Z\dot{x}(s)dsd\beta$  (7)

위의 보조정리 2로부터  $V(x_0) = 0$ 이라는 사실과, 보조정리1을 이용하여 시스템에 궤적에 따른 다음을 계산한 후

$$\frac{d}{dt} V(x_t) + z^Tz - \gamma^2 w^T w \quad (8)$$

여기에 다음의 항등관계를 이용하면

$$\begin{aligned}
& \left[ x^T(t)N_1 + x^T(t-d)N_2 + \int_{t-d}^t \dot{x}^T(s)ds \cdot N_3 + w^T(t)N_4 \right] \\
& \cdot \left[ x(t) - x(t-d) - \int_{t-d}^t \dot{x}(\theta)d\theta \right] = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

구하여진다. 자세한 것은 지면상 생략한다.

### 4. $H_\infty$ 제어기 설계

다음의 정리는 시스템(1)로 주어진 시간지연 선형시스템에 대한 시간지연에 종속적인  $L_2$ 이득을 최소화하는 제어기 설계에 관한 결과이다.

**정리 2 :** 다음을 만족하는 대칭 행렬  $Q, S_1, S_2 > 0$ 과 임의의 행렬  $Y, W, N_1, N_2, N_3, N_4$ 가 존재하면, 다음의 상태궤환 제어기는

$$u(t) = Kx(t); K = YQ^{-1} \quad (10)$$

외란( $w$ )으로부터 측정출력( $z$ )까지의  $L_2$ 이득이 모든  $d \leq \bar{d}$ 에 대하여  $\gamma$ 보다 적음을 보장한다.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \phi_{11} & A_dQ & S_2 & B_1 & QA^T + Y^TB_2^T + W^T & QC^T + Y^TD_2^T \\ \star & -S_1 & S_2 & 0 & QA_d^T - W^T & 0 \\ \star & \star & -\frac{\alpha}{h^2}Q & 0 & -W^T & 0 \\ \star & \star & \star & -\gamma^2 & B_1^T & D_1^T \\ \star & \star & \star & \star & -\frac{1}{\alpha}Q & 0 \\ \star & \star & \star & \star & \star & -I \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} N_1 + N_1^T - N_1 + N_2^T - N_1 + N_2^T & N_4^T & 0 \\ \star & -N_2 - N_2^T - N_2 - N_3^T - N_4^T & 0 \\ \star & \star & -N_3 - N_3^T - N_4^T & 0 \\ \star & \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & \star & \star & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

여기서  $\phi_{11} = AQ + QA^T + B_2Y + Y^TB_2^T + S_1$

**간략한 증명 :** 다음의 Lyapunov-Krasovskii 함수에서

$$\begin{aligned}
V(x_t) &= x^T Q^{-1}x(t) + \int_{t-d}^t x^T(s)(S_1 + 2S_2)x(s)ds \\
& + \frac{\alpha}{d} \int_{-d}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}^T(s)Q^{-1}\dot{x}(s)dsd\beta \quad (12)
\end{aligned}$$

위의 보조정리 2로부터  $V(x_0) = 0$ 이라는 사실과, 보조정리1을 이용하여 시스템에 궤적에 따른 다음을 계산한 후

$$\frac{d}{dt} V(x_t) + z^Tz - \gamma^2 w^T w$$

여기에 다음의 항등관계를 이용하면

$$\begin{aligned}
& \left[ x^T(t)N_1 + x^T(t-d)N_2 + \int_{t-d}^t \dot{x}^T(s)ds \cdot N_3 + w^T(t)N_4 \right] \\
& \cdot \left[ x(t) - x(t-d) - \int_{t-d}^t \dot{x}(\theta)d\theta \right] = 0
\end{aligned}$$

구하여진다. 자세한 것은 지면상 생략한다.

### 5. 수치 예제

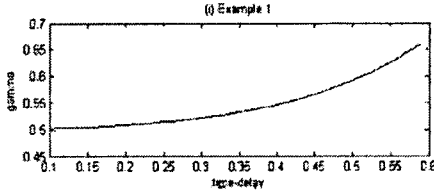
**예제 1 :** 다음의 상수 행렬로 주어지는 시간지연 선형 시스템 (1)을 를 고려하자[10].

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0.2 \ 0.2], D = 0.5$$

정리 1에 의하여 시간지연( $d$ )에 따른  $L_2$ 이득을 구한 후 이를 그림으로 나타낸 것이 그림 1이다.

그림 1. 시간지연에 따른  $L_2$ 이득



다음의 표 1은 기존의 결과와 새로운 결과를 나타낸다.

표 1. 예제 1의 결과

방법	ref[4]	ref[6]	ref[7]	ref[10]	정리1
$\gamma$	2.251	-	-	1.469	1.1285*
$\bar{d}$	0.268	0.271	0.139	0.325	0.344

예제 2: 다음의 상수 행렬로 주어지는 시간지연 선형시스템 (1)을 틀 고려하자[10].

$$A = \begin{bmatrix} -1.9 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1 & -1.1 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.3 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], D = 0.4$$

다음은 정리 2에 의하여 예제 2에 주어진 시간지연 선형시스템에 대하여  $H_\infty$  제어를 설계한 후 시간지연( $d$ )에 따른  $L_2$ 이득과 이 때의 제어규칙  $K$ 를 구한 후 이를 이전의 결과들과 비교하여 나타낸 것이 그림 2와 표 2이다.

그림 2. 시간지연에 따른  $L_2$ 이득

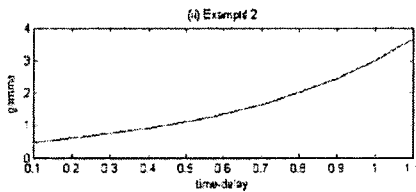


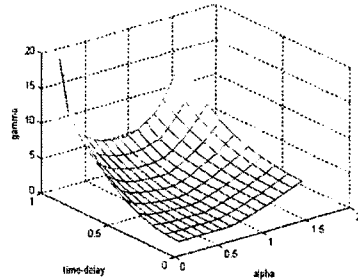
표 2. 예제 2의 결과

	ref[6]	ref[7]	ref[10]	정리2
$\bar{d}$	0.2284	0.1800	0.2648	> 1.2
$\gamma$	1.00	1.28	1.27	0.8088*

## 6. 결 론

이 논문에서는 기존의 시간지연에 의존하는 시간지연 선형시스템에 대한 안정화 조건들이 내포하고 있었던 Newton-Leibnitz 방정식의 대입이나 교차항에 대한 부등식 대체에 기인하는 보수적 결과를 해결하기 위해 새로운 형태의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 제안하

그림 3 시간지연( $d$ )과 변수  $\alpha$ 에 따른  $\gamma$ 의 변화



였다. 제안된 새로운 형태의 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수는 덧셈의 결과가 양확정인 분리된 두 개의 행렬로 표시되어 결과적인 LMI의 음확정 가능성을 높여 주었을 뿐만 아니라 비교적 간단한 일련의 대수적 조작을 통해 쉽게 LMI 형태로 표현 가능 하였다. 이렇게 새롭게 제시된 Lyapunov-Krasovskii 후보 함수를 이용하여 왜란( $w$ )의 영향을 받고 있는 시간지연 선형시스템에 대한  $H_\infty$  안정화 조건 및 왜란( $w$ )로부터 시스템의 측정출력( $z$ )까지의  $L_2$  이득이 최소가 되게 하는  $H_\infty$  제어기의 설계 방법을 LMI 형태로 제시하였다. 다양한 예제들을 통하여 이전에 제안된 제어기 설계 방법들과 비교한 결과 제안된 제어기의 성능이 우수함을 확인할 수 있었다.

## [참 고 문 헌]

- [1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA:SIAM, 1994.
- [2] X. Li and C. E. de Souza, "Delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain linear delay systems : A linear matrix inequality approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 42, no. 8, pp. 1144-1148, Aug. 1997.
- [3] S. I. Niculescu, " $H_\infty$  Memoryless control with an  $\alpha$ -stability constraint for time-delay systems : An LMI approach," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 43, no. 5, pp. 739-743, May. 1998.
- [4] C. E. de souza and X. Li, "Delay-dependent robust  $H_\infty$  control of uncertain linear state-delayed systems," *Automatica*, vol. 35, pp. 1313-1321, 1999.
- [5] Y. S. Moon, P. Park, W. H. Kwon and Y. S. Lee, "Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems," *Int. J. Control*, vol. 74, pp. 1447-1455, 2001.
- [6] E. Fridman, "New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems," *Syst. Control Lett.*, vol. 43, pp. 309-319, 2001.
- [7] E. Fridman and U. Shaked, "A Descriptor system approach to  $H_\infty$  control of linear time-delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 47, no. 2, pp. 253-270, Feb. 2002.
- [8] E. Fridman and U. Shaked, "Delay-dependent stability and  $H_\infty$  control and time-varying delay systems," *Int. J. Control*, Vol 76, pp. 48-60, 2003.
- [9] M. Wu, Y. He, J. H. She and G. P. Liu "Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems," *Automatica*, vol. 40, pp. 1435-1439, 2004.
- [10] M. S. Mahmoud and A. Ismail, "New results on delay-dependent control of time-delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 1, pp. 95-100, Jan. 2005.
- [11] S. Xu and J. Lam, "Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 50, no. 3, pp. 384-387, Mar. 2005.