2005년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2005. 7. 18 - 20

안정도 여유와 시간응답 규격을 보장하는 PID 이득 셋 결정

김근식, 김영철
아주자동차대학, 충북대학교

The PID Set Simultaneously Satisfied Stability Margins and Time Response Specifications

Kim, Keunsik, Kim, Youngchol
Ajou Motor College, Chungbuk National Univ.

Abstract - 본 논문은 선형시불변시스템(LTI) 대하여 안정도여유(이득 및 위상여유)와 시간응답 규격(오버슈트와 응답속도)을 보장하는 PID 제어기의 이득 셋을 결정하는 방식을 제시한다. 이 방법은 시스템을 안정화시키는 전체 PID 제어기의 이득 셋을 결정하는 최근의 결과를 이용한다[1]. 본 논문에서는 폐루프 특성다항식의 계수공간에서 계수와 안정도여유 및 시간응답 성능요구조건과의 관계를 제시한다. 제시한 방법을 이용하여 안정도를 보장하고 안정도여유와 시간영역 규격을 동시에 만족하는 PID 이득 셋을 구한다. 예제를 통해 실제 설계에 매우 유용함을 보였다.

1. 서 론

산업현장 설계자들이 대부분 선호하고 있는 제어기는 PID, PI, PD 등 저차제어기인데, 이는 구조가 단순하면서도 성능요구조건을 만족할 수 있다는 장점이 있다. 시간영역에서의 과도응답특성(오버슈트나 정착시간)과 안정도여유(위상 및 이득여유)는 제어기 설계에서 가장 근간이 되는 규격이다. 이러한 규격을 만족하는 저차 제어기를 설계할 때 극 배치 방법 등이 주로 사용되어왔는데, 3차 이상의 고차시스템에 대하여는 정확한 해석적인 방법이 알려져 있지 않았기 때문에 주로 2차 시스템으로 근사화하여 문제를 해결하고 있다. 현대 제어기 설계의 관점은 시스템을 안정화하는 제어기 이득 셋을 먼저 결정한 후, 이 셋 내에서 규격을 만족하는 제어기 이득을 선택한다. 이러한 관점에서 최근에 Datta[1]는 Hermite-Biehler정리를 일반화하여 폐루프시스템을 안정화하는 전체 PI, PID이득 셋을 구하는 방법을 제시하였다. 또한 우리는 이 정리를 PD제어기 이득 셋을 구하는 알고리즘으로 확장하였다[2,3]. Xu[4]는 시간지연요소를 갖는 시스템에 대하여 안정한 PID 이득 셋으로부터 폐루프시스템을 안정하게하는 전체 PID이득 셋을 구하는 방법을 제시하였다.

최근, Kim[5]등은 소위 특성비지정법(characteristic ratio assignment)을 제시하여 폐루프시스템의 목표특성다항식을 구하는 해를 발표했다. 이를 근거로 우리는 특성비지정법을 확장하여 시간응답 규격을 만족하는 PI, PD, PID 이득 셋을 구였다[6,7,8].

본 논문에서는 시간지연요소를 포함하는 LIT플랜트에 대하여 안정도여유와 시간영역 규격을 동시에 만족하는 PID제어기의 이득 셋을 구하는 알고리즘을 제시한다. 최종 결과는 제어기 계수 중 고정한 k_p에 대하여 2차원 계수 공간에서 그래픽으로 표현된다. 적용 예를 통하여 제시된 방식의 유용성을 보인다.

2. 계수공간에서 시간응답과 안정도여유해석

2.1 시간응답

양의 실수 계수를 갖는 다음과 같은 특성다항식을 고려하자.

$$\delta(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0. \quad (a_i > 0) \tag{1}$$

특성다항식에 대한 계수의 특성비 α_i와 일반화시정수(generalized time constant) τ는 식(2)와 식(3)과 같이 각각 정의한다.

$$\alpha_1 := \frac{a_1^2}{a_0 a_2},\ \alpha_2 := \frac{a_2^2}{a_1 a_3},\ \cdots,\ \alpha_{n-1} := \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}a_n} \tag{2}$$

$$\tau := \frac{a_1}{a_0} \tag{3}$$

특성다항식 $\delta(s)$의 모든 계수를 α_i 와 τ로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_1 = a_0 \tau \tag{4}$$

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}^2\alpha_{i-3}^3\cdots\alpha_2^{i-2}\alpha_1^{i-1}},\quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{5}$$

이 때 식(4)과 식(5)를 이용하면 α_i , τ, a_0에 의해 특성다항식 $\delta(s)$를 역으로 표현할 수 있다. 지금까지 1차 시스템이 아니면 시정수의 정의는 명확하지 않았다. 최근에 Kim등[5]은 특성비지정법을 제시하고 특성다항식 계수와 시간응답과의 관계를 제시하였다. 또한 위에서 정의한 τ가 정확하게 시스템의 응답속도에 관계함을 해석적으로 보였다. 이 결과에 따르면 동일한 특성비를 갖는 같은 차수의 시스템은 시간응답의 모양을 변화시키지 않고 τ에 의해 응답속도를 임의로 조정할 수 있다. 이러한 결과를 PID등 저차제어기에 적용하기 위하여 우리는 특성비의 감도해석을 통해 스텝응답의 오버슈트가 없거나 매우 미미한 과도응답성능을 내는 목표시스템의 셋이 다음 부등식 조건을 만족함을 보였다[7].

$$\alpha_1 \ge \alpha_1^*,\ \alpha_2 \ge \alpha_2^*,\ \alpha_3 \ge \alpha_3^*,\ \tau^- \le \tau \le \tau^+. \tag{6}$$

따라서 식(6)의 조건은 시간응답규격을 만족하는 PID이득 셋을 결정하는데 이용된다[6,8].

2.2 안정도여유

시간지연요소를 갖는 임의 차수를 갖는 LTI 플랜트 $P(s) = N(s)/D(s)e^{-T_d s}$에 대하여 안정도여유 규격을 만족하는 PID제어기 $C(s) = (k_i + k_p s + k_d s^2)/s$의 이득 셋을 구하는 문제를 고려한다.

이 문제에 관해 특성다항식의 주파수응답을 이용하는 방법이 제시되었다[9]. 이 방법은 3가지의 2-D평면의 셋에 대한 교집합을 이용하여 문제를 해결하고자 하였다. 즉, 각각의 (k_p, k_i)평면, (k_p, k_d)평면 그리고 (k_i, k_d)평면의 교집합을 얻는 방법인데, (k_p, k_i)평면과 (k_p, k_d)평면

의 안정도 경계영역은 볼록하지 않는 임의의 곡선 형태의 폐곡면으로 형성되기 때문에 매우 복잡한 프로그래밍이 요구되므로 산업현장에서 적용하기가 곤란하다.

본 논문에서는 [1,4]의 결과인 LTI플랜트를 안정하게 하는 PID제어기 이득 셋으로부터 출발한다. 이때의 PID 이득 셋을 A_s라고 표기하기로 한다. 제시되는 방법은 Nyquist선도를 이용하여 시스템을 안정화는 PID 이득 셋 내에서 안정도여유를 만족하지 않는 제어기 이득 셋을 그림 1과 같이 고정한 k_p*에 대하여 (k_i,k_d)평면으로부터 추출하는 방법이다.

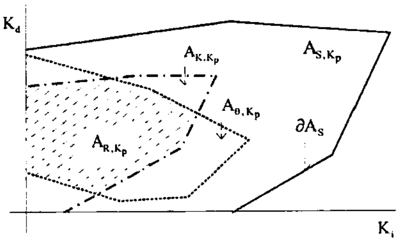

그림 1. 안정도여유를 만족하는 PID 이득 셋

안정한 영역만을 고려한다면, Nyquist선도에서 플랜트의 우반면에 존재하는 극점의 수에 따라 $-1+j0$을 반시계방향으로 감싸는 회전수를 고려할 필요가 없이 이득 및 위상여유를 구할 수 있다. 이는 Nyquist선도에서 $-1+j0$을 지나는 PID 제어기 이득은 안정한 영역의 경계선이기 때문이다. 그리고 셋 내부는 모두 안정도를 보장하면서 안정도여유를 가지고 있다. 따라서 안정한 PID 제어기 이득 셋 영역의 경계선으로부터 경계내부로, 주어진 안정도여유 규격을 만족하지 않는 PID제어기 이득 영역을 제거하면 주어진 규격을 만족하는 해를 얻을 수 있다. 개루프전달함수를 다음과 같이 표현하자.

$$G_0(s) = C(s)P(s) = (k_i + k_p s + k_d s^2) \cdot G_s(s) \qquad (7)$$

여기서 $G_s(s) = \dfrac{N(s)}{sD(s)} e^{-T_d s}$.

이득여유 K를 고려하기 위하여 플랜트 $P(s)$를 $KP(s)$로 대체한다. 이 때 이득여유는 플랜트의 극점의 위치에 따라 상부위상여유$[1,K^+]$는 물론 하부위상여유 $[K^-,1]$의 값을 갖는다. 같은 방법으로 위상여유 θ를 고려하기 위하여 플랜트를 $P(s)^{-j\theta}$로 대체한다. 위상여유는 플랜트의 영점의 위치에 따라 상부위상여유 $[0,\theta^+]$뿐만 아니라 하부위상여유 $[\theta^-,0]$의 값을 가진다. 안정한 경계선 ∂A_s의 임의의 값은 Nyquist 선도에서 (-1, j0) 값을 갖기 때문에 다음 식을 만족한다.

$$\arg[(k_i - k_d\omega^2 + jk_p\omega)G_s(j\omega)] = \pi \qquad (8)$$

$$|(k_i - k_d\omega^2 + jk_p\omega)G_s(j\omega)| = 1. \qquad (9)$$

주파수 $\omega \in \Omega$ 구간에서, 식(8)을 만족하기 위한 $k_i - k_d\omega^2$는 다음과 같다

$$k_i - k_d\omega^2 = -\frac{k_p\omega}{\tan\{\arg[G_s(j\omega)]\}}, \qquad (10)$$

이 때

(a) $0 < \arg[G_s(j\omega)] < \pi$ if $k_p > 0$.
(b) $\arg[G_s(j\omega)] = 0$ or π if $k_p = 0$.
(c) $\pi < \arg[G_s(j\omega)] < 2*\pi$ if $k_p < 0$.

여기서 증명은 [10]을 참고한다.

식(10)을 식(11)과 같이 재 정의한다.

$$M(\omega) := -\frac{k_p^*\omega}{\tan\{\arg[G_s(j\omega)]\}} = (k_i - k_d\omega^2) \qquad (11)$$

이득여유 K를 고려할 때, $|KG_o(s)| = 1$을 만족하는 이득 K는 식(9)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K(\omega) := \frac{1}{\sqrt{M(\omega)^2 + (k_p^*\omega)^2} \cdot |G_s(j\omega)|} \qquad (12)$$

$\omega \in [0,\infty]$에 대하여 $K(\omega)$를 도시한 후 주어진 이득여유 규격 $[1,K^+]$ 또는 $[K^-,1]$를 만족하는 주파수 구간을 구하고 식(11)에 대입하면 고정한 k_p*에 대하여 이득여유를 만족하지 않는 영역 A_{K,k_p}^C를 얻게 된다.

한편 위상여유를 만족하지 않은 영역 A_{θ,k_p}^C은 Xu[4]가 제시한 시간지연요소를 갖는 플랜트를 안정하게 하는 PID이득 셋을 구하는 방법과 같은 방식으로 구한다. 고정한 k_p*에 대하여 식(9)는 다음과 같다.

$$k_i - k_d\omega^2 = \pm\sqrt{\Pi(\omega)} \qquad (13)$$

여기서 $\Pi(\omega) := \dfrac{1}{|G_s(j\omega)|^2} - (k_p^*\,\omega)^2$.

$\Pi(\omega)$를 $\omega \in [0,\infty]$에 대하여 도시한 후 주어진 위상여유 규격으로부터 $[\theta^-,0]$ 혹은 $[0,\theta^+]$를 만족하는 주파수를 찾으면 식(13)으로부터 A_{θ,k_p}^C를 구할 수 있다.

Remark : PI와 PD제어기는 PID제어기에서 $k_i = 0$ 혹은 $k_d = 0$인 경우이므로 본 논문에서 제시한 방법을 사용하면 쉽게 이득 및 위상여유를 만족하는 PID 이득 셋을 얻을 수 있다.

3. 적용예

본 장에서는 폐루프시스템을 안정화하는 PID이득 셋으로부터, 주어진 안정도여유와 시간응답 규격을 동시에 만족하는 PID제어기 이득 셋을 구하는 설계단계를 예제를 통해 제시한다.

Example : 시간지연 요소를 가지면서 플랜트가 불안정한 경우를 고려하자.

$$P(s) = \frac{s+1}{s^4 + 8s^3 + 48s^2 + 46s - 1} e^{-0.5s}$$

설계목표 :

o 이득여유 $Gm = (-3,6)$ $[dB]$, 위상여유 $PM = 45°$,
o 스텝응답의 오버슈트 1%, 정착시간 10초 이내

[단계 1] [1,4]의 알고리즘을 이용하여 시스템을 안정화하는 PID이득 셋 영역을 구한다(그림2).

[단계 2] [단계 1]에서 얻은 전체 PID이득 셋 내에서 k_p를 고정하고 식(10)~(13)을 이용하여 안정도여유를 만족하는 PID이득 셋을 얻는다. 그림 3.은 한 예로 $k_p = 37.31$일 때 이득 및 위상여유를 보여준다.

[단계 3] 같은 방법으로 모든 k_p에 대하여 안정도 여유를 만족하는 PID이득 셋을 구한다(그림 4).

[단계 4] 안정도를 보장하면서 안정도여유를 만족하는 PID 셋으로부터 특성비지정법[5-8]을 이용하여 고정한 k_p에 대하여 시간영역 설계규격을 만족하는 PID 이득 셋을 구한다. 그림 5.는 안정도를 보장하면서 안정도여유와 시간응답 규격을 만족하는 PID이득 셋이다. 그

림 6.은 그림 5.의 PID이득 셋 내에서 임의의 한 값인 ($k_p = 48.2$, $k_i = 15$, $k_d = 10$)의 스텝응답과 Nyquist선도를 나타낸 것이다.

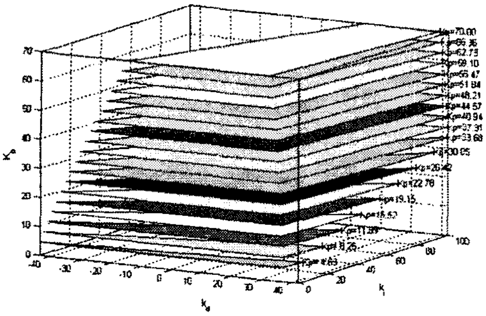

그림 2. 시스템을 안정화하는 전체 PID 이득 셋

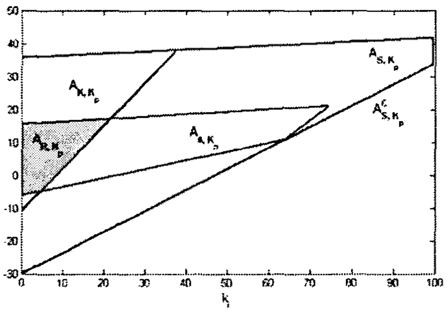

그림 3. $k_p = 37.31$일 때 안정도 여유를 만족하는 (k_i, k_d) 셋

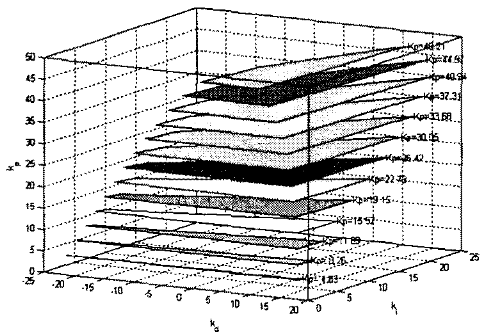

그림 4. 안정도여유를 보장하는 전체 PID이득 셋

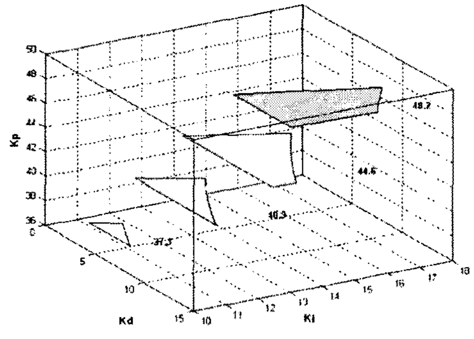

그림 5. 안정도여유와 시간응답 규격을 만족하는 전체 PID이득 셋

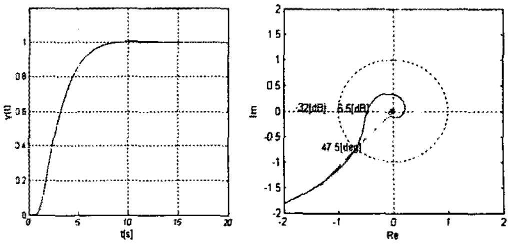

그림 6. ($k_p = 48.2$, $k_i = 15$, $k_d = 10$)에서 스텝응답과 Nyquist선도

4. 결 론

제어기 설계의 관점에서 현대적 접근방식은 시스템을 안정화는 제어기의 셋을 구한 후 이 셋 속에서 성능조건을 만족하는 최적 해를 구한다. 본 논문은 산업현장의 제어기 설계자가 선호하는 PID제어기에 대하여 현대제어기 설계 관점에서 안정도를 보장하면서 안정도 여유와 시간응답 규격을 만족하는 전체 PID 이득 셋을 구하는 기법을 제시하였다. 이 결과는 실제 제어기 설계에 있어서 매우 유용하게 적용될 수 있다.

감사의글

본 연구는 한국과학재단 특정기초연구(과제번호 : R01-2003-000-11738-0) 지원으로 이루어진 연구임.

[참 고 문 헌]

[1] A. Datta, M. T. Ho, and S. P. Bhattacharyya, *Structure and Synthesis of PID Controllers*, London, U. K. : Springer-Verlag, 2000.

[2] 김근식, 김영철, "연속선형계의 PD안정화기의 전체 이득 셋 결정," 정보 및 제어심포지엄, pp. 10-12, 2004

[3] 김근식, 인종수, 고광호,"연속선형계를 안정화하는 전체 PD 이득셋 결정," 한국전문대학교육연구학회, 제5권 4호, pp.551-557, 2004

[4] H. Xu, A. Datta and S. P. Bhattacharyya, "PID Stabilizing of LIT Plants with Time-Delay," *IEEE Conference of Decision Control,* Maui, Hawaii, USA, Dec. 2003

[5] Y. C. Kim, L. H. Keel, and S. P. Bhattacharyya, "Transient Response Control via Characteristic Ratio Assignment", *IEEE Trans. on Automatic Control,* Vol AC-48, No. 12 pp. 2238-2244, Dec. 2003

[6] K. S. Kim, Y.C. Kim, L.H. Keel, and S.P. Bhattacharyya, "PID controller design with time response specifications," *Proc. of American Control Conference*, pp.5005-5010, Denver, USA, June, 2003

[7] Youngchol Kim, Keunsik Kim, and Shunji manabea, "Sensitivity of The Time Response to Characteristic Ratios," *Proc. of American Control Conference*, Boston, USA, June, 2004.

[8] 김근식, 조태신, 김영철, "시간응답 설계규격을 만족하는 PI, PD, PID제어기 설계," 제어 · 자동화 · 시스템공학회지 제9권 4호, pp 259-268, 2003.

[9] Tan,N. Kaya,I. Atherton, D.P. "Computation of stabilizing PI and PID controllers," Proceedings of 2003 IEEE Conference, Vol.1 ,23-25, pp.876-881, 2003

[10], K.S.Kim, Y.C.Kim, "The Complete Set of PID Controllers with Gain/Phase Margin," to be published in IEEE Conference on Decision and Control, Dec. 2005.