

q-Markov Cover에 기초한 동정법

배종일 · 이동철
부경대학교 전기 · 제어계측공학부

Identification Method based on q-Markov

Jong-Il Bae · Dong-Cheol Lee

School of Electrical Control & Instrumentation Pukyong National University

Abstract - We need build a mathematical to apply the system theory to real system, phenomenon analysis, prediction, control, simulation and so on. Especially system identification is building a model from input and output data.

This study shows q-Markov Cover based system identification. When we do this, in order to make the identification possible under more general conditions with estimation of the system order, Markov parameters and covariance parameters from input and output data, I suggest the way we can get an optimal model by estimating and identifying of covariance matrix of observation noises repeatedly.

1. 서 론

실제의 시스템이나 현상해석, 예측, 제어, 시뮬레이션 등에 시스템을 적용하기 위해서 수리모델을 구축할 필요가 있다. 특히 입출력 데이터로부터 수리모델을 구하는 것을 시스템동정(system identification)이라 한다. 수리모델이 전달함수나 임펄스응답 등의 외부 기술로 주어졌을 때 이로부터 상태방정식을 구하는 것을 실현문제라고 한다. 실현문제는 크게 나누면 확정적 접근과 확률적 접근으로 나눌 수 있다. q-Markov Cover(q-Markov Covariance Equivalent Realization)[1,2,3]는 이들 2가지 실현을 결합한 것이며, 최초의 q개의 Markov 파라미터와 공분산 행렬(공분산 파라미터)이 데이터로 주어졌을 때 이들을 상태공간 모델로 실현하는 방법이다.

본 연구에서는, q-Markov Cover에 기초한 동정을 행하는 방법[1,4,5]에 대해 논하였다. q-Markov Cover에 기초한 동정을 행하는 경우, 입출력 데이터로부터 시스템의 차수 및 Markov 파라미터, 공분산 파라미터를 추정하여 보다 일반적인 조건하에서 동정을 가능하게 할 목적으로 관측잡음의 공분산 행렬의 추정과 동정을 반복해서 행하는 최적모델을 구하는 방법에 대한 제안한다.

2. q-Markov Cover

2.1 문제설정

점근안정 선형이산시간 시스템은 식(1)의 상태공간 모델로 표현된다.

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases} \quad (1)$$

여기서, $x(k)$ 는 n_x 차원의 상태벡터, $u(k)$ 는 n_u 차원의 입력벡터, $y(k)$ 는 n_y 차원의 출력벡터이다. 이때 식(1)의 Markov 파라미터(임펄스응답) H_i 및 공분산 파라미터(백색잡음 입력에 대한 출력의 자기공분산 행렬) R_i 는 각각 식(2), (3)으로 표현된다.

$$H_i = \begin{cases} D & , i=0 \\ CA^{i-1}B & , i>0 \end{cases} \quad (2)$$

$$R_i = \begin{cases} CXC^T + H_0H_0^T & , i=0 \\ CA^iXC^T + H_iH_i^T & , i>0 \end{cases} \quad (3)$$

단, X 는 상태 공분산 행렬이며, Lyapunov 식(4)를 $X = AXA^T + BB^T \quad X = X^T \geq 0$ (4)만족한다.

2.2 q-Markov Cover 알고리즘

식(1)과 같은 점근 안정선형 이산시간 시스템을 고려하자. 입력 $u(k)$ 에 관하여 다음식이 성립된다.

$$E[u(k)] = 0$$

$$E[u(k)u(j)^T] = I\delta_{kj}$$

$$E[x(k)u(j)^T] = 0, \quad j \geq k$$

여기서, $y_q(k)$, $u_q(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$y_q(k) \equiv \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+q-1) \end{bmatrix}$$

$$u_q(k) \equiv \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \vdots \\ u(k+q-1) \end{bmatrix} : q \geq 0 \text{의 정수}$$

식(1)에서 $y(k+q-1)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y(k+q-1) &= Cx(k+q-1) + Du(k+q-1) \\ &= CA^{q-1}x(k) + \sum_{i=0}^{q-2} CA^iBu(k+q-i-2) \\ &\quad + Du(k+q-1) \end{aligned}$$

3. q-Markov Cover에 기초한 동정법

3.1 문제설정

동정대상으로부터 얻어지는 입출력 데이터에 일치하도록 안정한 이산시간 선형이불변 모델이 존재하고, 식(5)와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\bar{u}(k) \\ \bar{u}(k) &= u(k) + w(k) \end{aligned} \quad (5)$$

$$y(k) = Cx(k) + D\bar{u}(k) + v(k)$$

단, $x(k)$ 는 n_x 차원의 상태벡터, $u(k)$, $w(k)$ 는 n_u 차원의 입력벡터 및 관측잡음벡터, $y(k)$, $v(k)$ 는 n_y 차원의 출력 및 출력 관측잡음벡터라 한다. $u(k)$, $w(k)$, $v(k)$ 는 각각 평균치 0, 공분산 $U(=I_{n_u})$, W , V 의 백색잡음으로 하는 $u(k)$, $w(k)$, $v(k)$ 및 $x(0)$ 은 서로

무상관(no-correlation)이라 한다.

지금 입출력의 상호상관을 $H_{i,\infty}$, 출력의 자기상관 $R_{i,\infty}$ 라 한다. 즉, 식(6), (7)과 같다.

$$H_{i,\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k+i)u(k)^T \quad (6)$$

$$R_{i,\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k+i)y(k)^T \quad (7)$$

3.2 잡음이 있는 경우의 q-Markov Cover 알고리즘

q-Markov Cover 에 기초한 동정법은 입출력 데이터에서 계산되는 $H_{i,N}$, $R_{i,N}$ 을 각각 상호상관 파라미터와 자기상관 파라미터로 갖도록 상태공간 모델을 실현하는 방법이라고 바꿔 말할 수 있다.

다음과 같은 3개의 행렬을 정의한다.

$$\begin{aligned} y_q(k) &= [y(k)^T \ y(k+1)^T \ \dots \ y(k+q-1)^T]^T \\ \bar{u}_q(k) &= [\bar{u}(k)^T \ \bar{u}(k+1)^T \ \dots \ \bar{u}(k+q-1)^T]^T \\ v_q(k) &= [v(k)^T \ v(k+1)^T \ \dots \ v(k+q-1)^T]^T \end{aligned}$$

이때 식(5)에서 식(8)이 성립된다.

$$y_q(k) = O_q(k)x(k) + H_q(k)\bar{u}_q(k) + v_q(k) \quad (8)$$

4. 수치 시뮬레이션

다음 식으로 기술되는 시스템에 대해 동정을 행한다.

<< 시스템 1(SISO) >>

$$G(z^{-1}) = \frac{1.08z^{-1} - 0.75z^{-2} + 0.45z^{-3} - 0.25z^{-4} + 0.12z^{-5}}{1 - 1.19z^{-1} + 0.81z^{-2} - 0.52z^{-3} + 0.35z^{-4} - 0.12z^{-5}}$$

<< 시스템 2(MIMO) >>

$$A = \begin{bmatrix} 0.8231 & 0.5217 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5217 & 0.8231 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9634 & 0.2473 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2473 & 0.9634 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9944 & 0.0626 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0626 & 0.9944 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.0441 & 0.0448 \\ -0.1299 & 0.1441 \\ 0.0071 & -0.0861 \\ 0.0481 & -0.1260 \\ -0.0067 & -0.0031 \\ -0.1619 & -0.0744 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1.3737 & 0 & -7.0910 & 0 & -7.5282 \\ 0 & 6.2097 & 0 & 8.7652 & 0 & -5.9736 \end{bmatrix}$$

[시뮬레이션 순서]

step. 1 잡음의 공분산 추정치의 초기치를 준다.

step. 2 추정모델 (\hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D})를 계산한다.

step. 3 상호상관 파라미터 및 자기상관 파라미터의 재구성을 계산한다.

step. 4 차분에 의한 최급강하법을 이용하여 $\hat{\Pi}$ 를 계산한다.

step. 5 차분에 의한 최급강하법을 이용하여 \hat{V} 를 계산한다.

step. 6 최종적인 모델을 결정한다.

[시뮬레이션 결과]

시스템 1에 대해 Markov 파라미터 비교를 행한 것을 Fig. 1에 나타냈고, 공분산 파라미터의 비교를 행한 것을 Fig. 2에 나타냈다. 시스템 2에 대해 Markov 파라미터 비교를 행한 것을 Fig. 3, 4에 나타냈다.

[시뮬레이션 결과 및 고찰]

수치 시뮬레이션에 의해 제안된 방법을 검토한 결과 양호한 모델이 얻어지고 있음을 알 수 있다. Markov 파라미터, 공분산 파라미터를 각각 비교한 결과를 보면 잡음의 공분산의 참값을 준것과 비교하여도 큰 정도(precision)의 열화는 볼 수 없다. 또 1입출력 모델의 경우, 관측잡음의 추정치 값에 대해서도 결과를 얻을 수 있었다. 또 연산시간의 관계에서 다입출력 시스템의 시뮬레이션에서는 V_q 를 블록 대각구조로 가정하여 추적을 행하고 있다. 보다 엄밀한 모델을 구하는데는 V_q 에 구조를 가정하지 않는 방법을 이용하는 것이 바람직하다. 또 최급강하법을 이용하여 $\hat{\Pi}$, \hat{V} 를 결정하고 있기 때문에 추정치가 초기치에 의존하는 것이나, 자기상관 파라미터, 상호상관 파라미터를 상관법을 이용하여 계산하고 있으므로 온-라인 동정에서는 적당하지 않다고 말할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 q-Markov Cover에 기초한 동정법을 관측잡음의 공분산이 미지의 경우 적용하는 것을 제안한 것이다. 관측잡음의 공분산을 추정하는 방법이 q-Markov Cover의 의미에서 최적모델을 주는 것은 $\|D_{q,N} - \hat{D}_{q,N}\|$ 의 노오름(norm) 상계를 고려하는데 따라 이해할 수 있다. 또, 차분을 이용한 최급강하법에 의해 평가함수의 최소화를 구할 수 있으므로 잡음의 공분산 초기치의 선택방법에 관하여는 이론의 여지가 남는다. 이번에 이용한 모델에 대해서, 초기치의 영(zero)부근을 취하는데 따라 양호한 모델을 얻을 수 있음을 확인하였다. 또, MIMO에서의 V_q 의 구조에 대해서는 연산량의 저감을 우선하여 블록 대각구조를 가정하였다. 이것은 엄밀하게 $\|D_{q,N} - \hat{D}_{q,N}\|$ 를 최소화한다고는 할 수 없지만, 수치 시뮬레이션에서 양호한 결과를 얻을 수 있었다.

[참 고 문 헌]

- [1] R.E. Skelton and G. Shi, "Iterative Identification and Control using q Weighted q-Markov Cover with Measurement Noise", Signal Processing 52, pp. 512-534, 1966
- [2] U. B. Desai and R. E. Skelton, "Partial Nested q-Markov Covariance Equivalent Realizations", Control-Theory and Advanced Technology, Vol. 4, pp. 323-342, 1987
- [3] A. M. King, U. B. Desai and R. E. Skelton, "A generalized Approach to q-Markov Covariance Equivalent Realizations for Discrete System", Automatica, Vol. 24, No. 4, pp. 507-515, 1988
- [4] R. E. Skelton, K. M. Grigoriadis and G. Zhu, "An algorithm for Iterative Identification and Control Design using an Improved q-Markov Cover", Proc. 10th IFAC Sympo. on System Identification Vol. 2, pp. 183-188, 1994
- [5] G. Zhu, R. E. Skelton and Pingkang Li, "q-Markov Cover Identification using Pseudo-Random Binary Signals", Int. J. Control Vol. 62, No. 6, pp. 1273-1290, 1995

- [6] P. Van Overschee and B. De Moore, "N4SID Subspace Algorithm for the Identification of Conbind Deterministic-Stochastic System", *Automatica*, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93, 1994
- [7] P. Van Overschee and B. De Moore, "A Unifying Theorem for Three Subspace System Identification Algorithm ", *Automatica*, Vol. 31, No. 12, pp. 1853-1864, 1995
- [8] R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis, "A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design", Taylor & Francis, 1998
- [9] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrice*, Chelsea Publishing Co., New York, 1960
- [10] B. C. Kuo, *Digital Control System*, Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1980

Identification results of system 1

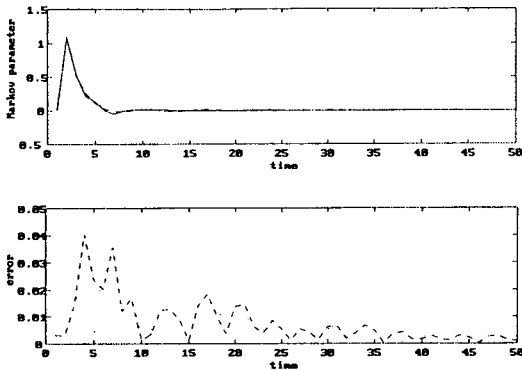


Fig. 1 Comparison of Markov parameter

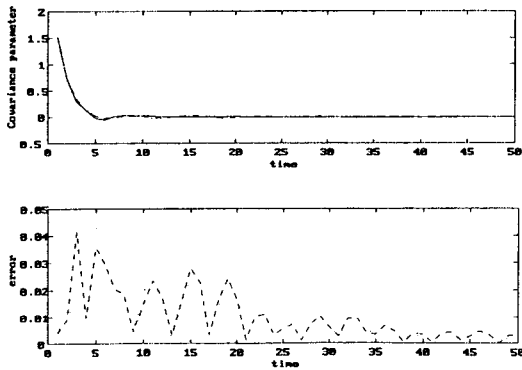


Fig. 2 Comparison of covariance parameter

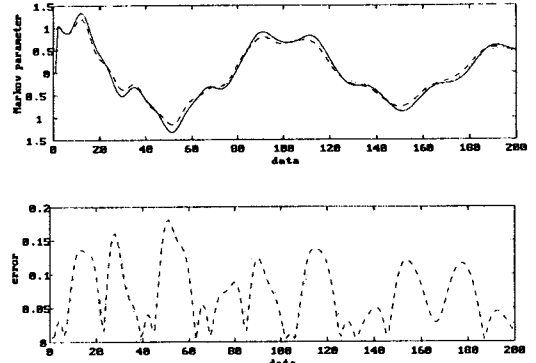


Fig. 3 Comparison of Markov parameter $(\gamma_1 - y_1)$

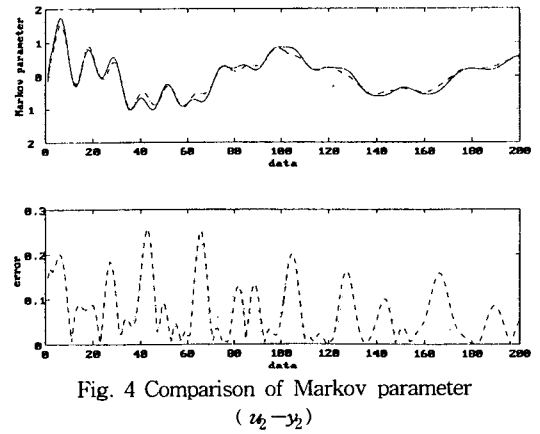


Fig. 4 Comparison of Markov parameter $(\gamma_2 - y_2)$