

회전형 역진자 시스템의 T-S 퍼지모델 기반 제어

이희정, 홍석교
아주대학교 전자공학부

T-S Fuzzy Model-Based Control of a Rotary-Type Inverted Pendulum

Hee-Jung Lee and Suk-Kyo Hong
School of Electronics Engineering, Ajou University

Abstract - This paper presents an experiment study on the control of a rotary-type inverted pendulum based on the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model approach. A sufficient condition for stability of the T-S fuzzy control system is given via linear matrix inequalities (LMIs). State-feedback controllers for sub-systems are designed from the sufficient condition via change of variables which is one of the popular LMI techniques. Experimental results on a rotary-type inverted pendulum control show the feasibility of the T-S fuzzy model-based control method.

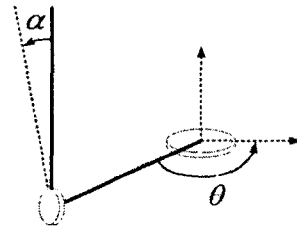


그림 1 회전형 역진자 시스템

1. 서론

역진자 시스템은 비선형 시스템으로 제어기법의 성능 검증에 많이 이용되는 시스템이다. 이러한 시스템을 제어하기 위한 방법은 크게 선형, 비선형, 지능 제어 기법으로 나뉜다. 이 논문은 지능 제어의 하나인 퍼지 제어 기법을 이용하여 이와 같은 비선형 시스템을 제어하기 위한 방법을 고찰한다. 특별히, 비선형 시스템을 위한 Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지모델 기반 제어 기법을 실험적으로 확인한다.

Takagi와 Sugeno [1]가 퍼지논리를 이용한 시스템 모델 기법을 제안한 이후, T-S 퍼지모델 기반 제어에 대한 많은 연구가 이루어져왔다[2-5]. Tanaka 등[3]은 불확실성을 내포한 비선형 시스템을 선형행렬부등식과 강인제어기를 이용하여 안정화하는 방법을 제안하였다. Wang 등[4]은 역진자 시스템의 수레 제어는 생각하곤 넓은 범위의 진자의 각도에 대한 퍼지제어기를 제안하였다. 특별히, 이들의 연구는 모두 선형행렬부등식(LMI)[6]을 이용하여 시스템 안정 조건을 제시하였다는 데 공통점이 있다.

이 논문에서는 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 근사화하고, LMI를 이용하여 이러한 시스템을 안정화하는 제어기 설계 조건을 제시한다. 즉, 주어진 T-S 퍼지 시스템 제어를 위한 안정화 조건을 얻고, 변수 변환법[6]에 의하여 이 조건을 LMI화하여 상태 제한 제어기 설계 조건을 얻어낸다. 많은 제어 문제가 LMI로 표현될 수 있음이 알려지고, 1990년대 초 LMI에 대한 효과적인 수치 해석 소프트웨어가 개발되어 최근 10여년 동안 제어 시스템 안정도 해석 및 제어기 설계에 LMI가 많이 이용되어 왔다 [6, 7]. 이 논문에서도 LMI를 이용하여 T-S 퍼지 모델 기반의 제어기를 설계한다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서는 시뮬레이션 및 실험에 이용된 회전형 역진자 시스템의 모델을 설명하였고 3장에서는 T-S 퍼지 모델을 이용한 제어기를 설명하였다. 4장에서는 T-S 퍼지 모델을 이용한 퍼지 제어 방법을 다룬다. 5장에서는 LMI를 이용한 제어기 설계 조건을 제시하고 구한 제어기의 보수성을 줄이기 위

한 알고리즘을 제시한다. 6장에서는 모의실험과 실제실험 결과를 통해 제안된 제어기의 성능을 확인하였다. 7장에서 결론을 맺는다.

2. 회전형 역진자 시스템 모델

이 논문에서 고려하는 회전형 역진자 시스템의 운동은 다음과 같은 미분방정식으로 나타낼 수 있다[8].

$$(J_{eq} + mr^2)\ddot{\theta} - mlr\cos\alpha\ddot{\alpha} - mlr\sin\alpha\dot{\alpha}^2 = T - B_{eq}\dot{\theta}$$

$$\frac{4}{3}ml^2\ddot{\alpha} - mlr\cos\alpha\ddot{\theta} - mgl\sin\alpha = 0$$

여기서, J_{eq} 는 부하에서 본 등가 관성모멘트, l 은 진자의 길이, m 은 진자의 질량, r 은 회전팔의 길이, T 는 인가 토크, B_{eq} 는 등가적 점성마찰, g 는 중력가속도이다.

3. T-S 퍼지 시스템 모델

일반적인 비선형 시스템에 대한 T-S 퍼지 시스템 모델은 퍼지 "IF-THEN" 규칙에 의하여 다음과 같이 표현된다[2-4].

Rule i : IF $x_1(t)$ is M_{i1}, \dots , and $x_n(t)$ is M_{in}
THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), i = 1, \dots, r$

여기서, r 은 IF-THEN 규칙의 개수이다. 이 모델을 이용하여 페루프 시스템 모델을 구하면 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(t) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(t)} \quad (1)$$

여기서, $w_i(t) = \prod_{j=1}^n \mu_{ij}(x_j(t))$ 이고, $\mu_{ij}(x_j(t))$ 는 i -번째 규칙의 j -번째 퍼지집합 소속함수 값이다. 식 (1)을 다시 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2)$$

여기서, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \alpha_i > 0$ 이다.

4. T-S 퍼지 제어기

앞서 설명한 방법과 동일하게 T-S 퍼지 규칙을 이용하여 상태제환 제어기 식을 표현하면 다음과 같다.

Rule j: IF $x_1(t)$ is M_{j1}, \dots , and $x_n(t)$ is M_{jn}
THEN $u(t) = K_j x(t), j = 1, \dots, r$

그러면, 최종 제어 입력은 다음과 같다.

$$u(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j(x) K_j x(t) \quad (3)$$

식 (3)을 (2)에 대입하면 페루프 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(x) \alpha_j(x) (A_i + B_i K_j) x(t) \quad (4)$$

5. 선형행렬부등식 기법에 의한 제어기 설계

이 장에서는 LMI 기법[5]을 이용하여 T-S 퍼지 제어기를 설계한다. 이를 위해 페루프 시스템의 안정성을 분석할 필요가 있다. 우선 입력이 없는 시스템에 대한 안정성을 알아본 후 페루프 시스템에 대한 안정성을 알아 보겠다.

무입력 시스템의 안정 조건은 다음 정리로 요약된다.

정리 1 [4]: 만약 다음 부등식 (5)를 만족하는 양한정 행렬 P 가 존재하면, 무입력 퍼지 시스템 (2) ($u = 0$)의 평형점은 점근적으로 안정하다.

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

위 부등식은 LMI이고, 이를 만족하는 양한정 행렬 P 는 convex 최적화 기법[6]에 의하여 구할 수 있다. 이에 대한 수치해석 소프트웨어가 이미 잘 개발되어 있어서 P 가 존재하는 한 그 해를 찾을 수 있다.

따름정리 1 [4]: 만약 다음 부등식 (6)을 만족하는 양한정 행렬 P 가 존재하면, 페루프 퍼지 시스템 (4)의 평형점은 점근적으로 안정하다.

$$[A_i + B_i K_j]^T P + P [A_i + B_i K_j] < 0, \quad (6)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r$$

참조 1: 식 (6)은 미지수 P 와 K_j 에 대하여 선형이 아니기 때문에 LMI 문제로 볼 수 없다. 그러나 K_j 를 고정시키거나 변수변환 기법을 이용하면 이 식을 LMI 문제로 변환시킬 수 있고, 따라서 convex 최적화 기법을 적용할 수 있다.

이 논문에서 고려하는 T-S 퍼지 모델 기반 제어기 설계는 식 (6)을 LMI화 하고 convex 최적화에 의하여 그 해인 K_j 를 구하는 것이다. 이는 다음 정리로 요약된다.

정리 2: 만약 다음 부등식 (7)을 만족하는 양한정 행렬 X 와 행렬 Y_j 가 존재하면, $K_j = Y_j X^{-1}$ 를 제어 이득으로 하는 페루프 퍼지 시스템 (4)의 평형점은 점근적으로 안정하다.

$$X A_i^T + A_i X + Y_j^T B_i^T + B_i Y_j < 0, \quad (7)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, r$$

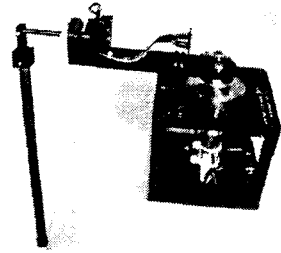


그림 2 회전형 역진자 시스템

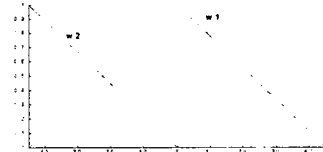


그림 3 두 규칙 모델의 멤버십 함수

증명: 변수변환 ($X = P^{-1}, Y_j = K_j X$)을 이용한 표준 LMI 기법[6]을 적용하면 식 (6)을 식 (7)로 변환할 수 있다.

참조 2: 식 (7)을 convex 최적화에 의하여 풀면, X 와 마찬가지로 Y_j 도 모든 부등식에 대하여 만족해야 하기 때문에 $Y_1 = Y_2 = \dots = Y_r$ 인 결과를 얻게 된다. 즉, 각 부시스템에 대한 제어 이득이 모두 같게 된다.

각 부시스템에 대한 제어 이득이 모두 같게 되면 한 개의 제어 이득으로 비선형 시스템을 제어해야 하므로 보수성이 커진다. 이 점을 개선하기 위하여 이 논문에서는 다음과 같은 알고리즘을 제안한다.

알고리즘 1:

- 1) $X A_i^T + A_i X + Y_i^T B_i^T + B_i Y_i + Q_i < 0, i = 1, \dots, r$ 을 만족하는 X 와 Y_i 를 convex 최적화를 통해 구한다. 즉, $i = j$ 인 부등식만을 푼다. 여기서, $Q_i \geq 0$ 는 설계변수이다. 이 때, 제어 이득은 $K_i = Y_i X^{-1}$ 이고 K_i 는 서로 다른 값을 갖게 된다.
- 2) 스텝 1에서 구한 K_i 를 식 (6)에 대입하여 이를 만족하는 양한정 행렬 P 가 존재하는지 확인한다.
- 3) 스텝 2에서 양한정 P 가 존재하면, 따름정리 1에 의하여, 스텝 1에서 구한 제어 이득은 페루프 시스템을 점근적으로 안정시키는 제어 이득이다. 양한정 P 가 존재하지 않으면, Q_i 값을 변경하고 스텝 1부터 다시 수행한다.

6. 실험 결과

6.1 실험 환경

제안된 방법의 타당성을 확인하기 위하여 Quanser사의 회전형 역진자 시스템[8]을 가지고 모의실험과 실제 실험을 행하였다. 이를 위해, 진자의 각도가 0도인 지점과 45도인 지점에 대한 부시스템 모델을 구하고 알고리즘 1을 이용하여 각 부시스템에 대한 제어 이득을 구하였다. 부시스템 모델과 파라미터 값은 다음과 같다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 39.3206 & -14.5236 & 0 \\ 0 & 81.7788 & -13.9817 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25.5440 \\ 24.5909 \end{pmatrix}$$

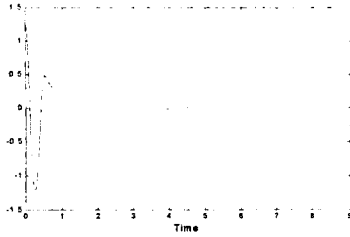


그림 4 진자의 궤적(모의실험)

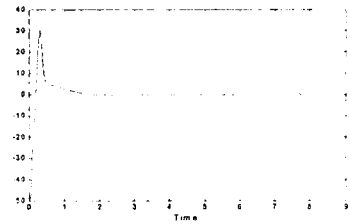


그림 5 제어입력(모의실험)

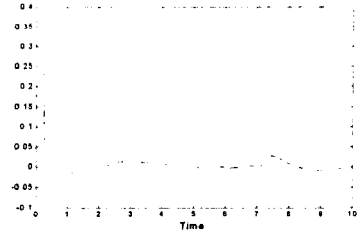


그림 6 진자의 궤적(실험)

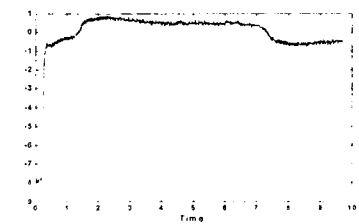


그림 7 제어입력(실험)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 24.7407 & -10.1502 & 0 \\ 0 & 72.7690 & -6.9094 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17.8519 \\ 12.1522 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = Q_2 = 0$$

$$K_1 = [0.3260 \quad -17.4748 \quad 1.1029 \quad -1.6298]$$

$$K_2 = [0.4512 \quad -25.3451 \quad 1.2886 \quad -2.2748]$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.1287 & -0.8816 & 0.0445 & -0.0733 \\ * & 30.6186 & -0.9549 & 2.1129 \\ * & * & 0.0944 & -0.1577 \\ * & * & * & 0.4012 \end{pmatrix}$$

6.2 모의실험 결과

제안된 제어기의 성능을 확인하기 위해 비선형 모델에 대해 모의실험을 행하였다. 일반적인 선형 제어기보다 우수함을 보이기 위해, 초기 각도를 크게 하였다. 그림 4, 5는 초기 각도 72도(1.257rad)에 위치하는 진자가 안정화되는 것을 보여준다. 제안된 제어기의 성능을 LQR 제어기를 이용한 모의실험과 비교하였다. LQR제어기는 작은 각도의 초기상태에서는 본 논문의 퍼지 제어기보다 빠른 안정화하는 성능을 보였지만 72도의 큰 초기치의 경우 발산함을 확인하였다. 이는 넓은 범위의 각도에서는 제안된 제어기가 LQR제어기보다 강인하다는 것을 보여준다.

6.3 실험 결과

실제 실험을 통해 제안된 제어기의 성능을 확인하였다. 이 경우도 선형 제어기보다 우수함을 보이기 위해 초기치를 크게 하였다. 그러나 모의실험과는 다르게 45도 이상의 큰 초기각도에서는 안정화 되지 않고 발산하였다. 이는 실제 시스템 구동기가 포화되어 큰 초기치에 필요한 토크를 발생시키지 못하기 때문인 것으로 판단된다. 그림 6, 7은 초기치를 20.5도(0.358rad)로 설정한 경우 역진자가 안정됨을 보여준다.

7. 결론

이 논문은 2자유도 역진자 시스템 제어를 위한 T-S

퍼지 모델 기반 제어 기법을 다루었다. 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 근사화 하고, LMI를 이용하여 이러한 시스템을 안정화하는 제어기 설계 조건을 제시하였다. 즉, 주어진 T-S 퍼지 시스템 제어를 위한 안정화 조건을 얻고, 변수 변환법에 의하여 이 조건을 LMI화 하여 상태제한 제어기 설계 조건을 얻어내었다. 2자유도 역진자 시스템을 이용한 실험을 통해 이와 같은 비선형 시스템에도 T-S 퍼지 모델 기반 제어 기법이 우수한 성능을 보임을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

- [1] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. 15, no. 1, pp. 116-132, 1985.
- [2] A. Jadbabaie, C.T. Abdallah, M. Jamshidi, and P. Dorato, "Guaranteed-cost control of the nonlinear benchmark problem using model-based fuzzy systems," *Proc. IEEE Int. Conf. Control Applications (CCA)*, pp.792-796, 1998.
- [3] K. Tanaka, T. Ikeda, and H. O. Wang, "Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control: quadratic stabilizability, H^∞ control theory, and linear matrix inequalities," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 1-13, Feb. 1996.
- [4] H. O. Wang, K. Tanaka, and M. F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 4, no. 1, pp. 14-23, Feb. 1996.
- [5] C.-W. Park, "Output feedback control of discrete-time nonlinear systems with unknown time-delay based on Takagi-Sugeno fuzzy models," *Electrical Engineering*, vol. 87, pp. 41-45, 2005.
- [6] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [7] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide*. Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
- [8] Quanser Consulting Inc., *SRV02 Series-Rotary Inverted Pendulum Student Handout*. Markham, Ontario, Canada, 2003.