두 평면 볼록집합의 겹치는 영역을 최대화하는 강체운동을 구하는 근사 알고리즘

박종대*°, 신찬수**, 안희갑*, 정지원*, Antoine Vigneron***
* 한국과학기술원 전산학전공, **한국외국어대학교 디지털정보공학과, ***싱가포르 국립대학교 전산학과
*{cdpark,heekap,otfried}@tclab.kaist.ac.kr, **cssin@hufs.ac.kr, ***antoine@comp.nus.edu.sg

Approximation Algorithms for Maximizing the Overlap of Two Planar Convex Sets under Rigid Motions

Chong-Dae Park*, Chan-Su Shin**, Hee-Kap Ahn*, Otfried Cheong*, Antoine Vigneron***
*Div. Computer Science (KAIST), **Dept. Digital Info. & Eng. (HUFS), ***Dept. Computer Science (NUS)

요 약

본 논문에서는 평면 상에 두 볼록집합 P와 Q가 주어졌을 때, P를 강체운동 하에서 수평이동 및 회전이동하여 Q와 겹치는 영역이 근사적으로 최대가 되는 알고리즘을 제시한다. 임의의 양의 상수 ε이 주어졌을 때, 본 알고리즘은 가장 많이 겹치는 넓이의 $1-\varepsilon$ 배를 보장하는 P의 강체운동을 $O(1/\varepsilon)$ 번의 기하 질의와 $O((1/\varepsilon^2)\log(1/\varepsilon))$ 시간 내에 구할 수 있다. 특히 P와 Q가 볼록다각형일 때, $O((1/\varepsilon)\log n + (1/\varepsilon^2)\log(1/\varepsilon))$ 시간에 구한다. 만약 수평이동만 사용할 경우는 $O((1/\varepsilon)\log n + (1/\varepsilon)\log(1/\varepsilon))$ 시간에 구할 수 있다.

1 서 론

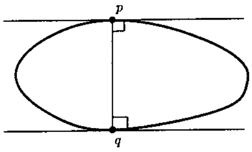
근래 활발한 연구가 진행되고 있는 형체일치 및 분석은 형체 추출, 인식 및 분류, 정렬 및 정형화, 그리고 근사 및 단순화 등의 연구에서 중요한 역할을 하는 연구주제이다. 형체일치는 다양한 응용분야에 따라 형체를 변환하거나, 주어진 단위에 따른 두 형체의 유사성을 측정하여 닮은 정도를 계산한다. 예를 들어, 거대한 양의 형체 자료를 저장한 데이터베이스의 경우 주어진 질의형체와 유사한 모든 형체를 찾아내기 위해 형체 일치 및 분석 작업을 하게 된다. 이 경우 유사성 단위의 정확도와 함께 형체 데이터베이스에 요구되는 유사성 속성에 따라 형체의 유사성을 계산하는 알고리즘이 수행하는 작업과 수행속도 등이 최적화 되어야 한다. 이러한 유사성을 측정하는 단위로는 이산 거리, Minkowski 거리, Bottleneck 거리, Hausdorff 거리, Fréchet 거리 등이 제안되어 왔다. 하지만 일반적으로 이러한 단위들은 노이즈에 민감한 한계를 지니고 있으며, 또한 다양한 응용분야의 특성을 제대로 나타내지 못하는 경우가 많다. 따라서 응용분야의 특성에 따라 최적의 수행시간과 함께 노이즈에 무관한 알고리즘의 개발이 요구되고 있다.

본 논문에서는 평면상의 두 볼록집합 P와 Q에 대해, P에 대한 수평이동과 회전이동을 통한 강체운동 중에서 Q와 겹치는 영역을 최대로 하는 이동을 구하는 문제를 살펴본다. 즉 중복영역 $\varphi P \cap Q$의 넓이가 최대가 되는 강체운동 φ를 구한다. 기존의 연구들이 대부분 수평이동만을 고려한 반면에 수평 및 회전이동을 동시에 고려한 문제에 대한 연구는 거의 알려져 있지 않다. 본 논문에서는 주어진 양의 상수 ε에 대해 최대 중복 영역의 $1-\varepsilon$ 배 이상을 보장하는 P의 강체운동 φ를 $O((1/\varepsilon)T_C + (1/\varepsilon^2)\log(1/\varepsilon))$ 시간에 구하는 알고리즘을 제시한다. 여기서 T_C는 간단한 기하 연산에 대한 질의 시간이며 자세한 내용은 뒤에 설명한다. 먼저 각 P와 Q를 내부근사 방법을 이용하여 $O(1/\varepsilon)$개의 꼭지점을 가지는 두 볼록다각형 P'과 Q'으로 근사한다. 그 후 P'에 대해 가능한 $O(1/\varepsilon)$ 개의 회전방향을 구하고, 각 방향에 대해 de Berg 등[2]이 제시한 $O(n\log n)$ 알고리즘을 적용하여 최적 수평이동을 구한다. 위와 같이 간단해 보이는 알고리즘과는 대조적으로, 요구되는 근사치 $1-\varepsilon$를 만족하는 회전방향을 구하는 것은 간단하지 않다. 회전방향을 등간격으로 선택할 경우에는 근사치가 보장되지 않는다. 대신 각 집합 P와 Q의 종횡비에 따라 적절한 회전방향을 선택하여야 하며, 또한 선택된 회전방향 집합과 각 방향에 대한 최적 수평이동 가운데, 최대 중복을 이루는 강체운동이 최종적으로 최대값의 $1-\varepsilon$ 배 이상을 보장하는지를 보여야 한다.

이 논문은 2005년도 한국과학기술원 BK21 정보기술사업단 (박종대, 안희갑, Otfried Cheong) 및 2005학년도 한국외대 교내학술연구비 (신찬수)에 의하여 지원되었습니다.

2 용어 및 기본 정리

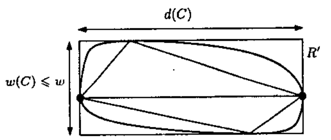
평면 상의 컴팩트한 볼록집합 C가 있을 때, $|C|$와 $d(C)$, $w(C)$를 각각 넓이와 지름, 폭이라고 하자. C 상의 두 점 p와 q에 대해서 C가 pq에 수직이면서 각각 p와 q를 지나는 두 직선 사이에 놓일 때 (p,q)를 **집게**라고 정의한다.



소정리 1. *평면 상의 컴팩트한 볼록집합 C가 있을 때, pq의 길이가 각각 $d(C)$와 $w(C)$가 되는 집게 (p,q)가 존재한다. C가 볼록 n각형일 때, 이를 만족하는 (p,q)를 $O(n)$ 시간에 구할 수 있다.*

특히 길이가 $w(C)$가 되는 집게 (p,q)를 C의 **최소 집게**라고 정의한다. 볼록집합의 넓이는 그 지름과 폭을 이용하여 다음과 같이 근사할 수 있다.

소정리 2. $\frac{1}{2}w(C)d(C) \leqslant |C| \leqslant w(C)d(C)$.



볼록다각형의 지름, 폭 및 넓이는 선형시간에 구할 수 있다 [4]. 보다 빠른 알고리즘을 얻기 위해서, 또는 다각형이 아닌 일반적인 볼록집합을 처리하기 위해서 다음 두 종류의 질의를 처리해야만 한다. 볼록집합 C에 대해 T_C를 다음 두 가지 질의를 처리하는데 드는 시간이라고 하자. (a) 주어진 방향벡터 $\vec{u}$에 대해, $\vec{u}$ 방향으로 가장 멀리있는 C 상의 점 v 를 구하는 질의, (b) 주어진 직선 ℓ에 대해 교집합 $\ell \cap C$를 구하는 질의. 당연히 T_C는 C가 어떻게 표현되었는지에 따라 결정된다. 예컨데 C가 n각형이고 꼭지점이 순서대로 배열에 저장된 경우, $T_C = O(\log n)$이 된다.

위의 질의를 이용하여 볼록집합의 지름과 폭, 넓이를 다음과 같이 근사할 수 있다.

소정리 3. *C를 평면 상의 컴팩트한 볼록집합이라고 하자. 이때 다음 세 조건을 만족하는 닮음꼴 직사각형 r과 R을 $O(T_C)$ 시간에 구할 수 있다.*

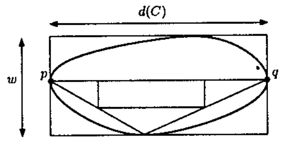
(i) C가 R의 네 변에 접하고, $r \subset C \subset R$이다.

(ii) r과 R은 닮음비가 $3\sqrt{2}$이다.

(iii) R의 두 변의 길이를 d와 w라고 할 때 $(d \geqslant w)$, 다음이 성립한다: $d(C)/\sqrt{2} \leqslant d \leqslant d(C)$, $w(C) \leqslant w \leqslant 2\sqrt{2}w(C)$, $|R|/(2\sqrt{2}) \leqslant |C| \leqslant |R|$.

다음 소정리를 이용하면 위에서 얻은 r보다 조금 더 큰 직사각형을 얻을 수 있다.

소정리 4. *C가 평면 상의 볼록집합일 때, 두 변의 길이가 $d(C)/2$와 $w(C)/4$이면서 C에 포함되는 직사각형 r'이 존재한다. C가 볼록 n각형이라면, 이 직사각형 r'을 $O(n)$ 시간에 구할 수 있다.*



두 볼록집합 각각이 내부에 포함하는 직사각형을 이용하여 다음 소정리를 얻을 수 있다.

소정리 5. *C_1과 C_2가 평면 상의 볼록집합이라고 하자. 이때 다음 조건을 만족하는 강체운동 φ이 존재한다.*

$$|\varphi C_1 \cap C_2| \geqslant \frac{1}{8} \cdot \min\{d(C_1), d(C_2)\} \cdot \min\{w(C_1), w(C_2)\}$$

만약 두 볼록집합이 둘 다 가늘고 길다면 두 볼록집합이 비슷한 방향으로 놓여있을 때 겹치는 영역이 최대가 될 것이다.

소정리 6. *C_1과 C_2가 평면 상의 볼록집합일 때, φ^{opt}가 $|\varphi^{\mathrm{opt}} C_1 \cap C_2|$를 최대로 하는 강체운동이라고 하자. ϑ를 $\varphi^{\mathrm{opt}} C_1$과 C_2의 최소 집게가 이루는 각이라고 할 때, 다음 식이 성립한다.*

$$\sin\vartheta \leqslant \frac{8\max\{w(C_1), w(C_2)\}}{\min\{d(C_1), d(C_2)\}}.$$

우리의 알고리즘을 위해서는 다음의 두 결과도 필요하다.

소정리 7 ([1]). *볼록집합 C에 대해 C'을 C를 내부의 점 p를 중심으로 해서 각도 δ만큼 회전시켜 얻은 도형이라 할 때, 다음이 성립한다.*

$$|C \setminus C'| \leqslant \frac{\pi\delta}{2}d(C)^2.$$

소정리 8 ([2]). *평면 상에 두 볼록다각형 P, Q가 주어졌고, 그 꼭지점의 수가 n일 때, $|\varphi P \cap Q|$을 최대로 하는 수평이동 φ를 $O(n \log n)$ 시간에 구할 수 있다.*

3 볼록다각형을 위한 알고리즘

볼록다각형 P와 Q가 주어졌고, 꼭지점 수의 합이 n이라고 하자. 주어진 $\varepsilon > 0$에 대해서 우리의 목표는 $|\varphi^{\mathrm{app}} P \cap Q| \geqslant (1-\varepsilon)|\varphi^{\mathrm{opt}} P \cap Q|$를 만족하는 강체운동 φ^{app}를 구하는 것이다. 이때 φ^{opt}는 $|\varphi P \cap Q|$를 최대로 하는 강체운동이다.

우리는 $O(1/\varepsilon)$ 개 방향의 회전운동 ρ로 P를 돌린 후에, 소정리 8을 이용해서 ρP와 Q가 가장 많이 겹치도록 수평이동

한 후, 그 중에서 겹치는 영역이 제일 큰 강체운동을 취하려 한다. 이 방법이 제대로 동작한다는 것을 보이기 위해서는 P가 최적 위치 $\varphi^{\text{opt}}P$에 놓여있을 때, P를 약간 회전해도 우리가 잃는 건 $\varepsilon|\varphi^{\text{opt}}P \cap Q|$ 뿐이라는 것을 보여야 한다.

소정리 9. *$w(C_2) \leqslant w(C_1)$인 볼록집합 C_1, C_2와 상수 $\varepsilon > 0$, 그리고 다음을 만족하는 δ가 주어졌다고 하자.*

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{w(C_2)}{\min\{d(C_1), d(C_2)\}}.$$

이때 $|\rho\varphi^{\text{opt}}C_1 \cap C_2| \geqslant (1-\varepsilon)|\varphi^{\text{opt}}C_1 \cap C_2|$를 만족하는 각도 δ의 회전이동 ρ가 존재한다.

소정리 10. *$w(C_2) \leqslant w(C_1)/4$, $d(C_2) \geqslant d(C_1)/2$인 볼록집합 C_1, C_2에 대해 $\varepsilon > 0$, $\delta \leqslant \varepsilon \frac{1}{160} \frac{w(C_1)}{d(C_1)}$라 하자. 이때 $|\rho\varphi^{\text{opt}}C_1 \cap C_2| \geqslant (1-\varepsilon)|\varphi^{\text{opt}}C_1 \cap C_2|$를 만족하는 각도 δ의 회전이동 ρ가 존재한다.*

우리의 알고리즘은 다음과 같다. 우선 두 다각형의 지름, 폭, 최소 집게를 $O(n)$ 시간에 구한다. 이때 $w(Q) \leqslant w(P)$라고 가정하자. 만약 $w(Q) \leqslant w(P)/4$, $d(Q) \leqslant d(P)/2$라면 소정리 4를 이용해서 $O(n)$ 시간에 두 변의 길이가 $w(Q)$와 $d(Q)$인 직사각형 $r_P \subset P$을 얻을 수 있다. 소정리 1을 이용하면 역시 $O(n)$ 시간에 두 변의 길이가 $w(Q)$와 $d_Q \leqslant d(Q)$인 직사각형 $R_Q \supset Q$를 구할 수 있다. 우리는 상수 시간에 $\varphi^{\text{opt}}R_Q \subset r_P$인 강체운동 φ^{opt}를 구할 수 있다. 이때 $\varphi^{\text{opt}}Q \subset P$가 되며 당연히 최적이다.

만약 위 경우가 아니라면 $\sin\vartheta > 8w(P)/\min\{d(P), d(Q)\}$인 구간에 대해 $\frac{1}{80}\varepsilon w(P)/\min\{d(P), d(Q)\}$ 간격으로 P의 회전방향을 뽑는다. 이때 $O(1/\varepsilon)$ 개의 방향이 뽑힌다. 각 방향에 대해서 소정리 8을 이용, 최적 수평이동을 구하고 그중 가장 좋은 값을 φ^{app}로 취한다.

이 방법은 $O((n\log n)/\varepsilon)$ 시간 안에 돌며 최적값의 $1-\varepsilon$ 배를 보장한다.

소정리 11. *두 볼록다각형 P, Q에서 꼭지점의 수의 합이 n이고 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때, 모든 가능한 강체운동 φ에 대해 $|\varphi^{\text{app}}P \cap Q| \geqslant (1-\varepsilon)\max_\varphi |\varphi P \cap Q|$을 만족하는 강체운동 φ^{app}를 $O((n\log n)/\varepsilon)$ 시간에 구할 수 있다.*

4 볼록집합의 내부근사

앞의 알고리즘의 동작 시간을 개선하기 위해서, 주어진 볼록집합을 ε 값에 의해 정해지는 다각형으로 근사한다. 볼록집합 C를 $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ 개의 꼭지점을 가지는 다각형 $P_\varepsilon \subset C$로 내부근사하는 Dudley[3]의 방법이 잘 알려져 있다. 이때 C와 P_ε의 Hausdorff 거리는 최대 $\varepsilon d(C)$이다. 우리의 알고리즘에 사용하기 위해서는 이보다 더 강한 조건을 가지는 내부근사가 필요하다.

소정리 12. *평면 상의 볼록집합 C와 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때, $O(T_C/\varepsilon)$시간에 $O(1/\varepsilon)$ 개의 꼭지점을 갖는 볼록다각형 $P \subset C$를 구할 수 있다. 이때 임의의 직선 ℓ이 $C \setminus P$와 만나는 부분은 길이 $\varepsilon d(C)$ 이하인 선분 2개 이하이다.*

소정리 13. *평면 상의 볼록집합 C와 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때, $O(T_C/\varepsilon)$시간에 $O(1/\varepsilon)$ 개의 꼭지점을 갖는 볼록다각형 $P \subset C$와 직선 ℓ을 구할 수 있다. 이때 ℓ과 평행한 임의의 직선 ℓ'이 $C \setminus P$와 만나는 부분은 길이 $\varepsilon w(C)$ 이하인 선분 2개 이하이다.*

Dudley의 방법에 비해 더 많은 꼭지점을 사용하지만, 앞의 소정리는 모든 방향에 대해 내부근사를, 뒤의 소정리는 더 작은 오차를 가지는 내부근사를 제공한다.

5 결 론

본 논문의 주된 결과는 다음과 같다.

정리 14. *평면상의 두 볼록집합 C_1, C_2와 상수 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때, $\varphi^{\text{app}}C_1 \cap C_2$의 영역이 최대 넓이의 $1-\varepsilon$ 배보다 큰 강체운동 φ^{app}를 $O((T_{C_1} + T_{C_2})/\varepsilon + (1/\varepsilon^2)\log(1/\varepsilon))$ 시간에 구할 수 있다.*

수평이동만을 고려한다면 좀 더 빠른 시간에 구할 수 있다. 아핀변환을 통해 소정리 3에서 얻어지는 직사각형을 정사각형이 되도록 변환한 후에 제시한 알고리즘을 조금 변형해서 적용하면 된다.

정리 15. *평면상의 두 볼록집합 C_1, C_2와 상수 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때, $\varphi C_1 \cap C_2$의 영역이 최대 넓이의 $1-\varepsilon$ 배보다 큰 수평이동 φ를 $O((T_{C_1} + T_{C_2})/\varepsilon + (1/\varepsilon)\log(1/\varepsilon))$ 시간에 구할 수 있다.*

참고 문헌

[1] H.-K. Ahn, P. Brass, O. Cheong, H.-S. Na, C.-S. Shin, and A. Vigneron. Approximation algorithms for inscribing or circumscribing an axially symmetric polygon to a convex polygon, *Proc. 11th Ann. Int. Conf. Comput. Combinatorics*, LNCS 3106, p. 259–267, 2004.

[2] M. de Berg, O. Cheong, O. Devillers, M. van Kreveld, and M. Teillaud. Computing the maximum overlap of two convex polygons under translations. *Theo. Comp. Sci.*, 31(5):613–628, 1998.

[3] R. M. Dudley. Metric entropy of some classes of sets with differentiable boundaries, *J. Approx. Theory*, 10(3):227–236, 1974; Erratum in *J. Approx. Theory*, 26(2):227–236, 1979.

[4] G. T. Toussaint. Solving geometric problems with the rotating calipers, *Proc. IEEE MELECON*, Athens, Greece, p. 1–4, 1983.