

전도체가 존재하는 자연대류 현상에 대한 수치적 유동 가시화

하만영[†] · 이재룡* · S.Balachandar**

Thermal Convection with Conducting Lid

Man Yeong Ha, Jae Ryong Lee and S. Balachandar

Abstract

영문으로 This study of thermal convection uses the following geometry: a horizontal layer of fluid heated from below of solid lid at bottom and cooled from above. A variety range of thermal conductivity ratio, k is considered to investigate the interface temperature, θ_i between solid and fluid region. Periodic boundary conditions are employed in the horizontal direction to allow for lateral freedom for the convection cells. A two-dimensional solution for unsteady natural convection is obtained, using an accurate and efficient Chebyshev spectral multi-domain methodology, for different effective Rayleigh numbers, Ra_{eff} varying over the range of 10^4 to 10^7 in which the effective Rayleigh number is defined as $Rax < \bar{T}_i >$.

Key Words : Thermal Convection (자연대류), Conjugate Heat Transfer (복합열전달), Thermal Boundary Layer (열경계층)

1. 서 론

고전적인 자연대류에 관한 형상은 상, 하부에 무한대의 열전도도를 가지는 전도체가 존재한다고 가정할 수 있다. 보다 현실적이고, 응용적인 관점에서 유한한 열전도도를 가지는 자연대류에 대한 문제가 실험 및 전산으로 몇몇 진행되어 왔다. 초기에 Sparrow et al⁽¹⁾는 전도체가 열유동의 시발점(onset)에 주는 영향에 대해서 연구하였다. 그리고 다른 연구자들 또한 다양한 범위의 열전도도의 존재가 열유동에 미치는 영향에 대해서 이론적으로 연구하였다^{(2), (3)}.

유한한 열전도도를 가지는 전도체가 상, 하부에 대칭적으로 존재하는 열유동장 내부에 대한 연구가 Wasterburg & Busse⁽⁴⁾에 의해서 연구되었다. 그들은 열전도도가 감소할수록 내부유동의 움직임에 중요한 영향을 미치며, 또한 열전도도가 감소할수록 온도장은 유동장과 분리(decouple)되어 주기적 순환셀(roll cell)을 구현하는 자연대류의 일반해(general solution)에 접근한다고 결론지었다. Lenardic & Moresi⁽⁵⁾는 상부에 전도체가 존재하는 밀폐계 내부의 열유동에 대한 연구를 전도체의 종횡비(aspect ratio)의 변화를 고려하면서 연구하였다.

본 연구에서는 하부에 전도체가 존재하는 수평의 열유동장을 고려하였다. 전도체의 하부에서 균일한 고온온도가 분포하며, 전도체의 열전도도에 의해서 통해서 각기 다른 열원의 크기가 유체측에 전달된다. 유체 내부에 형성되는 열유동장의 변화를 조사하는 수치 계산을 수행하였으며, 유체와 전도체의 전도도비의 변화가 열 유동장에 미치는 영향을 조사하였다.

[†] 부산대학교 기계공학부

E-mail : myha@pusan.ac.kr

* 부산대학교 기계공학과 대학원

** University of Illinois at Urbana-Champaign

2. 지배방정식

Fig 1 에서 보는 바와 같이 Boussinesq 가정을 만족하는 열유동 현상을 해석하기 위한 지배방정식으로 아래의 무차원 연속 방정식, 운동량 보존 방정식 및 에너지 보존 방정식이 본 계산에서 사용되었다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \mathbf{u} + Ra Pr \theta \mathbf{k}_2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta_f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta_f = \nabla^2 \theta_f \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta_s}{\partial t} = \alpha \cdot \nabla^2 \theta_s \quad (4)$$

여기서, $\mathbf{k}_2 (= \hat{\mathbf{n}} \cdot \delta_{i,2}, \delta$:kronecker delta)는 평행 평판에 수직인 방향의 단위 벡터를 나타낸다. \mathbf{u} , p , t , θ 및 α 는 각각 무차원화된 속도, 압력, 시간, 온도 및 열확산계수를 나타낸다. 식 (1) ~ (4) 에서 정의된 중요한 무차원 변수는 Pr 수 (Prandtl number) 및 Ra 수이며, 이들의 정의는 다음과 같다.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_f}, \quad Ra = \frac{g\beta(L_f + L_s)^3(T_h - T_c)}{\nu\alpha_f} \quad (5)$$

본 계산에서는 Pr 수를 공기에 해당하는 0.71 로 고정하였다.

열전도도와 무관하게 유체의 유동장을 해석하기 위해서 전도체/유체 경계면의 평균온도로 평균한 유효 Rayleigh 수를 다음과 같이 정의하였다.

$$Ra_{eff} = \frac{g\beta L^3(T_i - T_c)}{\nu\alpha_f} \quad \text{or} \quad Ra_{eff} = Ra \times \langle \bar{\theta}_i \rangle \quad (6)$$

여기서, T_i 는 경계면에서의 온도이고, $\langle \bar{\theta}_i \rangle$ 는 시간, 공간 평균한 무차원 경계면의 온도이다.

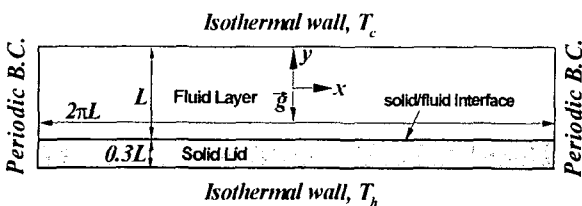


Fig. 1 Schematics of system

3. 수치해석 방법

Fig 1 은 본 연구에서 사용한 하부 전도체가 존재하는 경우의 형상을 보여주고 있다. 유체층의 수직높이는 단위 길이, L 이며, 하부 전도체의 두께는 $0.3L$ 이다. 전도체의 하부는 일정하게 고온 (T_h) 으로 유지되며, 유체 층의 상부는 저온 (T_c) 이다. 횡 방향의 길이는 $2\pi L$ 이며, 주기 경계조건을 사용하여, 수평 방향으로의 내부 유동의 벽면조건의 의한 구속을 없애도록 하였다. 유체와 전도체가 접촉하고 있는 접촉면에서는 온도 및 열유속이 연속이라는 조건을 사용하였으며, 다음과 같이 정의 되어진다.

$$\theta_s = \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = k \frac{\partial \theta_s}{\partial \mathbf{n}} \quad (7)$$

여기서 $k(=k_s/k_f)$ 는 고체와 유체의 열전도도 비를 나타내며, 밀폐계 내부의 유동을 결정하는 또 다른 중요한 무차원 변수이다.

위의 지배 방정식 (1)~(4)에 대한 수치해를 구하기 위하여 다 영역 스펙트럴 방법 (multi-domain spectral method)을 사용하였다⁽⁶⁾. 각각의 부 영역에서는 체비셰프 전개 (Chebyshev expansion)를 사용하였으며, 이로 인하여 격자점은 비균일 Gauss-Lobatto 점들로 이루어진다.

시간에 대한 적분을 위하여 2 단계 시간 분할 방법 (two-step time-splitting method)를 사용하였다. 첫 번째 시간 적분 단계인 'n' 시간에서 중간 시간 '*' 단계에서는 대류-확산 방정식 (advection-diffusion equation)에 대한 해를 구한다. 이때 비선형 항인 대류항의 적분을 위하여 3 차의 양해법인 Adams-Bashforth 기법을 사용하였다. 확산 항에 대한 적분을 위하여 음해법인 Crank-Nicolson 기법을 적용하였다. 이렇게 구한 속도장을 사용하여, 압력에 대한 포아송 (Poisson) 방정식에 대한 해를 음해법을 사용하여 구하였다, 압력-수정 단계인 'n+1' 단계에서 최종의 divergence-free 조건을 만족하는 속도를 구한다. 온도장에 대한 해는 속도장과 유사한 방법을 사용하여 구한다⁽⁷⁾.

4. 결과 및 해석

$Ra_{eff} = 10^6$ 이 되면, 유체의 유동은 가속되어서 복잡해지고, 그에 따른 $\overline{Nu_{eff}}$ 의 시간에 대한 함수는 랜덤한 형태를 나타낸다. $Ra_{eff} = 10^5$ 일 때와 마찬가지로, k 가 증가함에 따라 $\overline{Nu_{eff}}$ 는 감소한다. $k=1$ 일 때, $\overline{Nu_{eff}} = 8.413$ 에서 $k=\infty$ 일 때, 7.84 로 약 8% 감소한다.

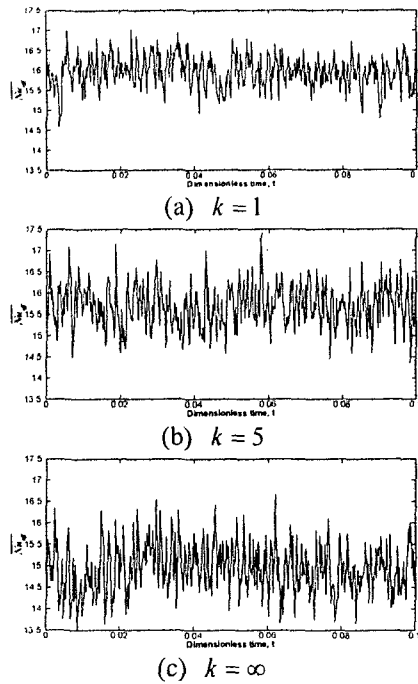


Fig 2. Time history of surface-averaged effective Nusselt number for different thermal conductivity when $Ra_{eff} = 10^7$

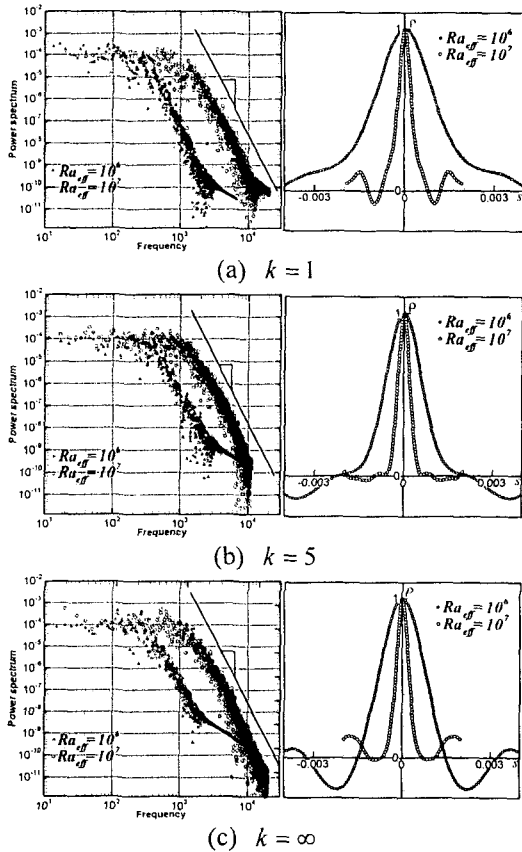


Fig 3. Power spectrum and autocorrelation of the effective Nusselt number for different thermal conductivity

Ra_{eff} 수가 10^7 으로 증가하면, 경계면에서의 평균 유효 Nusselt 수, $\overline{Nu_{eff}}$ 수는 $Ra_{eff} = 10^6$ 일 때 보다 스케일이 2 배 정도 증가한다. 무차원 열전도도, k 가 비교적 작은 값일 때, Ra_{eff} 가 커질수록 입력 Ra 수와의 비, Ra/Ra_{eff} 도 커진다. 10^6 일 때와 마찬가지로, k 가 증가함에 따라 시간, 공간 평균한 유효 Nusselt 수, $\langle \overline{Nu_{eff}} \rangle$ 는 조금씩 감소한다. $k=1$ 일 때, $\langle \overline{Nu_{eff}} \rangle = 15.965$ 에서 $k=\infty$ 일 때, $\langle \overline{Nu_{eff}} \rangle = 14.939$ 이며, 약 6% 감소한다. 그리고, 경계면에서의 r.m.s. 값은 $k=5$ 에서 최대값을 나타내고, $k>5$ 가 되면 다시 감소한다. $k=\infty$ 가 되면 경계면에서의 r.m.s.는 $O(10^{-5})$ 으로 거의 zero 라고 할 수 있다. 표 3 은 $Ra_{eff} = 10^7$ 일 때, 경계면에서의 평균온도, r.m.s 그리고 $\overline{Nu_{eff}}$ 값을 k 에 대해서 나타낸 것이다.

Fig 2 는 $Ra_{eff} = 10^7$ 일 때 $\overline{Nu_{eff}}$ 의 시간에 대한 함수를 나타낸 것이다. ($k=1, 5$ and ∞) 그리고, 고 Ra_{eff} 수 (10^6 and 10^7)에서의 그에 따른 power spectrum 과 autocorrelation 을 Fig 3 에 나타내었다. 모든 k 에 대해서 $\overline{Nu_{eff}}$ 는 완전히 랜덤한 패턴을 나타낸다. 고주파수 영역에서의 power-law roll-off 는 모든 Ra_{eff} 에 대해서 공히 -6 의 기울기를 가지며 지수적인 비례관계를 가진다. 하지만, 두 Ra_{eff} 에 대해서, 주파수 대역의 크기는 k 가 증가함에 따라 감소한다. 이는 순수 자연대류에 해석에서도 잘 나타나는 결과이다.⁽⁸⁾

3 차원 해석

Fig 4 및 5 는 $Ra_{eff} = 10^6$ 일 때, $k=2, 10$ 그리고 infinity 일 때의 조건에서의 내부 열유동의 온도장 및 스윙 강도(swirl strength, λ_{ci} ⁽⁹⁾)를 나타낸 것이다. 이 때의 시간 및 공간 평균한 유효 Nusselt 수, $\overline{Nu_{eff}}$ 는 10.19 이며, 이는 2 차원 결과에 비해서 그 값이 크다. 이는 유동이 3 차원성이 있다는 것을 의미하며, 전도체/유체의 경계면에서 유동이 더욱 활발히 형성되어, 열전달이 더욱 촉진되었음을 알 수 있다. Fig 6 (a) 에서의 온도의 iso-surface 는 0.6 으로서, 경계면에서의 시간 및 공간 평균한 온도, $\langle \bar{\theta} \rangle$ 로 평균(normalized)한 값이다.

5. 결 론

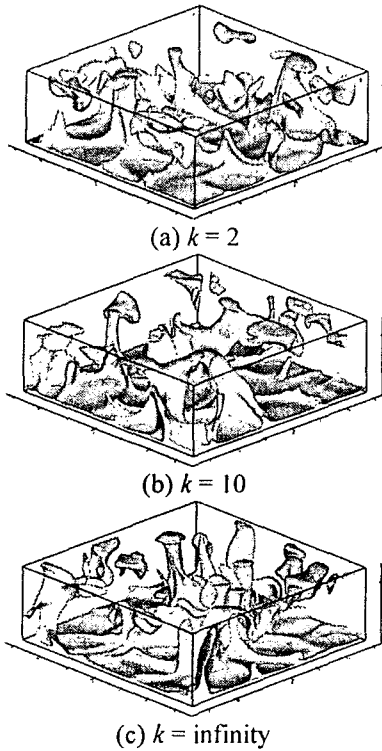


Fig 4. Iso-surface of temperature for different thermal conductivity when $Ra_{eff} = 10^6$. Temperature is normalized by averaged interface temperature and the value of iso-surface is 0.4

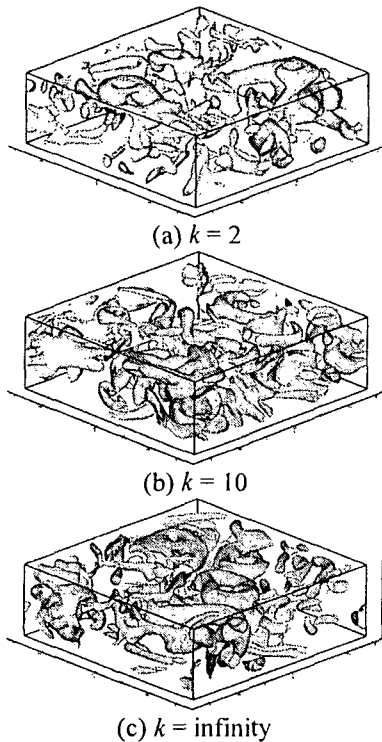


Fig 5. Iso-surface of swirl strength, λ_{ci} for different thermal conductivity when $Ra_{eff} = 10^6$. the value of iso-surface is 1200

하부에 다양한 열전도도를 가지는 전도체가 존재하는 열유동 현상을 스펙스럴 멀티도메인 방법을 이용해서 수치해석하였다. 멀티도메인 방법은 하부의 전도체를 처리하기에 매우 유용하며, 계산시간을 단축하기 위해서 MPI 를 이용한 병렬처리를 하였다.

유효 Rayleigh 수, Ra_{eff} 는 열전도도와 상관없이 유체층의 부력을 세기를 측정할 수 있도록 정의된 값이다. 열전도도가 작을 때, 유동은 보다 활발히 움직이며, 그에 따라 유효 Nusselt 수, $\overline{Nu_{eff}}$ 가 크다. k 가 증가할수록, $\overline{Nu_{eff}}$ 는 조금씩 감소하는 경향을 나타낸다.

Ra_{eff} 가 작을 때, 내부 유동은 정상상태이며, 모든 방향으로 대칭성을 만족한다. Ra_{eff} 가 커지면 비 정상상태로 되며, 복잡한 패턴을 나타낸다.

참 고 문 헌

- (1) Sparrow, E.M., Goldstein, R.J. and Jonsson, V.K., 1964, "Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and nonlinear temperature profile", *J. Fluid Mech.* Vol. 18, pp. 513
- (2) Busse, F.H. and Riahi, N., 1980, "Nonlinear convection in a layer with nearly insulating boundaries", *J. Fluid Mech.* Vol. 96, pp. 243
- (3) Riahi, N., 1985, "Nonlinear thermal convection with finite conducting boundaries", *J. Fluid Mech.* Vol. 152, pp. 113
- (4) Westerburg, M. and Busse, F. H., 2001, "Finite-amplitude convection in the presence of finitely conducting boundaries", *J. Fluid Mech.* Vol. 432, pp. 351
- (5) Lenardic, A. and Moresi, L., 2003, "Thermal convection below a conducting lid of variable extent: Heat flow scalings and two-dimensional, infinite Prandtl number numerical simulations", *Phys. Fluids*, Vol. 15, pp. 455
- (6) Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., 1988, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag
- (7) Parker, S.J., 2002, "Stability and vortex shedding of bluff body arrays", PhD Thesis, University of Illinois, Urbana, IL, USA
- (8) Niemela, J.J, Skrbek, L., Sreenivasan, K.R. and Donnelly, R.J., 2001, "The wind in confined thermal convection", *J. Fluid Mech.* Vol. 449, pp. 169
- (9) Chakraborty, P., Balachandar, S. and Adrian, R., 2005, "On the relationships between local vortex identification schemes," *J. Fluid. Mech.* Vol.535, pp. 189