

# 프리스트레싱 텐던의 모델링을 위한 등가하중법과 초기응력법의 비교연구

## A Comparative Study on the Equivalent Load Method and the Initial Stress Method for Modeling of the Prestressing Tendon

전 세 진\*  
Jeon, Se Jin

### ABSTRACT

In finite element analysis of the PSC structures, the prestressing effect can be introduced by two ways, i.e, equivalent loads or initial stress. This study investigates the reason why the two schemes that adopt the different approaches produce the similar results. The discussion is applicable to the general finite elements that correspond to the concrete and tendons. Some of the detailed derivations of each scheme are presented. Numerical examples show the identical results for the two methods.

### 1. 서 론

PSC 구조물의 유한요소해석시 텐던에 프리스트레스 효과를 도입하는 방법에는 크게 등가하중법(equivalent load method)과 초기응력법(initial stress method)이 있으며, 기존 연구 및 범용 구조해석 프로그램에서는 이 두가지 방법을 혼용하여 왔다<sup>1)</sup>. 일반적으로 두 방법은 유사한 결과를 산출하지만, 그러한 이유에 대한 엄밀한 논의 및 비교분석 연구가 부족했다 사료된다. 이 연구에서는 각 방법이 서로 다른 관점의 유한요소 정식화 과정을 거치지만 결국 같은 결과를 산출하게 되는 이유를 수식을 통해 비교고찰하고 수치 예제로 검증하였다.

### 2. 등가하중법과 초기응력법의 비교

등가하중법과 초기응력법의 유사성을 증명하기 위해 임의의 콘크리트 유한요소 메시(mesh)에 매입된 프리스트레싱 텐던 중에서 그림 1과 같이 한개의 콘크리트 요소 및 텐던 세그먼트를 예로 들기로 한다. 논의를 전개하기 위한 두가지 전제조건으로, 첫째, 콘크리트 모요소와 텐던의 변위장이 일치하는 부착(bonded) 텐던을 가정하며, 둘째, 텐던의 변위를 콘크리트 요소의 변위로 표현한 매설(embedded) 모델을 사용했다고 하자<sup>1)</sup>. 그림 1(a)와 같이 텐던에 프리스트레스, 즉, 초기응력이 도입되

\*정회원, 대우건설기술연구소 토목연구팀 선임연구원, 공학박사

있을 때 텐던축을 따라 콘크리트와 텐던의 접촉면 및 텐던 단부에는 힘이 발생하게 된다. 이러한 힘을 등가하중이라 하며, 콘크리트와 텐던의 입장에서 각각 볼 때 등가하중의 크기는 서로 같지만 방향은 반대가 된다. 그림 1(b)는 텐던을 제거시킨 상태에서 텐던에 의해 콘크리트에 작용하는 등가하중을 나타낸 것이며, 그림 1(c)는 역으로 콘크리트가 텐던에 작용시키는 등가하중이다. 그림 1(b)를 유한요소 평형식으로 표현하면 식 (1)과 같다. 여기에서  $\underline{K}_c$ 는 콘크리트 요소의 강성 행렬,  $\hat{\underline{u}}$ 은 콘크리트 요소의 자유도 벡터,  $\underline{R}$ 은 절점하중 벡터,  $\underline{H}$ 는 변위 보간 행렬이다.  $\underline{p}$ 는 콘크리트에 작용하는 등가하중으로 텐던축을 따라 텐던 곡률에 의해 발생하는 분포 하중 및 텐던 세그먼트 양단의 집중하중을 포함하고 있으며, 외력과 동일하게 취급하므로 식 (1)의 우변에 의해 등가절점하중으로 변환할 수 있다.

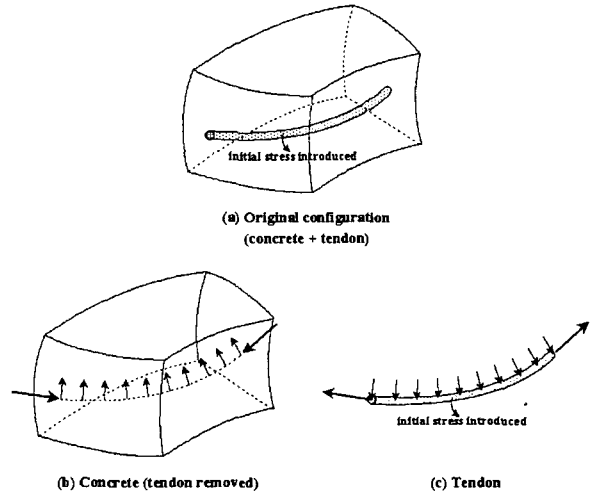


그림 1 콘크리트 요소에 매입된 텐던

$$\underline{K}_c \hat{\underline{u}} = \underline{R} = \int_V \underline{H}^T \underline{p} dV \quad (1)$$

한편 그림 1(c)를 초기응력을 포함한 유한요소 평형식으로 표현하면 식 (2)와 같으며, 여기에서  $\underline{K}_p$ 는 텐던 요소의 강성 행렬,  $\underline{B}_p$ 는 텐던 요소의 변형률-변위 행렬,  $\underline{T}^I$ 는 초기응력 벡터이다. 텐던에 작용하는 등가하중은  $-\underline{p}$ 에 주의한다.

$$\underline{K}_p \hat{\underline{u}} + \int_V \underline{B}_p^T \underline{T}^I dV = \underline{R} = \int_V \underline{H}^T (-\underline{p}) dV \quad (2)$$

따라서, 그림 1(a)와 같이 콘크리트와 텐던이 합쳐진 전체 유한요소 평형식은 식 (1)과 (2)를 더하여 식 (3)과 같이 구할 수 있다. 식 (3)은 초기응력법을 적용시킬 때의 평형 방정식에 해당하며, 우변은 초기응력  $\underline{T}^I$ 가 등가절점하중으로 변환됨을 의미한다.

$$(\underline{K}_c + \underline{K}_p) \hat{\underline{u}} = - \int_V \underline{B}_p^T \underline{T}^I dV \quad (3)$$

그런데, 식 (2)의 텐던에 대한 식만을 따로 두고 볼 때, 초기응력이 작용하는 텐던의 변위가 주변 콘크리트에 의해 구속되면서 등가하중이 발생한다고 볼 수 있으므로  $\hat{\underline{u}}=0$ 으로 둔다면 다음 식 (4)가 성립한다. 이는 초기응력법과 등가하중법이 비록 수식의 형태는 다르지만 근본적으로 동일한 결과를 산출할 것임을 암시하고 있다. 즉, 식 (3)의 우변에 식 (4)의 우변을 대신 적용한다면, 이는 등가하중법을 적용시킬 때의 평형 방정식에 해당하게 된다. 식 (4)에서의 적분은 텐던축을 따라 선적분을 실시하면 된다.

$$\int_V \underline{B}_p^T \underline{T}^J dV = - \int_V \underline{H}^T \underline{p} dV \quad (4)$$

또 다른 관점으로서 그림 1(c)의 텐던은 내력  $\underline{T}^J$ 와 외력  $-\underline{p}$ 가 평형을 이루고 있는 상황으로도 볼 수 있으므로, 식 (5)와 같은 가상일의 원리가 성립한다. 식 (5)를 정리해도 식 (4)와 동일한 결과를 산출함을 알 수 있다. 이상의 논의는 요소 차원에서 전개했지만 요소들이 모여 있는 전체 구조계에서도 성립하는 사항이다.

$$\int_V \delta \underline{\epsilon}_p^T \underline{T}^J dV = \int_V \delta \underline{u}^T (-\underline{p}) dV \quad (5)$$

### 3. 등가하중법에 대한 유도

그림 1(a)의 텐던축의 수학적식 매개변수  $\beta$ 의 함수인  $\underline{x}_p(\beta)$ 로 나타낼 때, 텐던축의 접선 벡터  $\underline{v}_t$  및 법선 벡터  $\underline{v}_n$ 을 식 (6)과 같이 정의할 수 있다.

$$\underline{v}_t = \frac{d\underline{x}_p}{d\beta} \quad \underline{v}_n = \frac{1}{|\underline{v}_t|^2} \left[ \frac{d^2 \underline{x}_p}{d\beta^2} - \frac{1}{|\underline{v}_t|^2} \left( \frac{d\underline{x}_p}{d\beta} \cdot \frac{d^2 \underline{x}_p}{d\beta^2} \right) \frac{d\underline{x}_p}{d\beta} \right] \quad (6)$$

프리스트레싱 힘  $P$ 가 도입될 때 텐던 곡률에 의해 발생하는 등가 분포하중은 텐던 미소요소의 힘의 평형으로부터  $\underline{p} = P\underline{v}_n$ 으로 산정되며, 텐던 세그먼트 양단의 등가 집중하중은  $P$ 만큼 접선방향으로 작용하게 된다. 등가하중법에 대한 좀 더 상세한 유도 과정은 참고문헌 2를 참조하며, 여기에는 절점당 5개의 자유도를 가진 쉘요소에 대해 앞서 유도된 등가하중들을 등가절점하중으로 변환하는 구체적인 과정이 제시되어 있다.

### 4. 초기응력법에 대한 유도

단위 접선 벡터  $\underline{t} = \underline{v}_t / |\underline{v}_t|$ 로 정의하고, 전체 좌표계에 대한 각 방향 변위를  $u, v, w$ 로 두면, 텐던의 축방향 변형률은 식 (7)과 같이 표현될 수 있다. 이를  $\hat{u}$ 에 대해 재정리하는 과정에서  $\underline{B}_p$ 를 구할 수 있다. 초기응력법에 대한 전반적인 유도 과정 및 쉘요소에 적용한 예는 참고문헌 3을 참조할 수 있다.

$$\epsilon_p = t_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + t_x t_y \frac{\partial u}{\partial y} + t_x t_z \frac{\partial u}{\partial z} + t_x t_y \frac{\partial v}{\partial x} + t_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} + t_y t_z \frac{\partial v}{\partial z} + t_x t_z \frac{\partial w}{\partial x} + t_y t_z \frac{\partial w}{\partial y} + t_z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = \underline{B}_p \hat{u} \quad (7)$$

## 5. 수치 예제

### 5.1 9절점 쉘요소

그림 2는 1개의 9절점 쉘요소에 포물선 형상의 텐던이 매입되어 있는 예제를 보여주고 있다. 쉘요소는 절점당 변위 자유도 3개 및 회전 자유도 2개를 가지고 있다. 먼저, 등가하중법을 적용하여 등가 집

중하중 및 등가 분포하중을 구하고 이를 등가절점하중으로 변환하면 그림 3과 같으며, 텐던 배치상 등가절점하중이 유발되는 3개의 절점만을 나타내었다. 한편 초기응력법을 적용하여 등가절점하중을 구해본 결과 그림 3(c)와 정확히 일치하였다.

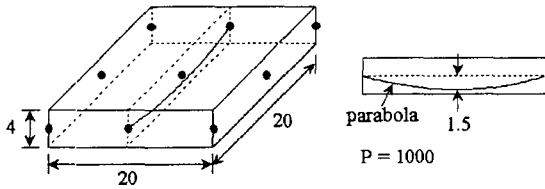


그림 2 예제 1: 9절점 셸요소

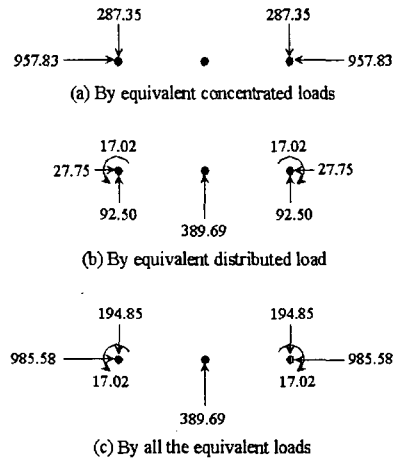


그림 3 예제 1의 등가절점하중

### 5.2 4절점 축대칭 솔리드요소

그림 4는 한국형 원전 격납건물의 반구형 돔 부분만을 4절점 축대칭 솔리드요소로 모델링한 것이다. 돔 두께는 1.07 m, 돔 내경은 21.95 m, 콘크리트 탄성계수는  $2.94 \times 10^4$  MPa, 콘크리트 포아송비는 0.17, 텐던당 프리스트레싱 힘은 5664 kN, 텐던당 단면적은  $0.005051 \text{ m}^2$ , 텐던 탄성계수는  $1.96 \times 10^5$  MPa이다. 실제로는 2방향으로 배치된 텐던을 층으로 근사화하였으며, 근사화 후의 등가 분포하중은 0.68468 MPa, 초기응력은 787.66 MPa로 산정된다. 해석에는 범용 프로그램 ABAQUS<sup>4)</sup>가 사용되었으며, 표 1과 같이 등가하중법과 초기응력법을 적용시킨 결과가 거의 일치함을 알 수 있다.

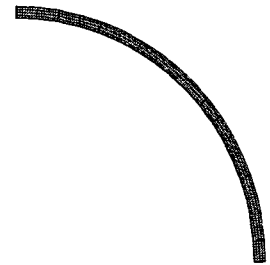


그림 4 예제 2: 4절점 축대칭 솔리드요소

## 6. 결 론

PSC 구조물에서 텐던의 프리스트레싱 효과를 모델링하기 위한 등가하중법과 초기응력법은 서로 다른 관점에서의 유한요소 정식화 과정을 거치지만 결국 같은 결과를 산출하게 되는 이유를 수식의 비교를 통하여 제시하였다. 여기에서는 부착 텐던의 선형해석을 주된 논의 대상으로 삼았지만, 향후 비부착 텐던 및 비선형해석까지도 논의를 확장하고자 한다.

표 1 예제 2의 해석 결과

	등가하중법	초기응력법
정점 변위 (m)	-0.00472	-0.00465
스프링 변위 (m)	-0.00453	-0.00453
정점~스프링 중간위치 원환방향 응력 (MPa)	-7.383	-7.390

### 참고문헌

1. 전세진, 김수만, "프리스트레스트 콘크리트 구조물의 해석기법", 콘크리트학회지, 제16권, 제1호, 2004, pp. 57-64.
2. 전세진, "텐던에 의한 비보존력을 고려한 프리스트레스트 콘크리트 셸 구조물의 기하비선형 유한요소해석", 박사학위 논문, 서울대학교, 2001.
3. Figueiras, J. A. and Póvoas, R. H. C. F., "Modelling of Prestress in Non-linear Analysis of Concrete Structures," Computers and Structures, Vol. 53, No. 1, 1994, pp. 173-187.
4. "ABAQUS/Standard 6.3 - User's Manual," Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 2002.