

# 프리스트레스트 Double T-Beam의 비틀림 거동

## Torsional Behaviors of Prestressed Double T-Beam

성원진\* 이용학\*\*

Sung, Won Jin Lee, Yong Hak

---

### ABSTRACT

Vlasov's hypothesis provides a way to solve the torsional problem with warping torsion of double T-beam section. Not only the warping torsion of the gross section of double T-beam but the torsional resistances of PS tendons and reinforcements have to be considered together in the analysis in which the latter is the restoring roles provided by the upward and downward force components in a geometrical symmetric configuration. It means that the torsional resistances of PS tendons and reinforcements, usually ignored, store the strain energies due to up-downward geometrical changes. Space frame element with 7-degrees of freedom are used for the finite element approximation of the real behaviors. Bimoments and angles of twist obtained from the proposed method show good agreements with those of 3-D. finite element analysis and analytical analysis

---

### 1. 서 론

Vlasov의 비틀림 거동 가정에 따라 프리스트레스트 double T-beam 단면을 얇은 박판요소로 구성된 개단면으로 가정하여 비틀림 거동해석을 수행하였다. 또한 현재까지 프리스트레스트 double T-beam의 비틀림 해석과정에서 일반적으로 무시되어진 PS강선과 철근의 비틀림 저항성을 변형 형상에 따른 기하학적 변위와 이에 따른 신장량의 관계로부터 변형에너지를 유도함으로써 뒹-비틀림에 대한 저항 미케니즘을 규명하고 전체 구조물 강성에서 갖는 역할을 파악한다. 유도된 프리스트레스트 double T-beam의 변형에너지를 사용하여 유한요소 정식화를 수행하였으며 정식화 과정에 사용된 요소는 뒹 변위를 포함한 절점당 7개의 자유도를 갖는 2절점 공간프레임 요소를 이용하였다.

개발된 유한요소 해석방법을 통해 3경간 연속교 형태의 프리스트레스트 double T-beam의 수치해석을 수행하였으며 3차원 유한요소 해석방법 및 지배미분 방정식에 의한 해석결과의 비교 검토를 통해 제안된 해석방법의 정확성을 검증하였다.

### 2. 기하학적 변위 형상에 근거한 PS강선 변형에너지

Fig. 1에 보여진 double T-beam의 전단중심으로부터 비틀림 변형  $\theta_x$ 가 발생할 때 대칭으로 배치된 PS강선은  $\pm v_p(x)$ 의 역대칭 수직운동을 한다. 이때 하향 운동하는 PS강선의 길이는 신장이 발생하고 상향 운동하는 PS강선의 길이는 수축한다. 따라서 double T-beam의 비틀림 거동시 역대칭 수직운동을 하는 PS강선의 변형에너지는 (신장된 PS강선의 변형에너지)+(수축된 PS강선의 변형에너지)가 된다. Fig. 2에서 미소길이의 PS강선의 하향처짐으로 인한 신장량은 기하학적 관계를 적용하면 다음과 같이 표현된다.

---

\* 정회원, 건국대학교 토목공학과 공학박사

\*\* 정회원, 건국대학교 토목공학과 부교수

$$(ds_p + \Delta ds_p)^2 = dx^2 + (dy_{psi} - dv_p)^2 + dw_p^2 \quad (1)$$

비틀림 변형으로 인하여 PS강선이 하향으로 처지는 경우에 발생하는 미소변형에너지  $dU_{ps}^d$ 는 PS강선의 평균 긴장력에 PS강선 미소길이 변화량을 곱한 양으로써 다음과 같이 계산된다.

$$dU_{ps}^d = \left\{ P_{ih} + \frac{1}{2} P_{wh} \right\} \left\{ - \left( \frac{dv_p}{dx} \right) \left( \frac{dy_{psi}}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \left( \frac{dv_p}{dx} \right)^2 dx \right\} \quad (2)$$

여기서  $P_{ih}$ 는 초기 긴장력의 수평성분이고  $P_{wh}$ 는 하중작용에 따른 PS강선 인장력의 수평성분을 의미한다. 이때  $P_{ih}$ 는 작용하중 하에서 일정한 값을 가지며  $P_{wh}$ 는 하중작용이 0으로부터 증가하는 값이 되므로 1/2계수를 사용하여 평균적 개념을 사용하게 된다. 결과적으로 PS강선의 하향처짐으로 인한 기하학적 변위와 신장량을 관계시키는 케이בל 방정식을 정의하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{P_{wh} L_{pe}}{E_p A_{psi}} = - \int_0^l \left( \frac{dv_p}{dx} \right) \left( \frac{dy_{psi}}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dv_p}{dx} \right)^2 dx \quad (3)$$

여기서  $L_{pe}$ 는 부재에 배치된 PS강선의 길이를 의미한다. PS강선의 상향 처짐으로 인한 변형에너지는 Fig. 3에 보인 기하학적 형상으로부터 식 (2)에  $P_{wh}$ 와  $v_p$  대신에  $-P_{wh}$ 와  $-v_p$ 를 대입하여 얻게 되며 PS강선의 수직 처짐과 비틀림각의 기하학적 관계인  $v_p = -z_{psi} \theta_x$ 와 케이בל 방정식을 적용하여 PS강선 하향처짐으로 인한 변형에너지와 상승으로 인한 변형에너지를 합한 PS강선의 변형에너지를 표현하면 다음과 같다.

$$U_{ps} = P_{ih} z_{psi}^2 \int_0^l \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 dx + \frac{E_p A_{psi}}{L_{pe}} z_{psi}^2 \left\{ \int_0^l \left( \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) y_{psi} dx \right\} \left\{ \int_0^l \left( \frac{d^2 \theta_x}{dx^2} \right) y_{psi} dx \right\} \quad (4)$$

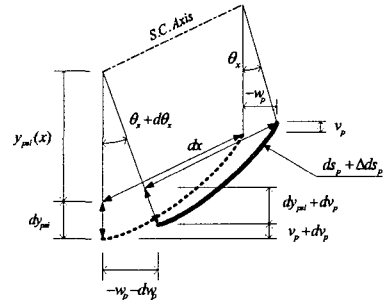
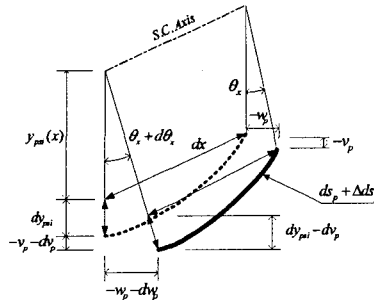
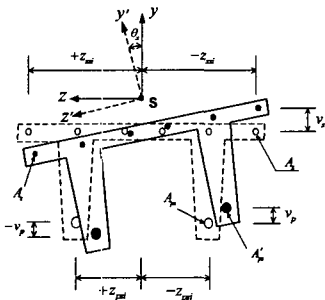


Fig. 1 Torsional rotation of cross section

Fig. 2 Depressed PS tendon

Fig. 3 Elevated PS tendon

식 (4)에서 우변 첫째 항과 둘째 항은 각각 PS강선이 순수비틀림과 뒤틀림에 대한 저항성이 되는 물리적 의미를 갖는다. PS강선의 비틀림 변형에 대한 변형에너지에 부가적으로  $y$  및  $z$ 방향 휨 변형 에너지와 축방향 변형에너지를 고려하여 PS강선의 전체 변형에너지를 표현하면 다음과 같다.

$$U_{ps} = \int_0^l \frac{1}{2} [ E_p \sum A_{psi} \varepsilon_o^2 + E_p \sum A_{psi} z_{psi} \varepsilon_o \phi_y - E_p \sum A_{psi} y_{psi} \varepsilon_o \phi_z + E_p \sum A_{psi} z_{psi} \phi_y \varepsilon_o + E_p \sum A_{psi} z_{psi}^2 \phi_y^2 - E_p \sum A_{psi} y_{psi} \phi_z \varepsilon_o + E_p \sum A_{psi} y_{psi}^2 \phi_z^2 ] dx + \sum P_{ih} z_{psi}^2 \int_0^l \phi_x^2 dx + \sum \frac{E_p A_{psi}}{L_{pe}} z_{psi}^2 \left\{ \int_0^l f y_{psi} dx \right\} \left\{ \int_0^l f y_{psi} dx \right\} \quad (5)$$

여기서 곡률  $\phi_y = -d^2 w / dx^2$ ,  $\phi_z = d^2 v / dx^2$ ,  $f = d^2 \theta_x / dx^2$ ,  $\phi_x = d\theta_x / dx$ 로 표현된다.

### 3. 유한요소 정식화

축방향을 따르는 일정변형률  $\varepsilon_o$ , 단면깊이에 따른 곡률변형률  $\phi_{y,z}$  와  $\phi_{z,y}$ , 비틀림으로 인한 뒤틀림률  $f \bar{\omega}(y, z)$ 로 분리되는 축방향 변형률  $\varepsilon_{xx}(y, z)$ 과 전단변형률  $\gamma_{xy}(y, z)$  및  $\gamma_{xz}(y, z)$ 를  $x, y, z$  축방향 변위 성분인  $u, v, w$ 와 뒤틀림 성분인  $\phi_x$  및 축방향 비틀림 변위 성분인  $\theta_x$  로 표현하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2}z - \frac{d^2v}{dx^2}y + \frac{d^2\theta_x}{dx^2}\bar{w}(y,z), \quad \gamma_{xy} = \left\{ \frac{\partial\bar{w}}{\partial y} - (z-z_s) \right\} \phi_x, \quad \gamma_{xz} = \left\{ \frac{\partial\bar{w}}{\partial z} + (y-y_s) \right\} \phi_x \quad (6)$$

요소절점 1과 2에서 축방향 절점변위  $\mathbf{d}_o = (u_1, u_2)$ ,  $y$ 축 휨 절점변위  $\mathbf{d}_v = (v_1, \theta_{z1}, v_2, \theta_{z2})$ ,  $z$ 축 휨 절점변위  $\mathbf{d}_w = (w_1, \theta_{y1}, w_2, \theta_{y2})$ ,  $x$ 축 비틀림 절점변위  $\mathbf{d}_\theta = (\theta_{x1}, \phi_{x1}, \theta_{x2}, \phi_{x2})$ 를 이용하여 각각 축변위장  $u(x)$ 와 처짐 변위장  $v(x)$ 와  $w(x)$  및 축방향 비틀림 변위장  $\theta(x)$ 를 형상함수를 사용하여 근사화하여 변형률  $\varepsilon_{xx}(y,z)$ ,  $\gamma_{xy}(y,z)$ ,  $\gamma_{xz}(y,z)$ 을 14개의 절점 변위로서 나타내면 다음과 같다.

$$\varepsilon_{xx}(y,z) = (\mathbf{B}_o \ z \mathbf{B}_w \ y \mathbf{B}_v \ \bar{w} \mathbf{B}_\theta) (\mathbf{d}_o \ \mathbf{d}_w \ \mathbf{d}_v \ \mathbf{d}_\theta)^T \quad (7)$$

$$\gamma_{xy}(y,z) = \left\{ \frac{\partial\bar{w}}{\partial y} - (z-z_s) \right\} \mathbf{B}_\theta \mathbf{d}_\theta^T, \quad \gamma_{xz}(y,z) = \left\{ \frac{\partial\bar{w}}{\partial z} + (y-y_s) \right\} \mathbf{B}_\theta \mathbf{d}_\theta^T$$

식 (7)에서 단면 총변형률을 구성하는 일정변형률  $\varepsilon_o$ 과 곡률  $\phi_y$ 와  $\phi_z$  및  $\phi_x$ 와  $f$ 를 변형률-변위 매트릭스를 적용하여 각각 표현하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_o = \mathbf{B}_o \mathbf{d}_o^T, \quad \phi_y = \mathbf{B}_w \mathbf{d}_w^T, \quad \phi_z = -\mathbf{B}_v \mathbf{d}_v^T, \quad \phi_x = \mathbf{B}_\theta \mathbf{d}_\theta^T, \quad f = \mathbf{B}_\theta \mathbf{d}_\theta^T \quad (8)$$

기하학적 변위 관계로부터 유도된 PSC 단면의 변형에너지를 총 포텐셜에너지  $\Pi = U - W$ 의 관계에 대입하여  $\delta\Pi(\mathbf{d}) = (d\Pi/d\mathbf{d})\delta\mathbf{d} = 0$ 을 만족하는 구조물 강성행렬  $\mathbf{K}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K} = \int_0^l \left\{ \mathbf{B}_o^T (EA) \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_w^T (ES_y) \mathbf{B}_w + \mathbf{B}_v^T (ES_z) \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_\theta^T (ES_y) \mathbf{B}_\theta + \mathbf{B}_\theta^T (EI_y) \mathbf{B}_w \right. \quad (9)$$

$$\left. + \mathbf{B}_v^T (ES_z) \mathbf{B}_o + \mathbf{B}_v^T (EI_z) \mathbf{B}_v + \mathbf{B}_\theta^T (EI_w) \mathbf{B}_\theta + \mathbf{B}_\theta^T (GK) \mathbf{B}_\theta \right\} dx \mathbf{d} + 2(E\omega) \left\{ \int_0^l \mathbf{B}_\theta^T dx \int_0^l \mathbf{B}_\theta dx \right\} \mathbf{d}$$

식 (9)에서  $(EA)$ 는 double T-beam 단면의 환산단면적을 의미하고  $(ES_y)$  및  $(ES_z)$ 는  $y$  및  $z$ 축에 관한 환산단면 1차 모멘트,  $(EI_y)$ 와  $(EI_z)$ 는  $y$  및  $z$ 축에 관한 환산단면 2차 모멘트이다.  $(EI_w) = E_c I_{wo}$ 로 콘크리트의 뒹상수이며,  $(GK) = G_c K_c + 2 \sum P_{ih} z_{psi}^2$ 는 PS강선의 긴장력에 의한 순수비틀림 상수 및 콘크리트 단면에 의한 비틀림 상수이며,  $(E\omega) = \sum \frac{E_s A_{sxi}}{L_{se}} z_{ssi}^2 y_{ssi}^2 + \sum \frac{E_p A_{pxi}}{L_{pe}} z_{psi}^2 y_{psi}^2$ 는 PS강선과 철근의 환산 뒹상수이다.

#### 4. 수치해석

수치해석에 사용된 프리스트레스트 double T-beam은 Fig. 4와 같이 40+50+40=130m의 3경간 연속보로서 경간을 따라 일정한 단면을 갖는다. Fig. 5와 같이 철근은 상부플랜지에 교축방향을 따라 D22 이형철근을 단면에 대칭으로 10개 배치하였으며 PS강선은 138.7mm<sup>2</sup>/strand의 7연선 22개를 가지는 텐던 5개를 각 웨브에 대칭으로 하여 2차 포물선 형태로 배치하였다. 각 복부의 긴장력은 19140 kN 이며, 콘크리트 탄성계수는  $E_c = 2.74 \times 10^4$  MPa, 비틀림 하중의 경우 전 경간에 걸쳐 double T-beam의 상부플랜지 좌측 끝단에 9.8kN-m의 등분포 하중을 재하하여 편심으로 인한 등분포 비틀림 모멘트가 발생하도록 하였다.

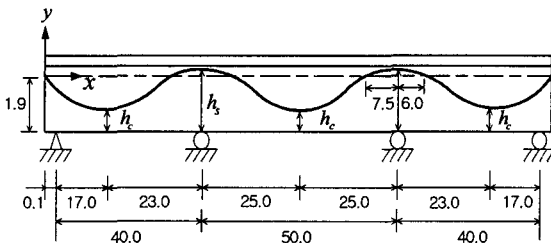


Fig. 4 Longitudinal view of three-span double T-beam ( $h_c = 0.44$ ,  $h_s = 2.31$ ) (unit : m)

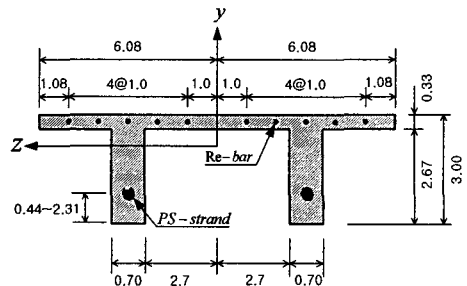


Fig. 5 Cross sectional dimensions of double T-beam (unit : m)

Fig. 6은 Bimoment 해석결과로서 지배미분방정식에 의한 해석결과와 제안된 유한요소 해석결과는 매우 잘 일치하였으며 3차원 유한요소해석에 의한 Bimoment값은 내부지점부의 경계조건으로 인하여 지점부에서의 값이 제안된 유한요소해석보다 적은 결과를 보여주고 있으나 지점부의 경계조건의 효과가 적어지는 구간내에서는 매우 잘 일치하였다. Fig. 7은 거더 종방향을 따르는 비틀림각의 변화를 보여준다. 구간을 따라 비틀림각의 해석결과는 지배미분방정식에 의한 해법과 제안된 알고리즘에 의한 해석결과가 매우 잘 일치함을 보이고 있으나 3차원 유한요소 해석에 결과는 다소 차이가 있음을 알 수 있다. 이는 3차원 유한요소 해석결과의 경우 비틀림각의 계산 과정에서 단면에 발생한 면내 변형이 계산과정에 포함된 결과로 이해된다. Fig. 8은 제안된 PS강선의 비틀림 저항성을 고려하는 해석 기법을 통해 비틀림 거동예측에서 PS강선이 갖는 영향 정도를 평가한 것이다. 최대 비틀림 모멘트가 발생하는 구간중앙부의 비틀림각을 비교한 결과 PS강선의 비틀림 강성을 고려하여 해석한 결과가 10%정도 작은 값을 보였다.

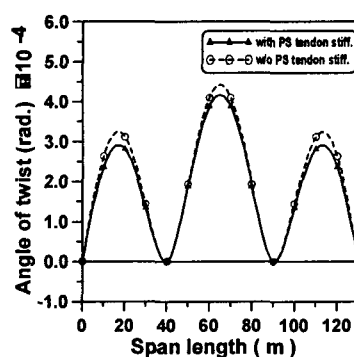
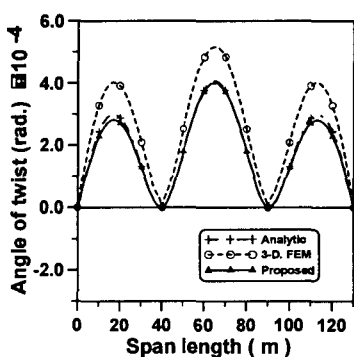
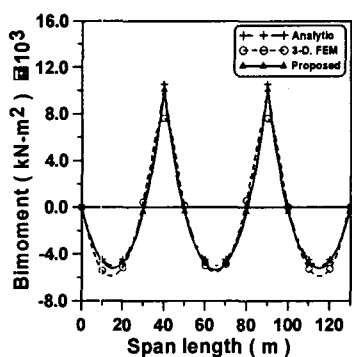


Fig. 6 Comparison of bimoments    Fig. 7 Comparison of angles of twist    Fig. 8 Effects of PS tendon torsional stiffness

## 5. 결론

본 연구에서는 프리스트레스트 double T-beam의 PS강선이 갖는 대칭적 비틀림 저항성을 고려하는 비틀림 거동해석 기법을 보 이론에 근거하는 유한요소법을 사용하여 개발하였다. 개발된 해석기법을 사용하여 프리스트레스트 double T-beam에 대한 수치해석을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) PS강선의 기하학적 변위 형상에 근거하여 PS강선과 철근의 비틀림 저항 미케니즘을 규명하였으며, 특히 PS강선의 초기 긴장력이 갖는 비틀림 저항성을 수식화에 적용함으로써 보다 정교한 해석기법을 제안하였다.
- 2) PS강선의 비틀림 저항성을 고려한 수치해석 결과의 분석을 통해 PS강선이 갖는 비틀림 저항성은 double T-beam 단면의 비틀림 저항성에 비해 무시할 수 없는 비교적 큰 값으로 나타났으며 이러한 결과는 휨 모멘트에 비하여 비틀림 모멘트가 지배하는 하중 경우나 혹은 PS강선의 긴장력이 크고 전단중심으로부터 멀리 위치하는 경우에 그 영향이 증가하는 것으로 분석되었다.

## 참고문헌

1. Abdel-Ghaffar, A. M. (1979), Free Torsional Vibrations of Suspension Bridges, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 105, No. ST4, pp. 767-788.
2. Heins, C. P. (1975), Bending and Torsional Design in Structural Members, Lexington Books, USA.
3. Luccioni, B. M., Reimundim, J. C. and Danesi, R. (1996), Thin-Walled Prestressed Concrete Members under Combined Loading, Journal of Structural Engineering, Vol. 122, No. 3, pp. 291-297.