

# 철도에서 에너지 최소 소비량을 위한 거리기준 운행프로파일 작성 방법에 관한 연구

## A Study of the minimum-energy running profile generation method in the Railway line

홍 효식 \*  
Hong hyo sik

유 광균 \*\*  
Ryu kwangkyun

---

### Abstract

A running-profile generation method has been developed that efficiently generates the minimum-energy running profile, even in railway lines which have complicated speed limit sections. In the developed method, the problem of minimizing energy consumption is formulated as a resource allocation problem by dividing a running profile into several blocks, and is solved by the incremental method. A concept of Uni-Braking Block (UBB) which has only one brake section within it is introduced for the formulation. This paper proposes a specific method for running profile in the railway lines by using UBB. And proposes the algorithm to generate the running profile with minimum-energy .

---

### 1. 서론

열차 운행에 있어서 에너지 소비량의 감소를 위한 문제는 고유가 시대 및 타 운송 수단과의 경쟁에 의해 원가 감소 환경의 필요성이 대두되고 있는 이 시점에서 아주 중요하게 부각되고 있는 문제이다. 열차운행을 위해 위치-속도 평면상에서 열차 운행의 궤적을 나타내는 프로파일을 고려해야 하는데 이를 운전선도라 하여 여러 가지의 목적을 위해 사용되고 있다. 운전선도에는 시간기준으로 하는 것과 거리기준으로 하는 것으로 나눌 수 있는데 우리는 거리기준으로 하는 운전선도를 운행 프로파일이라고 하여 이를 사용하고자 한다. 열차들은 이러한 운전선도에 의해 운행되어지므로 이 운전선도를 작성하는 방법이 중요하다. 이 논문은 에너지 소비량의 감소를 위한 운행 프로파일의 두 가지 형태에 관해 논하고 가장 최적화된 모델을 구하고자 한다. 첫 번째 방법으로는 최대치 이론과 같은 최적화이론에 기초한 이론적인 방법에 관한것이다. [1] 이 방법은 최소의 에너지 소비만을 위한 것으로서 열차 속도 제한이 없는 경우를 가정한 것으로서 속도 제한이 있는 구간에서는 이를 적용할 수 없다. 우리나라에서는 구배뿐만 아니라 열차 운전시계의 값으로 인하여 속도제한을 두고 있다. 위의 방법에서 적용 불가능 이유를 감안하여 최고 속도를 점차적으로 감소하는 것을 반복 함으로서 열차 운행을 시뮬레이션하는 방법을 기초로 하는 방법이 있다.[2] 이 방법은 속도제한이 있는 구간일지라도 에너지 감소를 위한 운행 프로파일을 만들 수 있는 방법이지만 이 방법에 의하여 만들어진 운행 프로파일이 에너지 소비를 최소한 한다는 보증을 할 수 없다.

이 논문의 목적은 에너지 소비를 최소화 하는 것을 수학적인 모델로 검증되는 운행 프로파일을 만드는 방법에 관한 논문이다. 이러한 결과를 얻기 위하여 여기서 에너지 최소 문제를 운행파일을 각각의 구간으로 나누어 각각의 구간에 따라 에너지 최소를 위한 최적함수를 만드는 것으로 하는 자원할당 문제로 바꿀 수 있다. 이 논문에서는 한 구간에 오직 하나의 제동 구간만 있는 구간의 개념을 도입한다. Uni-Braking Section(UBB) 라는 구간은 오직 하나의 제동 구간만 갖는 구간이다. UBB를 사용함으로써

---

\* , \*\* 한국철도대학 교수, 정회원

에너지 최소를 위한 운행 프로파일 생성 알고리즘은 증가하는 방법에 의해 유도되는 자원할당 알고리즘으로 간주하고 볼 수 있게 된다. 전통적으로 사용되는 시뮬레이션 방법 보다 이러한 방법에 의해 작성된 운행 프로파일에 의한 에너지 소비량을 수학적 모델로 구하고 이를 바탕으로 향후 과제로 한국 철도 구간에 적용하고자 한다.

## 2. 에너지 소비량 최소화 문제

### 2.1 최소화 유도

운행 프로파일은 그림 1과 같이 위치-속도 축 상에서 출발지점 Pd(Xd,vd)과 도착지점 Pa(Xa,va)를 연결하는 프로파일이다. 여기서 x 는 위치를 나타내고 v 는 속도를 나타낸다. 운행프로파일은 거리를 기준으로 하는 운전선도로 말할 수 있다. 이 논문에서는 Pd와 Pa에서의 경계 조건 이외의 다음 2가지 제한 조건을 고려한다. 첫 번째 제한 조건은 위치-속도 축 상에서 정의 되어진 속도 제한 구간이고 두 번째 제한 조건은 시간 계획표에서 나타나는 것처럼 운행시간에 대한 강제성이라고 불리는 운행의 정시성이다. 이러한 조건들을 고려해보면 에너지를 최소화 하는 운행 프로파일을 구하는 문제는 이러한 제한 조건들을 만족하는 운행 프로파일을 구해야 한다는 것을 알 수 있다.

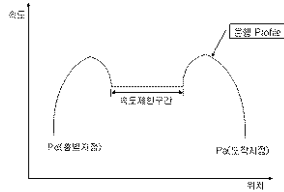


그림 1. 속도-위치축에서 운행프로파일과 속도제한구간

### 2.2 운행프로파일의 정형화

에너지 소비를 최소화 하는 문제를 정형화하기 위하여 운행 프로파일을 다음과 같은 2가지 조건을 만족하는 여러 구간으로 나눌수 있다고 가정한다. 조건은 다음과 같다.

조건1 (C1): 각 구간에서 운행 프로파일을 볼록적으로 결정될 수 있다.

조건2 (C2): 각 구간에서의 에너지 소비량 E(i)는 그 구간의 운행시간 t(i)의 볼록(convex)함수이다. 볼록함수는 그 구간에서 최종적으로 얻는 최소값은 전체적(global)으로 최소값이 된다. 그리고 만약 그 구간들이 조건1을 만족하고 시간 t 가 일정 상수로서  $t = \text{const.} = \sum t(i) \ (i=1,2,3,\dots,n)$  이라면 에너지 소비 최소화 함수는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있으며 이는 자원 할당 문제이다.

$$\min.E = \sum E(i) \quad \text{-----} \quad (1)$$

여기서 i 는 구간의 인덱스이고 n은 역 사이에서 구간의 수이며, E 는 에너지 총 소비량이고 t 는 전체 운행시간이다. 그리고 각 구간에서 조건2를 만족한다면 소비에너지 전체량 E 는 t(i) 의 n차원공간에서 볼록함수가 된다. 여기서 우리는 볼록함수이므로 점진적으로 하나씩 증가하는 방법으로 최소 에너지를 구할 수 있게 된다. 즉 적당한 초기화 운행 프로파일로 시작하여 에너지 소비를 효과적으로 감소시킬

수 있는 어떤 구간에서 운행 시간을 조정함으로써 에너지 최소화를 위한 운행 프로파일을 얻을 수 있다.

### 3. Uni Braking Block

#### 3.1 정의

제2장에서 설명한 문제를 수식화하기 위하여 Uni Braking Block (UBB) 라는 개념을 도입한다. UBB는 그림 2에서와 보는바와 같이 그 구간 끝에서 오직 하나의 제동구간을 갖는 구간이라고 정의 한다. UBB는 각각의 제동구간의 끝 지점에서 출발점  $P_d$  와 도착점  $P_a$  를 연결하는 운행프로파일을 그림 2와 같이 나누면 UBB구간을 정의 할 수 있다.

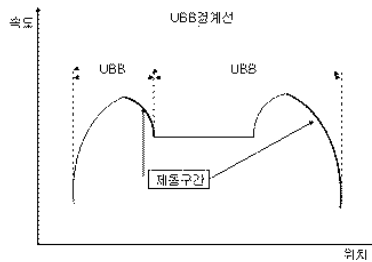


그림 2. 그림 1에서의 UBB

#### 3.2 UBB에서 에너지 소비량

임의의 운행 프로파일의 에너지 소비량 함수  $E$  는 식(2)로 주어진다.

$$E = C1 + C2 \int R_r(V) + C3 \int B(C,V)dx \quad \text{----- (2)}$$

$R_r$ 은 주행저항이고,  $B$ 는 제동력이며,  $V$ 는 속도,  $C$ 는 열차의 제어입력이며,  $C1, C2, C3$ 은 상수이다.

식(2)는 다음과 같이 구한다.

열차의 에너지 최소를 구하기 위하여서는 열차의 운동 방정식을 고려하여야 한다.

열차 운동 방정식은 다음과 같다.

$$a = \frac{T(C,V) - B(C,V) - R_r(V) - R_s(x) - R_c(x)}{W} \quad \text{----- (3)}$$

여기서  $a$  는 가속도이며,  $W$ 는 무게,  $T$ 는 견인력,  $B$ 는 제동력,  $R_r$ 은 운행저항,  $R_s$ 는 경사저항,  $R_c$ 는 구배저항이고  $V$ 는 속도이며  $x$ 는 위치이고  $C$ 는 제어입력이다. 견인력  $T$ 와 제동력 $B$ 는 제어입력 $C$ 에 따라 변화되는 량이다. 즉  $C > 0$ 일때  $T(C,V) > 0$  이고  $C = 0$  일 때는  $T(C,V) = 0, B(C,V) = 0$  이며,  $C < 0$  일때는  $T(C,V) = 0, B(C,V) > 0$  이다. 또한 경사저항  $R_s$ 와 구배저항  $R_c$ 는 오직 위치  $x$ 에 따라 값이 다르며 운행저항  $R_r$ 은 속도 $V$ 의 상한치 함수이다. 에너지 소비량  $E$ 를 구하기 위하여서는 열차의 회생제동에 의해 야기되는 에너지와 에너지 변환의 효율성에 대해 고려하여야 한다.

열차의 운행 에너지  $E$ 를 구하면 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$E = \frac{1}{\eta} \int T(C,V)dx - \zeta \int B(C,V)dx \quad \text{----- (4)}$$

여기서  $\eta$  는 공급되는 에너지로부터 견인력으로 변환되는 변환효율을 나타내는 동력 효율성 계수이고

$\zeta$ 는 제동력으로부터 재생산되는 에너지로 변환되는 에너지를 나타내는 재생 효율 계수이다. 위치-속도 이차원 평면에서 열차의 초기치 출발지점을  $Pd(xd, Vd)$  라 하고 도착지점을  $Pa(xa, Va)$ 라 하고 이때 양지점에서의 열차의 운동 에너지와 위치 에너지는 상수이다. 이것은 초기치 지점과 종착지 지점사이의 에너지 차이  $E_n$ 은 상수임을 알 수 있다. 식(3)을 사용하면 에너지  $E_n$ 은 다음과 같이 된다.

$$E_n = \int [T(C, V) - B(C, V) - Rr(V) - R_s(x) - R_c(x)] dx \quad \text{----- (5)}$$

경사저항  $R_s$  와 구배저항  $R_c$ 는 오직 위치  $x$ 에 의해서만 결정되므로  $R_s$ 와  $R_c$ 의 적분항은 상수가 된다. 그러므로 식(5)는 다음과 같이 된다.

$$E_n = \int [T(C, V) - B(C, V) - Rr(V)] dx - E_s - E_c \quad \text{----- (6)}$$

여기서  $E_s$ 는 경사 저항에 의한 에너지 소비량이고  $E_c$ 는 구배저항에 의한 에너지소비량이다.

식(4)와 식(6)으로부터 견인력  $T$ 를 제거하면 식(7)이 얻어진다.

$$E = E_n + E_s + E_c + \frac{1}{\eta} \int Rr(V) dx + \frac{1 - \eta \zeta}{\eta} \int B(C, V) dx \quad \text{----- (7)}$$

여기서  $E_n + E_s + E_c = C1$ ,  $\frac{1}{\eta} = C2$ ,  $\frac{1 - \eta \zeta}{\eta} = C3$  라 하면 식(2) 가 얻어 진다

열차의 운동방정식 식(2)에 의하면, 전체에너지소비량을 최소화하기위하여 운행저항  $Rr$ 과 제동력  $B$ 에 의한 손실을 동시에 고려하여야한다. 그러나 운행저항  $Rr$ 과 제동력 $B$ 에 의한 손실을 모두 최소화 하는 것은 그림(3)에 보여 지는 것처럼 모순이다. 왜냐하면, 그림(3-a)에서와 같이 운행저항으로 인한 손실을 가능한 최소로 하기 위하여 속도를 유지함으로써 운행저항  $Rr$ 은 속도  $V$ 에 의해 상한치를 갖는 함수로 표현되어지기 때문이다. 또 다른 면으로는 제동력에 의한 손실은 제동거리가 0 일 때 최소가 된다. 그러므로 UBB 에서의 운행 파일 에너지 소비량은 목표속도  $Vt$ 와 제동거리  $Lb$ 에 의해 결정된다. 여기서 목표속도  $Vt$ 는 UBB의 어느 구간 운행프로파일에서 최고속도이다. 이를 나타내는 그림이 그림(4)이다. UBB에서 에너지 소비함수  $E(i)$ 와 운행시간  $t(i)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(i) = E ( Vt_i , Lb_i ) , t(i) = t ( Vt_i , Lb_i ) \quad \text{----- (8)}$$

UBB에서 운행 프로파일이 2.2절에서 언급한 조건1과 조건2를 만족하는 것을 증명한다.

2.2절에서 언급한 조건 C1과 C2는 다음과 같다.

C1 : 각각의 구간에서의 운행프로파일은 독립적으로 결정되어진다.

C2 : 각 구간에서의 에너지 소비량  $E(i)$  는 그 구간에서의 운행시간  $t(i)$ 의 볼록함수이다.

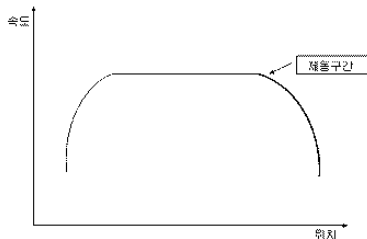


그림 3. (a) 운행저항에 의해 최소손실을 갖는 운행 프로파일

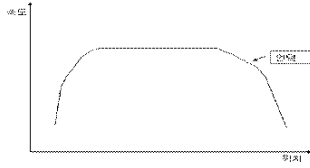


그림 3. (b) 20KHz에서 20cm의 정속운동이 가능하도록 하였다

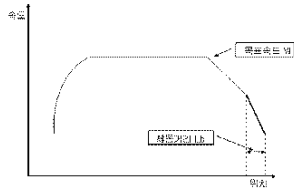


그림 4. UBB에서 목표속도 10cm/s의 정속거리 Lb

C1과 C2를 만족하는 것을 증명하기 위하여 2개의 테스트 변수인  $t_i$  와  $L_b$ 에서 각각 하나씩 고정 시켜놓고 변화량을 시뮬레이션한다. 그림(5)는 어느 한 UBB구간에서 에너지 소비량과 정속거리간의 종속적인 관계를 나타내는 그림이다.

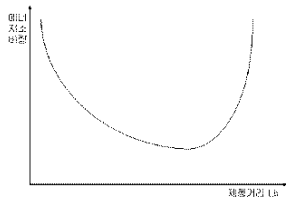


그림 5. 정속거리  $L_b$ 와 에너지 소비량의 관계

그림(5)에서 어떤 주어진 계동거리  $L_b$ 에서 에너지 최소 소비량을 얻어지는 것을 알 수 있다. 이는 블록 함수임을 나타낸다. 이 최소 점은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \text{ ----- (9)}$$

만약  $t$ 가 주어진다면 식(9)를 사용하여 에너지가 최소 되는 운행과일을 만들 수 있다. 그 이후에 어떤 UBB구간에서 에너지 최소를 위한 주행시간의 블록 함수를 구한다. 그림(6)에서 이를 나타낸다.

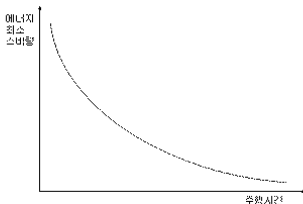


그림 6. 주행시간과 에너지 최소 소비량과의 관계

위에 언급한 것을 수식으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right]_{L_b = const.} = \frac{\partial E}{\partial V_t} \left[ \frac{\partial t}{\partial V_t} \right]^{-1} \text{ 이고 } \left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right]_{V_t = const.} = \frac{\partial E}{\partial L_b} \left[ \frac{\partial t}{\partial L_b} \right]^{-1} \text{ 이면}$$

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right]_{L_b = const.} + \left[ \frac{\partial E}{\partial t} \right]_{V_t = const.} = 0 \text{ ----- (10)}$$

식(10)에서와 같이 UBB는 조건2를 만족한다. 또한 UBB의 경계선상에서 속도가 고정적 상수가 되므로 조건1도 만족한다.

#### 4. 에너지 소비량 최소를 위한 운행 프로파일 작성 알고리즘

앞 3절에서 설명한바와 같이 UBB를 사용하여 에너지 소비 최소를 위한 운행 프로파일을 작성하는 알고리즘을 다음과 같은 순서로 유도한다. 첫 번째로 UBB 생성 단계인데 초기치 운행 과일을 만들고 그 운행과일에서 UBB구간을 찾는 단계이다. 두 번째 단계는 최적화 단계라 하며 그 초기화된 운행 프로파일이 가장 효과적으로 에너지를 감소하는 형상을 만드는 단계이다. 식(10)에 의하면 가장 효과적으로 되는 계  $\frac{dE}{dt}$ 가 가장 최소화 되는 것이다. 이를 좀 더 세분화 시키면 다음과 같다.

(1) UBB 생성 단계

(1.1) 가장 빠른 초기치 운행 프로파일 생성

최대 열차 성능으로 모든 속도 제한 구간과 선형 조건(경사,구배등)을 고려하여 가장 빠른 운행

프로파일을 작성한다.

(1.2) 초기치 UBB를 결정한다.

가장 빠른 운행 프로파일에서 제동 구간의 마지막 지점 등을 찾는다. 각각의 마지막 지점은 그 운행 프로파일에서 UBB들의 경계선이다.

(1.3) 초기치 값들을 설정한다.

(1.2)에서 찾은 각각의 UBB에서 시간과 에너지 소비량을 계산한다.

(2) 최적화 단계

운행 프로파일의 주행시간이 주어진 주행시간과 같게 될 때까지 다음 과정을 반복한다.

(2.1) 각각의 UBB에서  $\frac{dE}{dt}$ 를 계산한다. 주어진 운행프로파일 각각의 UBB에서 2개의 운행프로파일을 만든다. 하나는 목표속도를 감소시키는 것이고 다른 하나는 제동거리를 작게 하는 것이다.

$[\frac{\partial E}{\partial t}]_{L_0}$  와  $[\frac{\partial E}{\partial t}]_{V_1}$  를 계산하여 작은 값을 선택한다.

(2.2) 선택되어지는 UBB의 운행프로파일을 대체한다.

$\frac{\partial E}{\partial t}$  위 값이 최대치가 되는 운행 프로파일을 대체한다.

위의 과정을 반복하면 에너지 최소를 위한 운행프로파일을 얻을 수 있다.

## 5. 결론

이 논문에서는 속도 제한 구간이 있는 선로에서 에너지를 최소화하기 위한 운행프로파일을 작성하는 알고리즘을 수학적 모델로 제안하였다. 이를 수학적 수식으로 증명하였다.

이 방법은 UBB라는 가상의 공간적인 개념을 도입하여 자원 할당하는 문제로 인지하고 점차 하나씩 값을 증가하여 주어진 목표 값과의 일치 여부를 확인하는 컴퓨터 시뮬레이션하는 방법을 제안하였다. 수식에서 나타나는바와 같이 열차의 에너지 소비의 최소화는 운행저항과 제동력의 합이 최소가 되는 점이다. UBB에서 에너지 최소가 되는 운행 프로파일은 목표속도와 제동거리에 의해 규정되어지고 UBB에서의 주행시간의 불특함수임을 알 수 있었다. 에너지 최소의 운행프로파일을 작성하기 위한 알고리즘을 제안하고 이를 설명하였다. 전통적인 방법으로 구하는 것과 UBB를 사용하여 구하는 방법의 결과 차이는 후후 연구과제로 남겨두었다. 전통적인 방법은 전체구간에서의 에너지 소비량을 고려하기 때문에 각 구간에서의 제어입력이 무시되므로 전체적인 에너지 소비량은 UBB구간을 사용하여 작성된 운행프로파일로 운행하는 것보다 증가 한다.

## 참고문헌

1. K.Ichikawa,"Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation train ",Bulletin of JSME,Vol.11,no 47,1968
2. H Kawashima,"Proposal of a method of the opimal train operation for high speed and high density transportation" Int Conf. on Electrification of railways. Germany. 1991