

이동하는 열탄성 보-평판의 진동에 대한 스펙트럴요소 해석

An Axially Moving Thermoelastic Beam-plate: Spectral Element Modeling and Analysis

권경수¹
Kwon, Kyung-Soo

조주용¹
Cho, Joo-Yong

이우식²
Lee, U-Sik

ABSTRACT

The axially moving thin beam-plates exposed to sudden thermal loadings may experience severe vibrations through the thermal shock process. For accurate prediction of the thermal shock-induced vibrations, this paper develops a spectral element model for axially moving thermoelastic beam-plates. The spectral element model which is represented by spectral element matrix is formulated from the frequency-dependent dynamic shape functions which satisfy the governing equations in the frequency-domain. Thus, when compared with the classical finite element model in which simple polynomial functions are used as the shape functions, the spectral element model can provide exact solution by treating a whole uniform structure member as a single finite element, regardless of its length.

1. 서론

최근 반세기 동안 열하중을 받는 다양한 구조물의 동특성 해석은 여러 공학 분야에서 점차 중요하게 인식되고 있다. 구조물이 동적인 열하중을 받을 때, 급격한 온도 변화로 인해 구조물에 열응력이 발생되고 이는 구조물에 진동을 야기 시킨다.

Bolye[1]는 보의 경간을 따라 작용하는 급격한 열 유동으로 인한 진동에 대한 연구를 하였다. 그 후, 보와 적층보, 평판, 적층평판, 패널, 실린더등 다양한 열탄성 구조물에 관한 연구가 있었다.

지금까지 발표된 열탄성 구조물에 관한 연구들을 살펴보면 대부분의 연구가 보나 평판이 정지 상태에 있는 경우에 관한 것이며, 최근 Al-Huniti[2]가 움직이는 열원을 고려한 정지 상태의 적층보에 관한 연구를 하였다. 하지만 본 연구의 주제인 축 방향으로 이동하는 열탄성 구조물에 관한 연구는 아직까지 찾아볼 수 없고, 더욱이 움직이는 열탄성 구조물에 관한 스펙트럴요소 해석은 연구된 바 없었다. 따라서 본 연구에서는 축 방향으로 이동하는 열탄성 보-평판에 대한 스펙트럴요소 모델을 유도하고 열 충격(thermal shock)에 의한 보-평판의 시간응답을 구하고자 한다.

2. 지배방정식의 유도

얇은 보-평판이 x 방향으로 일정한 속도 c 로 이동하는 경우를 생각한다. 이 보-평판의 두께는 h , 너비는 b , 탄성계수는 E , 포아송의 비는 ν 이다. 보-평판의 굽힘 변위를 $w(x,t)$ 라 하고 축 방향으로의 변위를 $u(x,t)$ 라 할 때 보-평판의 운동에너지와 탄성변형에너지, 가상일(virtual work)을 해밀턴 원리(Hamilton's principle)에 적용하여 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

1 인하대학교 대학원 기계공학과

2 인하대학교 기계공학과 교수, 경희원, 책임저자

$$\begin{aligned} \overline{EA}u'' - \rho A \ddot{u} &= -p_x(x,t) + \frac{1}{2}N_T' \\ D w'''' + \rho A c^2 w'' + 2\rho A c \dot{w}' - \rho I \ddot{w}'' + \rho A \dot{w} &= p_z(x,t) - \frac{1}{2}M_T' \end{aligned} \quad (1)$$

여기서

$$D = \frac{EI}{(1-\nu^2)}, \quad I = \frac{bh^3}{12}, \quad \overline{EA} = \frac{EA}{1-\nu^2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M_T(x,t) &= \frac{E \alpha b}{1-\nu} \int_{-L/2}^{L/2} \Delta T(x,z,t) z dz \\ N_T(x,t) &= \frac{E \alpha b}{1-\nu} \int_{-L/2}^{L/2} \Delta T(x,z,t) dz \end{aligned} \quad (3)$$

이고, L 은 두 지지 점 사이의 거리, A 는 보-평판의 단면적을 나타내고 M_T 와 장력 N_T 는 온도변화로 인해 발생하는 모멘트와 장력을 나타내고, 식(3)에서 $\Delta T(x,z,t) = T(x,z,t) - T_0$ 이며 T_0 는 절대기 준온도이다. 또한 $p_x(x,t)$ 와 $p_z(x,t)$ 는 각각 x 방향과 z 방향으로 작용하는 분포하중을 나타낸다.

해밀톤 원리를 이용하면 경계조건도 구해지고 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} M(0,t) &= -M_1(t) \quad \text{or} \quad \phi(0,t) = \phi_1(t), \quad M(L,t) = M_2(t) \quad \text{or} \quad \phi(L,t) = \phi_2(t) \\ V(0,t) &= -V_1(t) \quad \text{or} \quad w(0,t) = w_1(t), \quad V(L,t) = V_2(t) \quad \text{or} \quad w(L,t) = w_2(t) \\ N(0,t) &= -N_1(t) \quad \text{or} \quad u(0,t) = u_1(t), \quad N(L,t) = N_2(t) \quad \text{or} \quad u(L,t) = u_2(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned} M(x,t) &= D w'' + \frac{1}{2}M_T \\ V(x,t) &= -D w''' - \rho h c^2 w' - \frac{1}{2}M_T' - \frac{1}{2}N_T w' - \rho h c \dot{w} + \rho I \dot{w}'' \\ N(x,t) &= \overline{EA}u' - \frac{1}{2}N_T \end{aligned} \quad (5)$$

이고, 아랫 첨자 1은 $x=0$ 에서의 값을, 아랫 첨자 2는 $x=L$ 에서의 값을 나타내고 $\phi = \partial w / \partial x$ 는 기울기를 나타낸다.

온도장(thermal field) $T(x,z,t)$ 또는 $\Delta T(x,z,t)$ 에 관한 열전도방정식은 다음과 같이 에너지 보존 법칙으로부터 유도할 수 있다[3, 4].

$$-k(T'' + T''') + \rho c_p c T' + \frac{T_0 \alpha E}{1-\nu} (\dot{u}' - z \dot{w}'' + w' \dot{w}') + \left[\frac{T_0 \alpha^2 E}{1-2\nu} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \rho c_p \right] \dot{T} = 0 \quad (6)$$

여기서 k 는 열전도율(thermal conductivity), a 는 열팽창계수이며 c_p 는 비열을 나타낸다. x 방향과 z 방향의 열 유동(heat flux)은 보-평판의 이동속도 c 의 영향을 고려하였다[4, 5]. 식(6)에서 (·)는 공간좌표 z 에 대한 미분을 나타내고 본 논문에서 이 정의를 계속 사용할 것이다.

보-평판의 기하학적 특성 때문에 보-평판의 윗면과 아랫면의 급격한 온도차로 인한 온도구배는 축 방향에 비해 두께(z) 방향으로의 영향이 보다 중요한 요인으로 작용한다. 따라서 식(6)에서 온도 $T(x,z,t)$ 는 공간좌표 z 와 시간 t 의 함수로 가정하고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$kT'' - \left[\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} T_0 \alpha^2 E + \rho c_p \right] \dot{T} = 0 \quad (7)$$

3. 스펙트럴요소 모델

이산 푸리에 변환에 근거하여 식(1)의 일반해와 외력과 열하중을 다음과 같이 스펙트럴 형태(spectral form)로 가정한다.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} U_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad w(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} W_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (8)$$

$$P_x(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} P_{x1}(x) e^{i\omega_n t}, \quad P_z(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} P_{z1}(x) e^{i\omega_n t}, \quad N_T(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} N_{T1}(x) e^{i\omega_n t}, \quad M_T(x,t) = \sum_{n=0}^{N-1} M_{T1}(x) e^{i\omega_n t} \quad (9)$$

여기서 $U_n(x)$ 와 $W_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$)는 각각 동적 응답 $u(x, t)$ 와 $w(x, t)$ 의 스펙트럴 성분이고, $P_{x1}(x)$, $P_{z1}(x)$, $N_{T1}(x)$ 그리고 $M_{T1}(x)$ ($n = 0, 1, \dots, N-1$)는 각각 $p_x(x, t)$, $p_z(x, t)$, $N_T(x, t)$, 그리고 $M_T(x, t)$ 의 스펙트럴 성분이다.

식(8)과 (9)를 식(1)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{EA}U_n'' + \rho A \omega_n^2 U_n &= -P_{zn} + \frac{1}{2}N_{Tn}' \\ DW_n'' + (\rho A c^2 + \rho i \omega_n^2)W_n' + 2i\rho A c \omega_n W_n' - \rho A \omega_n^2 W_n &= P_{zn} - \frac{1}{2}M_{Tn}' \end{aligned} \quad (10)$$

같은 방법으로 식(5)의 모멘트와 전단력 그리고 장력도 다음과 같은 스펙트럴 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} N_n(x) &= \overline{EA}U_n' - \frac{1}{2}N_{Tn}' \\ V_n(x) &= -DW_n'' - (\rho A c^2 + \rho i \omega_n^2)W_n' - i\rho A c \omega_n W_n - \frac{1}{2}M_{Tn}' \\ M_n(x) &= DW_n'' + \frac{1}{2}M_{Tn}' \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 $N_n(x)$ 와 $V_n(x)$ 그리고 $M_n(x)$ 는 각각 $N(x, t)$ 와 $V(x, t)$ 그리고 $M(x, t)$ 의 스펙트럴 성분이다. 일반적으로 스펙트럴요소의 구성은 지배방정식의 동차방정식(homogeneous equation)으로부터 시작되므로 [6, 7] 식(10)에서 비동차(nonhomogeneous) 항을 소거하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{EA}U_n'' + \rho A \omega_n^2 U_n &= 0 \\ DW_n'' + (\rho A c^2 + \rho i \omega_n^2)W_n' + 2i\rho A c \omega_n W_n' - \rho A \omega_n^2 W_n &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

식(12)의 일반해는 다음과 같은 형태로 가정할 수 있다.

$$U_n(x) = A_n e^{k_n x}, \quad W_n(x) = B_n e^{\lambda_n x} \quad (13)$$

여기서 k_n 와 λ_n 는 각각 축 방향과 횡 방향의 진동 모드에 대한 파수(wavenumber)이다. 식(13)을 식(12)에 대입하면 다음과 같은 분산관계식(dispersion relation)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \overline{EA}k_n^2 + \rho A \omega_n^2 &= 0 \\ D\lambda_n^4 + (\rho A c^2 + \rho i \omega_n^2)\lambda_n^2 + 2i\rho A c \omega_n \lambda_n - \rho A \omega_n^2 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

식(14)로부터 축 방향의 진동 모드에 대한 두 개의 파수 k_{nr} ($r=1, 2$)와 횡 방향의 진동 모드에 대한 네 개의 파수 λ_{nr} ($r=1, 2, 3, 4$)을 구할 수 있다. 식(14)로부터 구한 k_{nr} 과 λ_{nr} 을 이용하여 식(12)의 일반해를 다음과 같은 행렬 형태로 얻을 수 있다.

$$U_n(x) = [E_{Un}(x; \omega_n)]\{C_n\}, \quad W_n(x) = [E_{Wn}(x; \omega_n)]\{C_n\} \quad (15)$$

여기서

$$\begin{aligned} [E_{Un}(x; \omega_n)] &= \begin{bmatrix} e^{k_{n1}x} & 0 & 0 & e^{k_{n2}x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [E_{Wn}(x; \omega_n)] &= \begin{bmatrix} 0 & e^{\lambda_{n1}x} & e^{\lambda_{n2}x} & 0 & e^{\lambda_{n3}x} & e^{\lambda_{n4}x} \end{bmatrix} \\ \{C_n\} &= \{A_{n1} \ B_{n1} \ B_{n2} \ A_{n2} \ B_{n3} \ B_{n4}\}^T \\ \{d_n\} &= \{U_{n1} \ W_{n1} \ \Phi_{n1} \ U_{n2} \ W_{n2} \ \Phi_{n2}\}^T \end{aligned} \quad (16)$$

이고, $\{C_n\}$ 은 경계조건에 의해 결정되는 상수 벡터이다.

길이 l 인 보-평판의 유한요소에 대한 스펙트럴 절점 자유도는 다음과 같이 정의된다.

$$U_{n1} = U_{n1}(0), \quad W_{n1} = W_{n1}(0), \quad \Phi_{n1} = W_{n1}'(0), \quad U_{n2} = U_{n2}(l), \quad W_{n2} = W_{n2}(l), \quad \Phi_{n2} = W_{n2}'(l) \quad (17)$$

식(15)를 식(17)에 대입하면 다음과 같은 스펙트럴 절점 자유도 벡터 $\{d_n\}$ 와 상수 벡터 $\{C_n\}$ 사

이의 관계가 주어진다.

$$\{\mathbf{d}_n\} = [\mathbf{X}_n(\omega_n)]\{\mathbf{C}_n\} \quad (18)$$

식(18)을 사용하여 식(16)의 상수 벡터 $\{\mathbf{C}_n\}$ 를 소거하면 일반해는 다음과 같이 유도된다.

$$U_n(x) = [\mathbf{E}_{Un}] [\mathbf{X}_n]^{-1} \{\mathbf{d}_n\} = [\mathbf{N}_{Un}(x; \omega_n)] \{\mathbf{d}_n\}, \quad W_n(x) = [\mathbf{E}_{Wn}] [\mathbf{X}_n]^{-1} \{\mathbf{d}_n\} = [\mathbf{N}_{Wn}(x; \omega_n)] \{\mathbf{d}_n\} \quad (19)$$

여기서 $[\mathbf{N}_{Un}]$ 와 $[\mathbf{N}_{Wn}]$ 는 동적(frequency-dependent) 형상 함수이다.

스펙트럴요소 행렬은 식(19)를 이용한 변분법(variational approach)[32]으로 구할 수 있으며 식(10)을 다음과 같이 weak form으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_0^l (\overline{EA} U_n'' + \rho A \omega_n^2 U_n - F_m) \delta U_n dx &= 0 \\ \int_0^l \{ D W_n'''' + (\rho A c^2 + \rho I \omega_n^2) W_n'' + 2i \rho A c \omega_n W_n' - \rho A \omega_n^2 W_n - F_{sn} \} \delta W_n dx &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

식(20)을 부분적분하면 다음과 같이 유도된다.

$$[\mathbf{S}_n(\omega)] \{\mathbf{d}_n\} = \{\mathbf{f}_n\} \quad (21)$$

스펙트럴요소 행렬 $[\mathbf{S}_n(\omega)]$ 와 스펙트럴 절점력 벡터 $\{\mathbf{f}_n\}$ 는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_n(\omega)] &= [\mathbf{S}_{Un}(\omega)] + [\mathbf{S}_{Wn}(\omega)] \\ \{\mathbf{f}_n\} &= \{\mathbf{f}_{Un}\} + \{\mathbf{f}_{Wn}\} \end{aligned} \quad (22)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_{Un}] &= \int_0^l \{ \overline{EA} [N'_{Un}]^T [N'_{Un}] - \rho A \omega_n^2 [N_{Un}]^T [N_{Un}] \} dx \\ [\mathbf{S}_{Wn}] &= \int_0^l \{ D [N''_{Wn}]^T [N''_{Wn}] - (\rho A c^2 + \rho I \omega_n^2) [N'_{Wn}]^T [N'_{Wn}] \\ &\quad + i \rho A c \omega_n ([N_{Wn}]^T [N'_{Wn}] - [N'_{Wn}]^T [N_{Wn}]) - \rho A \omega_n^2 [N_{Wn}]^T [N_{Wn}] \} dx \\ \{\mathbf{f}_{Un}\} &= \{ N_{1n} \quad 0 \quad 0 \quad N_{2n} \quad 0 \quad 0 \}^T + \int_0^l P_m(x) [N_{Un}]^T dx - \frac{1}{2} [N_{Tn}(l) N_{Un}(l) - N_{Tn}(0) N_{Un}(0)]^T \\ \{\mathbf{f}_{Wn}\} &= \{ 0 \quad V_{1n} \quad M_{1n} \quad 0 \quad V_{2n} \quad M_{2n} \}^T + \int_0^l P_w(x) [N_{Wn}]^T dx + \frac{1}{2} [M_{Tn}(l) N'_{Wn}(l) - M_{Tn}(0) N'_{Wn}(0)]^T \end{aligned} \quad (23)$$

스펙트럴요소 행렬 $[\mathbf{S}_n(\omega)]$ 는 주파수의 함수로 표현되며, 유한요소법에서 사용하는 유한요소의 조립과정(assembly)과 같은 방법으로 전체구조물에 대한 스펙트럴요소를 구성할 수 있다. 결합된 전역행렬에 경계조건을 적용하면 주파수 영역에서 전체 시스템의 동역학 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$[\mathbf{S}_n^G(\omega)] \{\mathbf{d}_n^G\} = \{\mathbf{f}_n^G\} \quad (24)$$

전체 시스템에 대한 고유진동수 ω_{MAT} 는 $[\mathbf{S}_n^G(\omega)]$ 의 행렬식(determinant)이 영이 되는 조건으로부터 구할 수 있다.

4. 주파수 영역에서의 온도

식(7)은 온도장에 관한 열전도방정식이며 그 경계조건은 보-평판의 윗면과 아랫면에 조건에 의해 결정된다. 앞 절에서 변위성분을 스펙트럴 성분으로 나타낸 것과 같이 온도장도 다음과 같이 스펙트럴 형태로 가정한다.

$$T(z, t) = \sum_{n=0}^{N-1} T_n(z) e^{i\omega_n t} \quad (25)$$

여기서 T_n 는 온도장 $T(x, t)$ 의 스펙트럴 성분을 나타낸다. 식(25)를 식(7)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$T_n'' - \frac{i\omega_n}{k} \left[\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} T_0 \alpha^2 E + \rho c_p \right] T_n = 0 \quad (26)$$

식(26)의 일반해는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$T_n(z) = B_{n1} e^{-\tau_n z} + B_{n2} e^{\tau_n z} \quad (27)$$

여기서

$$\tau_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{k} \sqrt{\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} T_0 \alpha^2 E + \rho c_p}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega_n}{2k} \sqrt{\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)(1-\nu)} T_0 \alpha^2 E + \rho c_p}} \quad (28)$$

상수 B_{n1} 와 B_{n2} 는 보-평판의 온도경계조건의 의해 결정된다. 식(29)에서 온도의 스펙트럴 성분 T_n 가 계산되며 식(23)의 열하중 M_{Tn} 와 N_{Tn} 는 식(3)과 (9)을 이용하여 계산된다.

5. 수치예제 및 검토

수치해석 예제로 축 방향으로 이동하며 양단 단순 지지된, 길이가 $2m$ 인 보-평판을 고려하였다. 보-평판의 물성치는 두께 $h = 5mm$, 너비 $b = 0.5m$, 탄성계수 $E = 73GPa$, 포아송의 비 $\nu = 0.33$, 단위 부피당 질량 $\rho = 2770 kg/m^3$, 열팽창계수 $\alpha = 23.0 \times 10^{-6}/K$, 열전도율 $k = 177 W/mK$, 그리고 비열 $c_p = 875 J/kgK$ 이다. 그림1에서와 같이 온도변화는 단지 중앙부분의 윗면에만 작용하고 다른 부분은 실온 T_0 를 유지한다.

열로 인한 보-평판의 진동응답을 평가하기 위해서 보-평판의 중앙부분의 윗면을 시간 $t = 0$ 초에서 $t = 0.01$ 초까지 온도차 $\Delta T = 20K$ 가 되도록 가열을 하였다. 여기서 $L_1 = 0.8 m$ 이고 $L_2 = 0.4 m$ 이다. 그림2은 가열하는 보-평판의 중앙부분에서 두께 방향으로의 시간에 따른 온도분포를 보여준다. 열는 보-평판의 중립면에 대해 대칭적으로 빠르게 퍼지고, 따라서 열로 인한 모멘트 M_T 는 약 0.05 이후에는 사라지게 되고, 열로 인한 장력 N_T 는 작은 안정된 값으로 수렴한다. 그림3에서는 스펙트럴요소법과 유한요소법을 통해 해석한 주파수 응답 함수(frequency response function)를 비교하고 그림4에서는 시간응답을 비교하였다.

6. 결론

본 연구에서는 외부로부터 열하중을 받는 이동하는 보-평판의 스펙트럴 요소모델을 유도했다. 스펙트럴요소 모델은 주파수 영역에서 지배방정식을 만족하는 정확한 해를 이용한 동적 형상함수로 부터 유도된다. 또한, 본 연구에서는 이러한 스펙트럴요소 모델을 검증하기 위해 유한요소 모델을 유도하고 수치예제를 통해 스펙트럴요소 모델의 정확성을 확인 하였다. 또한 상판의 급격한 온도 변화로 인한 이동하는 보-평판의 진동응답을 살펴보았다.

참고문헌

1. B. A. Boley(1956), "Thermally Induced Vibrations of Beams," Journal of Aeronautical Science, Vol. 23, pp. 179-181.
2. N. S. Al-Hunithi(1985), "Dynamic Behavior of a Laminated Beam Under the Effect of a Moving Heat Source," Journal of Composite Materials, Vol. 38, No. 23, pp. 2143-2160.
3. U-S Lee(1985), "Thermal and Electromagnetic Damping Analysis," AIAA Journal, Vol. 23, No. 11, pp. 1784.
4. M. N. Özisik(1993), Heat Conduction, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York
5. J. V. Beck, and R. L. McMasters, (2004), "Solution for Multi-dimension Transient Heat Conduction with Solid Body Motion," International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 47, pp. 3757-3768.

- U-S Lee, and A. Y. T. Leung(2000), "The Spectral Element Method in Structural Dynamics," The Shock and Vibration Digest, Vol. 32, No. 6, pp. 451-465..
- U-S Lee(2004), Spectral Element Method in Structural Dynamics, Inha University Press, Incheon (Korea)

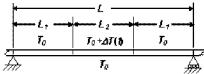


그림 1. An example problem: thermal boundary conditions on the upper and lower surfaces of the beam-plate which is moving over two simple support

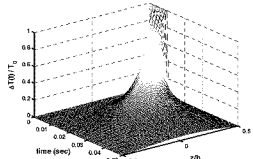


그림 2. Time history of the temperature distribution through the thickness of beam-plate

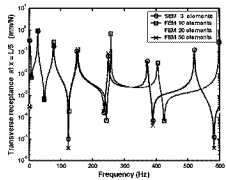
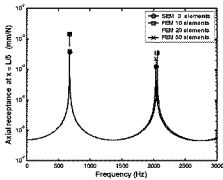


그림 3. Comparison of the frequency response functions obtained by the present SEM and FEM.

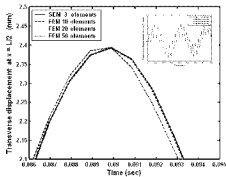
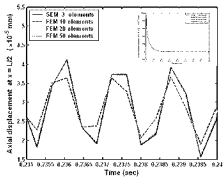


그림 4. Comparison of the time responses obtained by the present SEM and FEM.