

두꺼운 링의 고유진동 해석

Natural Vibration Analysis of Thick Rings

김창부*
Kim, Chang-Boo

박정우**
Park, Jung-Woo

ABSTRACT

In this paper, we have systematically formulated the equations concerned to the in-plane and out-of-plane motions and deformations of a thick circular beam by using the kinetic and strain energies in order to analyse natural frequencies of a thick ring. The effects of variation of radius of curvature across the cross-section and also the effects of bending shear, extension and twist are considered. The equations of motion for natural vibration analysis of a ring are obtained utilizing the cyclic symmetry of vibration modes of the ring. The frequencies calculated using thick ring model and thin ring model are compared and discussed with the ones obtained from finite element analysis using the method of cyclic symmetry with 20-node hexahedral solid elements for rings with the different ratio of radial thickness to mean radius.

1. 서론

링의 고유진동 해석은 면내 굽힘과 인장, 면외 굽힘과 비틀림의 연성으로 인하여 복잡하게 된다. 링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화에 의한 효과와 굽힘전단 및 회전관성 효과를 무시하면 링의 반경방향 두께가 반경에 비하여 매우 작지 않은 경우 즉 두꺼운 링의 경우에는 고유진동 해석은 부정확하게 되고, 링의 반경방향 두께가 반경에 비하여 매우 작은 경우 즉 얇은 링의 경우에도 고차모드의 고유진동수에서 오차가 크게 발생한다.

오래 전부터 링의 고유진동해석에 관한 연구가 많이 되어 왔다. 대부분의 연구는 링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화에 의한 효과를 무시한 얇은 원형 보 모델을 사용하여 링의 고유진동을 해석하였다. 대표적인 연구는 참고논문 [1-5]을 들 수 있다.

링의 단면을 가로 지르는 곡률반경의 변화에 의한 효과를 고려한 두꺼운 원형 보 모델을 사용하여 링의 고유진동을 해석한 대표적인 연구를 간략히 소개하면 다음과 같다.

Davis 등 [6]은 링의 면내 고유진동을 두꺼운 원형 보 유한요소를 개발하여 해석하였고, Kirkhope [7]는 두꺼운 링의 면내 고유진동을 순환대칭 모드를 사용해서 동적 강성행렬을 유도하여 해석하였다. Bickford 등 [8]은 두꺼운 링의 면외 고유진동을 순환대칭 모드를 사용해서 특성방정식을 유도하여 해석하였다.

본 논문에서는 두꺼운 링의 고유진동을 해석하기 위하여 상기한 논문들에서 제시된 운동방정식을 수정하고 보완하여 원형 보의 단면을 가로 지르는 곡률 반경의 변화 효과를 고려하면서 굽힘전단, 인장과 비틀림을 고려할 수 있도록 두꺼운 원형 보의 면내 및 면외 운동과 변형에 관련된 식들을 운동 및 변형에너지를 사용하여 체계적으로 정립하고, 링의 진동모드의 원주방향 순환대칭

* 인하대학교 기계공학과 교수, 정회원

** 인하대학교 기계공학과 석사과정

성을 이용하여 고유진동해석을 위한 운동방정식을 유도하였다. 링의 평균반경에 대한 반경방향 두께의 비가 다른 링에 대하여 두꺼운 링 모델과 얇은 링 모델을 사용하여 얻어진 고유진동해석 결과를 육면체 20절점 고체요소를 사용하면서 순환대칭성을 이용한 유한요소 고유진동해석 결과와 비교하고 검토한다.

2. 두꺼운 링의 운동 및 변형

2.1 링의 기하학

링의 기준 좌표계는 $Oxyz$ 이다. 링의 원주방향에 수직인 단면의 면적은 일정하고 단면의 중심점을 지나는 중심선의 반경은 a 이다. x 축에서 원주방향으로 θ 만큼 떨어진 단면의 기준좌표계 $C\xi n\zeta$ 는 단면의 중심점 C 점을 원점으로 하고 반경방향 ζ , 접선방향 n , 축방향 ξ 의 축을 갖는다. 단면은 $\zeta-n$ 면 및 $n-\zeta$ 면에 대하여 이중대칭이다.

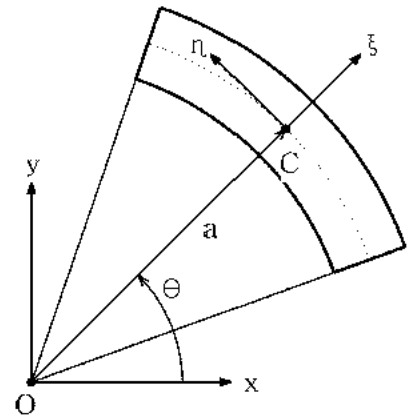


그림 1. 링 단면

2.2. 변위

링이 변형할 때 단면은 변형하지 않고 평면을 유지한다고 가정한다. C 점의 변위 및 단면의 회전은 θ 의 함수로서 다음과 같다.

$$\vec{u}_C = u_\xi \vec{e}_\xi + u_n \vec{e}_n + u_\zeta \vec{e}_\zeta, \quad \vec{\phi}_C = \phi_\xi \vec{e}_\xi + \phi_n \vec{e}_n + \phi_\zeta \vec{e}_\zeta$$

여기서 $\vec{e}_\xi, \vec{e}_n, \vec{e}_\zeta$ 는 각각 ξ, n, ζ 방향의 단위 길이 벡터이다.

C 점을 통과하는 중심선에 수직인 단면상의 P 점의 C 점에 대한 상대위치는 다음과 같고

$$\vec{\rho} = \vec{CP} = \xi \vec{e}_\xi + \zeta \vec{e}_\zeta$$

단면 회전이 매우 작다고 가정하면 P 점의 변위는 다음과 같다.

$$\vec{u}_P = \vec{u}_C + \vec{\phi}_C \times \vec{\rho} = (u_\xi + \zeta \phi_n) \vec{e}_\xi + (u_n + \zeta \phi_\xi - \zeta \phi_\zeta) \vec{e}_n + (u_\zeta - \zeta \phi_n) \vec{e}_\zeta$$

2.3. 변형율 및 응력

P 점에서의 변형율을 단면 기준좌표계 $C\xi n\zeta$ 의 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_{\xi\xi} = 0, \quad \varepsilon_{nn} = 0, \quad \varepsilon_{\zeta\zeta} = 0,$$

$$\varepsilon_{n\xi} = \frac{a}{(a+\xi)} (\varepsilon_n + \xi \kappa_\zeta - \zeta \kappa_\xi), \quad \gamma_{n\xi} = \frac{a}{(a+\xi)} (\gamma_\xi + \zeta \tau_n), \quad \gamma_{n\zeta} = \frac{a}{(a+\xi)} (\gamma_\zeta - \xi \tau_n)$$

여기서 ε_n 는 인장변형율, γ_ξ 와 γ_ζ 는 각각 ξ 와 ζ 방향 전단변형율, τ_n 는 n 방향 비틀림, κ_ξ 와 κ_ζ 는 각각 ξ 와 ζ 방향 곡률로서 다음과 같이 표현된다.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{a} (u_\xi + u_{n,\theta}), \quad \gamma_\xi = \phi_\zeta + \frac{1}{a} (-u_n + u_{\zeta,\theta}), \quad \gamma_\zeta = -\phi_\xi + \frac{1}{a} u_{\xi,\theta},$$

$$\tau_n = \frac{1}{a} (\phi_{n,\theta} + \phi_\xi), \quad \kappa_\zeta = \frac{1}{a} \phi_{\zeta,\theta}, \quad \kappa_\xi = \frac{1}{a} (\phi_{\xi,\theta} - \phi_n)$$

P 점에서의 응력을 단면 기준좌표계 $C\xi n\zeta$ 의 성분으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{n\xi} = E \varepsilon_{n\xi}, \quad \sigma_{n\zeta} = G \gamma_{n\zeta}, \quad \sigma_{\xi\zeta} = G \gamma_{\xi\zeta}$$

여기서 E 는 Young계수, G 는 전단계수로서 E 와 Poisson비 ν 로 표현하면 $G = E/2(1+\nu)$.

2.4. 변형에너지

링의 변형에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_A (\sigma_{n\xi} \varepsilon_{n\xi} + \sigma_{n\zeta} \gamma_{n\zeta} + \sigma_{\xi\zeta} \gamma_{\xi\zeta}) (a+\xi) dA \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [N_\xi \varepsilon_\xi + N_\zeta \gamma_\zeta + M_n \tau_n + M_\zeta \kappa_\zeta + M_\xi \kappa_\xi] a d\theta \end{aligned}$$

여기서 N_n 는 인장력, N_ξ 과 N_ζ 는 각각 ξ 과 ζ 방향 전단력, M_n 는 비틀림 모멘트, M_ξ 과 M_ζ 는 각각 ξ 과 ζ 방향 굽힘 모멘트로서 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N_n &= EA(1+Z^*)\epsilon_n - EAZ^*a\kappa_\xi, \quad N_\xi = GA(1+Z^*)\gamma_\xi, \quad N_\zeta = GA(1+Z^*)\gamma_\zeta + GAZ^*a\tau_n, \\ M_n &= GI_n^*\tau_n + GAZ^*a\gamma_\xi, \quad M_\xi = EI_\xi^*\kappa_\xi - EAZ^*a\epsilon_n, \quad M_\zeta = EI_\zeta^*\kappa_\zeta \\ A &= \int_A dA, \quad I_\xi^* = \int_A \frac{a}{(a+\xi)} \zeta^2 dA, \quad I_\zeta^* = \int_A \frac{a}{(a+\xi)} \xi^2 dA, \quad I_\eta^* = \int_A \frac{a}{(a+\xi)} (\xi^2 + \zeta^2) dA, \\ Z^* &= -\frac{1}{A} \int_A \frac{\xi}{(a+\xi)} dA = -\frac{I_\xi^*}{Aa^2} \end{aligned}$$

중심선에 수직한 단면에 분포된 전단응력이 단면경계에서 응력경계조건을 만족하도록 단면의 뒤틀림(warping)을 고려하여 전단력과 비틀림 모멘트를 수정해서 표현하면 다음과 같다.

$$N_\xi = K_\xi GA(1+Z^*)\gamma_\xi, \quad N_\zeta = K_\zeta GA(1+Z^*)\gamma_\zeta + K_\zeta GAZ^*a\tau_n, \quad M_n = GJ_n^*\tau_n + k_\zeta GAZ^*a\gamma_\xi$$

여기서 $J_n^* = K_n I_n^*$ 이며 K_ξ , K_ζ 는 단면 전단계수 [9]이며, K_n 는 단면 비틀림계수 [10]이다.

2.5. 운동에너지

P점의 속도는 θ 의 함수로서 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{u}_P = \vec{u}_C + \vec{\phi}_C \times \vec{p} = (\dot{u}_\xi + \zeta \dot{\phi}_n) \vec{e}_\xi + (\dot{u}_n + \zeta \dot{\phi}_\xi - \xi \dot{\phi}_\zeta) \vec{e}_n + (\dot{u}_\zeta - \xi \dot{\phi}_n) \vec{e}_\zeta$$

따라서 링의 운동에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_A \rho \vec{u}_P \cdot \vec{u}_P(a+\xi) dA \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\rho A (\dot{u}_\xi^2 + \dot{u}_\eta^2 + \dot{u}_\zeta^2) + 2\rho AZa (\dot{u}_\eta \dot{\phi}_\zeta - \dot{u}_\zeta \dot{\phi}_\eta) + \rho I_\xi \dot{\phi}_\xi^2 + \rho I_\zeta \dot{\phi}_\zeta^2 + \rho I_n \dot{\phi}_n^2 \right] a d\theta \end{aligned}$$

여기서

$$I_\xi = \int_A \zeta^2 dA, \quad I_\zeta = \int_A \xi^2 dA, \quad I_\eta = \int_A (\xi^2 + \zeta^2) dA, \quad Z = \frac{1}{Aa^2} \int_A \xi^2 dA = \frac{I_\xi}{Aa^2}$$

2.6. 얇은 링 모델

상기한 바와 같이 링의 단면을 가로 지르는 곡률 반경의 변화 효과를 고려하는 경우를 두꺼운 링 모델(thick ring model)이라고 한다. 반면에 링의 단면을 가로 지르는 곡률 반경의 변화 효과를 무시하는 경우를 얇은 링 모델(thin ring model)이라고 한다. 이와 같은 경우에 반경방향 위치에 따라서 변하는 링의 길이 변화량을 무시하면 즉, $\zeta \ll a$ 라고 하면 단면의 기하학적 특성치를 다음과 같이 근사시킬 수 있다.

$$I_\xi^* \approx I_\xi, \quad I_\zeta^* \approx I_\zeta, \quad I_n^* \approx I_\xi + I_\zeta = I_n, \quad Z^* \approx 0, \quad Z \approx 0$$

3. 두꺼운 링의 고유진동

링의 변형은 x-y면에 대하여 면내(in-plane) 및 면외(out-of-plane)변형으로 구분될 수 있다. 면내변위는 u_ξ , u_n , ϕ_ξ 이고, 면외변위는 u_ζ , ϕ_ζ , ϕ_n 이다.

3.1 면내 고유진동

링의 면내 변형에너지 및 면내 운동에너지는 다음과 같다.

$$V_I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[K_\xi GA(1+Z^*)\gamma_\xi^2 + EA(1+Z^*)\epsilon_n^2 - 2EAZ^*a\kappa_\zeta\epsilon_n + EI_\xi^*\kappa_\xi^2 \right] a d\theta$$

$$T_I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\rho A \dot{u}_\xi^2 + \rho A \dot{u}_n^2 + 2\rho AZa \dot{u}_n \dot{\phi}_\zeta + \rho I_\xi \dot{\phi}_\xi^2 \right] a d\theta$$

진동수 ω , 절지경수 n 의 순환대칭모드로 진동하는 링의 면내변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u_\xi = (u_{\xi C} \cos n\theta + u_{\xi S} \sin n\theta) e^{i\omega t}, \quad u_n = (u_{nC} \cos n\theta + u_{nS} \sin n\theta) e^{i\omega t},$$

$$\phi_{\xi} = (\phi_{\xi C} \cos n\theta + \phi_{\xi S} \sin n\theta) e^{i\omega t}$$

상기 식을 면내 변형에너지 및 운동에너지 식에 대입하여 적분하고, 라그랑즈 방정식을 이용하여 면 다음과 같은 면내 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$[K_{IC} - \omega^2 M_{IC}]\{u_{IC}\} = \{0\} \quad \text{for } n = 0, \quad [K_{IA} - \omega^2 M_{IA}]\{u_{IA}\} = \{0\} \quad \text{for } n \geq 1$$

여기서

$$u_{IA} = \begin{Bmatrix} u_{IC} \\ u_{IS} \end{Bmatrix}, \quad M_{IA} = \begin{bmatrix} M_{IC} & 0 \\ 0 & M_{IC} \end{bmatrix}, \quad K_{IA} = \begin{bmatrix} K_{IC} & -K_{IS} \\ K_{IS} & K_{IC} \end{bmatrix},$$

$$u_{IC} = (u_{\xi C}, u_{\eta C}, \phi_{\xi C})^T, \quad u_{IS} = (u_{\xi S}, u_{\eta S}, \phi_{\xi S})^T,$$

$$M_{IC} = \pi \rho A a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & Z a \\ 0 & Z a & \mu_{\xi} a^2 \end{bmatrix}, \quad K_{IC} = \pi E I_{\xi}^* \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} e_{\eta} + s_{\xi} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & e_{\eta} n^2 + s_{\xi} & -s_{\xi} a - \delta_Z a n^2 \\ 0 & -s_{\xi} a - \delta_Z a n^2 & a^2 n^2 + s_{\xi} a^2 \end{bmatrix},$$

$$K_{IS} = \pi E I_{\xi}^* \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & -e_{\eta} n - s_{\xi} n s_{\xi} a n + \delta_Z a n \\ e_{\eta} n + s_{\xi} n & 0 & 0 \\ -s_{\xi} a n - \delta_Z a n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{\xi} = \frac{K_{\xi} G A (1 + Z^*) a^2}{E I_{\xi}^*}, \quad e_{\eta} = \frac{E A (1 + Z^*) a^2}{E I_{\xi}^*}, \quad \delta_Z = \frac{Z^* A a^2}{I_{\xi}^*}, \quad \mu_{\xi} = \frac{I_{\xi}}{A a^2}$$

3.2 면외 고유진동

링의 면외 변형에너지 및 면외 운동에너지는 다음과 같다.

$$V_O = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [E I_{\xi}^* \kappa_{\xi}^2 + G J_{\eta}^* \tau_{\eta}^2 + 2 K_{\xi} G A Z^* a \tau_{\eta} \gamma_{\xi} + K_{\xi} G A (1 + Z^*) \gamma_{\xi}^2] a d\theta$$

$$T_O = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\rho I_{\xi} \dot{\phi}_{\xi}^2 + \rho I_{\eta} \dot{\phi}_{\eta}^2 - 2 \rho A Z a u_{\xi} \dot{\phi}_{\eta} + \rho A u_{\xi}^2] a d\theta$$

진동수 ω , 절직경수 n 의 순환대칭모드로 진동하는 링의 면외변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_{\xi} = (\phi_{\xi C} \cos n\theta + \phi_{\xi S} \sin n\theta) e^{i\omega t}, \quad \phi_{\eta} = (\phi_{\eta C} \cos n\theta + \phi_{\eta S} \sin n\theta) e^{i\omega t},$$

$$u_{\xi} = (u_{\xi C} \cos n\theta + u_{\xi S} \sin n\theta) e^{i\omega t}$$

상기 식을 면외 변형에너지 및 운동에너지 식에 대입하여 적분하고, 라그랑즈 방정식을 이용하여 면 다음과 같은 면외 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$[K_{OC} - \omega^2 M_{OC}]\{u_{OC}\} = \{0\} \quad \text{for } n = 0, \quad [K_{OA} - \omega^2 M_{OA}]\{u_{OA}\} = \{0\} \quad \text{for } n \geq 1$$

여기서

$$u_{OA} = \begin{Bmatrix} u_{OC} \\ u_{OS} \end{Bmatrix}, \quad M_{OA} = \begin{bmatrix} M_{OC} & 0 \\ 0 & M_{OC} \end{bmatrix}, \quad K_{OA} = \begin{bmatrix} K_{OC} & -K_{OS} \\ K_{OS} & K_{OC} \end{bmatrix},$$

$$u_{OC} = (\phi_{\xi C}, \phi_{\eta C}, u_{\xi C})^T, \quad u_{OS} = (\phi_{\xi S}, \phi_{\eta S}, u_{\xi S})^T$$

$$M_{OC} = \pi \rho A a \begin{bmatrix} \mu_{\xi} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\eta} a^2 & -Z a \\ 0 & -Z a & 1 \end{bmatrix}, \quad K_{OC} = \pi E I_{\xi}^* \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} a^2 n^2 + t_{\eta} a^2 + s_{\xi} a^2 - 2\beta_Z a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + t_{\eta} a^2 n^2 & \beta_Z a n^2 \\ 0 & \beta_Z a n^2 & s_{\xi} n^2 \end{bmatrix},$$

$$K_{OS} = \pi E I_{\xi}^* \frac{1}{a^3} \begin{bmatrix} 0 & -a^2 n (1 + t_{\eta} - \beta_Z) a n (s_{\xi} - \beta_Z) \\ a^2 n (1 + t_{\eta} - \beta_Z) & 0 & 0 \\ -a n (s_{\xi} - \beta_Z) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_{\xi} = \frac{K_{\xi} G A (1 + Z^*) a^2}{E I_{\xi}^*}, \quad t_{\eta} = \frac{G J_{\eta}^*}{E I_{\xi}^*}, \quad \beta_Z = \frac{K_{\xi} G A Z^* a^2}{E I_{\xi}^*}, \quad \mu_{\xi} = \frac{I_{\xi}}{A a^2}, \quad \mu_{\eta} = \frac{I_{\eta}}{A a^2}$$

4. 수치해석

수치해석에서 사용된 직사각형 단면을 갖는 링의 물성치 및 크기는 다음과 같다.

$$E = 207 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.29, \quad \rho = 7833 \text{ kg/m}^3, \quad a = 0.120 \text{ m}, \quad b = 0.040 \text{ m (변경가능)}, \quad h = 0.040 \text{ m}.$$

4.1 FEM 해석결과

원호 각 12° 인 링의 단편을 반경방향, 축방향, 원주방향으로 균일하게 $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $4 \times 4 \times 2$, $4 \times 4 \times 4$ 개의 육면체 20절점 고체요소로 분할하고, 순환대칭성을 이용한 유한요소법 [11]을 사용하여 정사각형 단면을 갖는 링의 고유진동을 해석하였다. 강제모드를 제외한 절지경수 $n = 10$ 인 경우의 1차 모드까지의 최저차 면내 및 면외 고유진동수는 표1 및 표2에서와 같다. $n \geq 1$ 인 경우의 고유진동수는 이중이다. 표1 및 표2에서 *로 표시된 모드는 해당 절지경수를 갖는 2차 모드이다.

고유진동수는 링을 더 많은 요소로 분할함에 따라서 $4 \times 4 \times 4$ 개의 요소로 분할한 경우의 결과에 급속히 수렴하고 있다. 따라서 $4 \times 4 \times 4$ 개의 요소를 사용하여 얻어진 결과는 거의 정확한 해라고 볼 수 있다.

4.2 이론 해석결과

3장에서 유도된 운동 방정식을 사용하여 링의 고유진동을 해석하였다. 표 3-4에는 $b = 0.040$ m, 표 5-6에는 $b = 0.012$ m인 링에 관하여 단면의 뒤틀림을 고려 또는 무시하여 계산된 결과와 굽힘 전단, 인장 및 회전관성효과를 무시하여 유도된 고전적 이론식 [4, 7, 12]을 사용하여 계산된 결과를 $4 \times 4 \times 4$ 개의 요소를 사용하여 얻어진 결과와 비교하여 강제모드를 제외한 몇 개의 최저차 면내 및 면외 고유진동수 및 오차를 제시하였다. 단면의 뒤틀림을 고려한 경우의 단면 특성계수로는 직선 보의 단면 특성계수를 사용하였다.

표 3-4에서 보이는 바와 같이 약간 두꺼운 링의 경우에는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델이 얇은 링 모델 또는 뒤틀림을 무시한 두꺼운 링 모델보다 정확한 결과를 줌을 알 수 있다. 표 5-6에서 보이는 바와 같이 얇은 링의 경우에는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델, 얇은 링 모델 또는 뒤틀림을 무시한 두꺼운 링 모델이 거의 비슷한 결과를 줌을 알 수 있다.

5. 결론

링의 두께가 얇은 경우에는 얇은 링 모델이나 두꺼운 링 모델을 사용하여 계산된 면내 및 면외 고유진동수는 거의 일치한다. 그러나 링의 두께가 두꺼운 경우에는 두꺼운 링 모델이 얇은 링 모델 보다 더 정확한 결과를 줌을 알 수 있다. 또한 단면의 뒤틀림을 고려한 경우가 무시한 경우보다 더 정확한 결과를 줌을 알 수 있다. 따라서 두께가 어느 정도 두꺼운 링의 면내 및 면외 고유진동수를 정확히 해석하기 위해서는 단면의 뒤틀림을 고려한 두꺼운 링 모델을 사용해야 한다.

참고논문

1. Rao, S. S. and Sundararajan, V., 1969, "In-Plane Flexural Vibrations of Circular Rings," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 91, pp. 620 ~ 25.
2. Rao, S. S., 1971, "Effects of Transverse Shear and Rotary Inertia on the Coupled Twist-Bending Vibrations of Circular Rings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, No. 4, pp. 551 ~ 56.
3. Davis, R., Henshell, R. D. and Warburton, G. B., 1972 "Curved Beam Finite Elements for Coupled Bending and Torsional Vibration," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, pp. 165 ~ 175.
4. Kirkhope, J., 1976, "Out-of-Plane Vibration of Thick Circular Ring," *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 102, No. EM2, pp. 239 ~ 47.
5. Lebeck, A. O. and Knowlton, J. S., 1985, "A Finite Element for the Three-Dimensional Deformation of a Circular Ring," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 421 ~ 435.
6. Davis, R., Henshell, R. D., and Warburton, G. B., 1972 "Constant Curvature Beam Finite Elements for In-Plane Vibration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 25, No. 4, pp. 561~576.

7. Kirkhope, J., 1977, "In-Plane Vibration of a Thick Circular Ring," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 50, No. 2, pp. 219~ 27.
8. Bickford, W. B. and Maganty, S. P., 1986, "On the Out-of-plane Vibrations of Thick Rings," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 108, No. 3, pp. 503~ 57.
9. Cowper, G. R., 1966, "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, pp. 335~ 40.
10. Sokolnikoff, I. S., 1956, *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York.
11. Kim, C. B., and Ahn, Y. C., 2000, "Eigenvalue Analysis of a Blower Impeller Using Cyclic Symmetry," *Journal of KSNVE*, Vol. 10, No. 3, pp. 525~ 30.(in korean)
12. Kim, C. B., and Choi, S. H., 2002, "Dynamics of a Micro Three-axis Ring Gyroscope," *Journal of KSNVE*, Vol. 12, No. 12, pp. 1001~ 309.(in korean)

표 1 정사각형 단면을 갖는 링의 순환대칭 FEM에 의한 면내 고유진동수

n	4x4x4	4x4x2		2x2x2		1x1x1	
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)
2	1678.3	1678.4	0.01	1679.6	0.08	1695.2	1.01
3	4428.4	4428.8	0.01	4434.6	0.14	4500.3	1.62
0*	6883.2	6883.2	0.00	6883.3	0.00	6883.7	0.01
4	7822.8	7823.9	0.01	7839.4	0.21	7999.9	2.26
1*	9469.4	9469.4	0.00	9469.6	0.00	9471.7	0.02
5	11606.	11608.	0.02	11640.	0.29	11942.	2.90
2*	14752.	14752.	0.00	14752.	0.00	14762.	0.07
6	15618.	15623.	0.04	15678.	0.39	16168.	3.52
7	19760.	19771.	0.05	19857.	0.49	20585.	4.18
3*	20675.	20675.	0.00	20677.	0.01	20708.	0.16
8	23969.	23988.	0.08	24114.	0.61	25139.	4.88
4*	26692.	26693.	0.00	26698.	0.02	26778.	0.32
9	28202.	28233.	0.11	28409.	0.74	29802.	5.68
10	32429.	32479.	0.16	32714.	0.88	34567.	6.59

표 2 정사각형 단면을 갖는 링의 FEM에 의한 면외 고유진동수

n	4x4x4	4x4x2		2x2x2		1x1x1	
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)
2	1537.4	1537.4	0.00	1541.1	0.24	1581.8	2.89
3	4114.9	4115.1	0.00	4123.7	0.21	4222.4	2.61
0*	4859.0	4859.0	0.00	4859.5	0.01	4863.4	0.09
1*	6284.7	6284.7	0.00	6303.5	0.30	6525.0	3.82
4	7314.6	7315.2	0.01	7332.2	0.24	7527.5	2.91
2*	9453.8	9453.8	0.00	9504.1	0.53	10072.	6.54
5	10884.	10886.	0.01	10916.	0.29	11254.	3.40
3*	13172.	13172.	0.00	13256.	0.64	14158.	7.49
6	14665.	14668.	0.03	14718.	0.37	15249.	3.98
4*	17080.	17081.	0.00	17203.	0.72	18427.	7.89
7	18558.	18565.	0.04	18643.	0.46	19417.	4.63
5*	21074.	21076.	0.01	21244.	0.80	22785.	8.12
8	22502.	22515.	0.06	22629.	0.57	23706.	5.35
6*	25117.	25122.	0.02	25342.	0.90	27203.	8.30
9	26458.	26482.	0.09	26643.	0.70	28090.	6.17
7*	29190.	29199.	0.03	29484.	1.01	31672.	8.50
10	30404.	30442.	0.13	30665.	0.86	32559.	7.09

표 3 $b=0.040$ m 경우의 링의 면내 고유진동수

n	FEM 4x4x4	Thick ring model $K_s=0.84924$		Thick ring model $K_s=1.0$		Thin ring model $K_s=0.84924$		Classical theory	
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)
2	1678.3	1677.2	-0.06	1690.0	0.70	1640.7	-2.24	1775.3	5.78
3	4428.4	4416.5	-0.27	4481.1	1.19	4315.9	-2.54	5021.4	13.39
0*	6883.2	6850.1	-0.48	6850.1	-0.48	6818.0	-0.95		
4	7822.8	7788.3	-0.44	7957.6	1.72	7619.1	-2.60	9628.0	23.08
1*	9469.4	9458.4	-0.12	9460.0	-0.10	9597.0	1.35		
5	11606.	11538.	-0.58	11864.	2.23	11306.	-2.59	15571.	34.16
2*	14752.	14802.	0.34	14808.	0.38	15201.	3.04		
6	15618.	15510.	-0.69	16039.	2.70	15223.	-2.53	22842.	46.25
7	19760.	19610.	-0.76	20380.	3.14	19276.	-2.45	31439.	59.10
3*	20675.	20858.	0.89	20873.	0.96	21525.	4.11		
8	23969.	23781.	-0.78	24823.	3.56	23408.	-2.34	41360.	72.56
4*	26692.	27126.	1.62	27155.	1.73	28083.	5.21		
9	28202.	27988.	-0.76	29325.	3.98	27582.	-2.20	52606.	86.53
10	32429.	32210.	-0.68	33861.	4.42	31776.	-2.01	65175.	100.98

표 4 $b=0.040$ m 경우의 링의 면외 고유진동수

n	FEM 4x4x4	Thick ring model $K_s=0.84924$ $K_n=0.84346$		Thick ring model $K_s=1.0$ $K_n=1.0$		Thin ring model $K_s=0.84924$ $K_n=0.84346$		Classical theory	
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)
2	1537.4	1538.3	0.06	1582.9	2.96	1566.0	1.86	1682.8	9.45
3	4114.9	4114.5	-0.01	4224.4	2.66	4210.1	2.31	4876.5	18.51
0*	4859.0	4855.0	-0.08	4855.0	-0.08	4821.1	-0.78		
1*	6284.7	6269.8	-0.24	6508.8	3.57	6115.4	-2.69		
4	7314.6	7309.1	-0.08	7528.7	2.93	7499.8	2.53	9447.6	29.16
2*	9453.8	9421.6	-0.34	10043.	6.23	9068.6	-4.07		
5	10884.	10872.	-0.11	11251.	3.37	11180.	2.72	15358.	41.11
3*	13172.	13123.	-0.37	14115.	7.16	12570.	-4.57		
6	14665.	14651.	-0.10	15234.	3.88	15094.	2.93	22597.	54.09
4*	17080.	17015.	-0.38	18367.	7.54	16258.	-4.81		
7	18558.	18550.	-0.04	19375.	4.40	19146.	3.17	31158.	67.90
5*	21074.	20996.	-0.37	22703.	7.73	20029.	-4.96		
8	22502.	22513.	0.05	23610.	4.93	23278.	3.45	41041.	82.39
6*	25117.	25027.	-0.36	27086.	7.84	23841.	-5.08		
9	26458.	26503.	0.17	27898.	5.44	27453.	3.76	52243.	97.46
7*	29190.	29093.	-0.33	31501.	7.92	27678.	-5.18		
10	30404.	30501.	0.32	32212.	5.95	31648.	4.09	64764.	113.02

표 5 $b=0.012\text{ m}$ 경우의 링의 면내 고유진동수

n	FEM 4x4x4	Thick ring model $K_s=0.84924$		Thick ring model $K_s=1.0$		Thin ring model $K_s=0.84924$		Classical theory	
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)
2	526.74	525.66	-0.21	526.06	-0.13	524.53	-0.42	528.52	0.34
3	1480.2	1475.0	-0.35	1477.4	-0.19	1471.3	-0.60	1494.9	0.99
4	2811.6	2796.8	-0.53	2804.9	-0.24	2789.7	-0.78	2866.3	1.94
5	4492.6	4460.8	-0.71	4480.3	-0.27	4449.4	-0.96	4635.4	3.18
6	6495.6	6438.0	-0.89	6477.2	-0.28	6421.7	-1.14	6800.1	4.69
0*	6821.5	6820.9	-0.01	6820.9	-0.01	6818.0	-0.05		
7	8791.9	8699.5	-1.05	8768.5	-0.27	8677.7	-1.30	9359.4	6.46
1*	9620.4	9626.1	0.06	9626.1	0.06	9638.2	0.18		
8	11352.	11216.	-1.20	11327.	-0.22	11189.	-1.44	12313.	8.46
9	14148.	13960.	-1.33	14126.	-0.15	13926.	-1.57	15661.	10.69
2*	15175.	15207.	0.21	15207.	0.21	15242.	0.44		
10	17152.	16903.	-1.45	17141.	-0.07	16864.	-1.68	19403.	13.13

표 6 $b=0.012\text{ m}$ 경우의 링의 면외 고유진동수

n	FEM 4x4x4	Thick ring model $K_s=0.84924$ $K_n=0.26783$		Thick ring model $K_s=1.0$ $K_n=1.0$		Thin ring model $K_s=0.84924$ $K_n=0.26783$		Classical theory	
	Freq.(Hz)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)	Freq.(Hz)	Error(%)
2	1030.9	1020.6	-1.00	1474.8	43.06	1024.1	-0.66	1099.1	6.62
3	3143.3	3091.0	-1.66	4118.1	31.01	3108.0	-1.12	3729.7	18.66
4	5893.5	5740.6	-2.59	7486.7	27.03	5779.1	-1.94	7901.9	34.08
0*	6535.6	6533.5	-0.03	6533.5	-0.03	6530.5	-0.08		
1*	6833.7	6831.9	-0.03	7712.7	12.86	6817.5	-0.24		
2*	7920.8	7906.8	-0.18	10616.	34.02	7866.7	-0.68		
5	8925.2	8576.2	-3.91	11306.	26.67	8637.2	-3.23	13540.	51.70
3*	9776.6	9721.0	-0.57	14252.	45.78	9651.7	-1.28		
6	12035.	11361.	-5.61	15406.	28.01	11437.	-4.97	20584.	71.03
4*	12176.	12052.	-1.01	18175.	49.27	11952.	-1.83		
5*	15002.	14805.	-1.31	22228.	48.17	14677.	-2.17		
7	15144.	14003.	-7.53	19683.	29.97	14083.	-7.00	28998.	91.49
6*	18206.	17953.	-1.39	26351.	44.74	17805.	-2.20		
8	18248.	16510.	-9.53	24068.	31.89	16588.	-9.10	38760.	112.40
9	21377.	18920.	-11.49	28519.	33.41	18992.	-11.16	49858.	133.23
7*	21730.	21439.	-1.34	30514.	40.42	21284.	-2.05		
10	24556.	21266.	-13.40	33009.	34.42	21331.	-13.13	62284.	153.64