전단변형을 받는 비대칭 박벽 보-기둥 요소의 엄밀한 동적강도행렬
Exact Dynamic Element Stiffness Matrices of Shear Deformable Nonsymmetric Thin-walled Beam-Columns

윤희택* 박영곤* 김용기**

Yoon, Hee-Taek Park, Young-Kon Kim, Yong-Ki

ABSTRACT

Derivation procedures of exact dynamic stiffness matrices of thin-walled curved beams subjected to axial forces are rigorously presented for the spatial free vibration analysis. An exact dynamic stiffness matrix is established from governing equations for a uniform curved beam element with nonsymmetric thin-walled cross section. Firstly this numerical technique is accomplished via a generalized linear eigenvalue problem by introducing 14 displacement parameters and a system of linear algebraic equations with complex matrices. Thus, displacement functions of dispalcement parameters are exactly derived and finally exact stiffness matrices are determined using element force-displacement relationships. The natural frequencies of the nonsymmetric thin-walled curved beam are evaluated and compared with analytical solutions or results by ABAQUS's shell elements in order to demonstrate the validity of this study.

1. 서론

본 연구에서는 전단변형을 고려한 비대칭 박벽 보-기둥 요소의 동적해석을 위하여 경계조건의 제약을 받지 않으며, 엄밀한 해를 얻을 수 있는 일관된 유한요소 정식화 기법을 제안한다. 변분법을 이용하여 도심에서 변위장을 정의한 비대칭 박벽보의 총포텐셜에너지로부터 운동방정식과 힘-변위 관계식을 유도한다. 이 지배방정식은 고차의 연립미분방정식이므로 14개의 변위 파라미터를 도입하여 1차 연립미분방정식으로 변환시킨다. 이제 미분방정식에 대응하는 선형 고유치 문제를 풀어서 엄밀한 처짐함수를 얻는다. 마지막으로, 힘-변위 관계식을 적용하므로써 엄밀한 동적 14×14 요소강도행렬을 유도한다. 형상함수를 도입하여 요소의 강도행렬을 산정하는 기존의 유한요소법과 비교할 때, 이러한 요소 강도행렬은 해석해로서 요소의 수와 계산시간을 대폭 줄일 수 있으며, 다양한 하중과 경계조건에 대한 엄밀해를 구할 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 기법의 타당성을 검증하기 위하여 비대칭 단면을 가지는 단순지지, 캔틸레버 박벽보 구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해, 혹은 ABAQUS 쉘요소[6]를 사용한 유한요소법의 결과와 비교한다.

* 한국철도기술연구원, 선임연구원, 정회원

** 한국철도기술연구원, 책임연구원, 정회원

2. 비대칭 박벽보의 운동방정식과 힘-변위 관계식

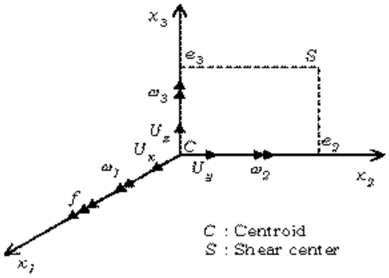


그림 1. Displacement parameters for a thin-walled cross-section

그림 1은 도심에서 정의한 7개의 변위파라미터를 나타낸다. 전단변형효과를 고려하는 비대칭 단면을 갖는 박벽보의 총포텐셜에너지[7]에 대하여 U_x, U_y, U_z와 Θ로 변분을 취하면 아래와 같이 7개의 비대칭 박벽보에 대한 운동방정식과 힘-변위 관계식을 얻을 수 있다.

$$EA\,U_x'' + ES_2\omega_2'' - ES_3\omega_3'' + \rho\omega^2(AU_x + S_2\omega_2 - S_3\omega_3) = 0 \tag{1a}$$

$$\begin{aligned} &GA_2(U_y'' - \omega_3') + GA_{23}(U_z'' + \omega_2') + GA_{2r}(\omega_1'' + f') \\ &\quad + {}^oF_1U_y'' - {}^oM_2\omega_1'' + \rho\omega^2(AU_y - S_2\omega_1) = 0 \end{aligned} \tag{1b}$$

$$\begin{aligned} &EI_3\omega_3'' - ES_3U_x'' - EI_{23}\omega_2'' - EI_{3\Phi}f'' + GA_2(U_y' - \omega_3) + GA_{23}(U_z' + \omega_2) \\ &\quad + GA_{2r}(\omega_1' + f) + \rho\omega^2(I_3\omega_3 - S_3U_x - I_{23}\omega_2 - I_{3\Phi}f) = 0 \end{aligned} \tag{1c}$$

$$\begin{aligned} &GA_3(U_z'' + \omega_2') + GA_{23}(U_y'' - \omega_3') + GA_{3r}(\omega_1'' + f') \\ &\quad + {}^oF_1U_z'' - {}^oM_3\omega_1'' + \rho\omega^2(AU_z + S_3\omega_1) = 0 \end{aligned} \tag{1d}$$

$$\begin{aligned} &EI_2\omega_2'' + ES_2U_x'' - EI_{23}\omega_3'' + EI_{2\Phi}f'' - GA_3(U_z' + \omega_2) - GA_{23}(U_y' - \omega_3) \\ &\quad - GA_{3r}(\omega_1' + f) + \rho\omega^2(I_2\omega_2 + S_2U_x - I_{23}\omega_3 + I_{2\Phi}f) = 0 \end{aligned} \tag{1e}$$

$$\begin{aligned} &GJ\omega_1'' + GA_r(\omega_1'' + f') + GA_{2r}(U_y'' - \omega_3') + GA_{3r}(U_z'' + \omega_2') \\ &\quad - {}^oM_2U_y'' - {}^oM_3U_z'' + {}^oM_p\omega_1'' + \rho\omega^2(I_o\omega_1 + S_3U_z - S_2U_y) = 0 \end{aligned} \tag{1f}$$

$$\begin{aligned} &EI_\Phi f'' + EI_{2\Phi}\omega_2'' - EI_{3\Phi}\omega_3'' - GA_r(\omega_1' + f) - GA_{2r}(U_y' - \omega_3) \\ &\quad - GA_{3r}(U_z' + \omega_2) + \rho\omega^2(I_\Phi f + I_{2\Phi}\omega_2 - I_{3\Phi}\omega_3) = 0 \end{aligned} \tag{1g}$$

그리고,

$$F_1 = EAU_x' + ES_2\omega_2' - ES_3\omega_3' \tag{2a}$$

$$F_2 = GA_2(U_y' - \omega_3) + GA_{23}(U_z' + \omega_2) + GA_{2r}(\omega_1' + f) + {}^oF_1U_y' - {}^oM_2\omega_1' \tag{2b}$$

$$M_3 = EI_3\omega_3' - ES_3U_x' - EI_{23}\omega_2' - EI_{3\Phi}f' + 0.5\,{}^oM_2\omega_1 \tag{2c}$$

$$F_3 = GA_3(U_z' + \omega_2) + GA_{23}(U_y' - \omega_3) + GA_{3r}(\omega_1' + f) + {}^oF_1U_z' - {}^oM_3\omega_1' \tag{2d}$$

$$
B = \begin{bmatrix}
 & b_1 & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & & & & -b_3 & & & & b_4 & & & & & \\
 & & & b_1 & & & & & & & & & & \\
 & & b_2 & & & -b_5 & & & & b_6 & -b_4 & & & b_7 \\
 & & & & & b_1 & & & & & & & & \\
-b_3 & & & b_5 & b_8 & & & b_6 & b_9 & & & b_7 & b_{10} & \\
 & & & & & & & b_1 & & & & & & \\
 & & & & & -b_6 & b_2 & & & b_{11} & b_3 & & & b_{12} \\
 & & & & & & & & & b_1 & & & & \\
b_4 & & & -b_6 & b_9 & & & -b_{11} & b_{13} & & & -b_{12} & b_{14} & \\
 & & & & & & & & & & & b_1 & & \\
 & & -b_4 & & & -b_7 & b_3 & & & b_{12} & b_{15} & & & b_{16} \\
 & & & & & & & & & & & & & b_1 \\
 & & & -b_7 & b_{10} & & & -b_{12} & b_{14} & & & -b_{16} & b_{17} &
\end{bmatrix} \tag{6}
$$

$$b_1 = 1.0,\ \ b_2 = \rho\omega^2 A,\ \ b_3 = \rho\omega^2 S_3,\ \ b_4 = \rho\omega^2 S_2,\ \ b_5 = GA_2,\ \ b_6 = GA_{23},\ \ b_7 = GA_{3r}$$

$$b_8 = -GA_2 + \rho\omega^2 I_3,\ \ b_9 = GA_{23} - \rho\omega^2 I_{23},\ \ b_{10} = GA_{2r} - \rho\omega^2 I_{3\phi},\ \ b_{11} = GA_3,\ \ b_{12} = GA_{3r}$$

$$b_{13} = -GA_3 + \rho\omega^2 I_2,\ \ b_{14} = -GA_{3r} + \rho\omega^2 I_{2\phi},\ \ b_{15} = \rho\omega^2 I_o,\ \ b_{16} = GA_r,\ \ b_{17} = -GA_r + \rho\omega^2 I_\phi$$

식 (4)의 일반해를 구하기 위하여 다음과 같은 비대칭행렬에 대한 일반적인 고유치문제를 생각한다.

$$\lambda \boldsymbol{A} \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{Z} \tag{7}$$

본 연구에서는 IMSL subroutine DGVCRG를 적용하여 식 (7)의 해를 구하며, 복소수 영역에서 14개의 고유치 및 고유벡터를 얻을 수 있다. 식 (4)의 일반해는 고유치해석 결과를 이용하여 복소 지수함수의 일차결합(linear combination)으로 표시할 수 있다.

$$\boldsymbol{d(x)} = \sum_{i=1}^{14} a_i \boldsymbol{Z}_i e^{\lambda_i x} = \boldsymbol{X(x)}\ \boldsymbol{a} \tag{8}$$

여기서 $\boldsymbol{X}$와 $\boldsymbol{a}$는 각각 14개의 고유치 해를 이용하여 x에 관한 복소 지수함수로 이루어진 14×14 행렬함수 및 적분상수벡터를 나타낸다.

$$\boldsymbol{X(x)} = \big[\ \boldsymbol{Z_1} e^{\lambda_1 x};\ \boldsymbol{Z_2} e^{\lambda_2 x};\ \boldsymbol{Z_3} e^{\lambda_3 x};\ \boldsymbol{Z_4} e^{\lambda_4 x};\ \boldsymbol{Z_5} e^{\lambda_5 x};\ \boldsymbol{Z_6} e^{\lambda_6 x};\ \boldsymbol{Z_7} e^{\lambda_7 x};$$
$$\boldsymbol{Z_8} e^{\lambda_8 x};\ \boldsymbol{Z_9} e^{\lambda_9 x};\ \boldsymbol{Z_{10}} e^{\lambda_{10} x};\ \boldsymbol{Z_{11}} e^{\lambda_{11} x};\ \boldsymbol{Z_{12}} e^{\lambda_{12} x};\ \boldsymbol{Z_{13}} e^{\lambda_{13} x};\ \boldsymbol{Z_{14}} e^{\lambda_{14} x}\big] \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{a} = \langle a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14} \rangle^T \tag{9b}$$

다음으로 부재양단의 좌표($x = 0$, l)를 식 (8)에 대입하여 정리하면 절점변위벡터 U_e 는 적분상수벡터 $\boldsymbol{a}$로 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{U_e} = \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{a} \tag{10a}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}^{-1} \boldsymbol{U_e} \tag{10b}$$

여기서 E 의 각 요소는 $X(x)$ 로부터 부재양단의 x 좌표를 대입하여 쉽게 구할 수 있으며, 복소수 형렬의 역행렬은 IMSL subroutine DLINCG를 이용하여 구한다. 식 (10b)를 식 (8)에 대입하여 복소계수 a 를 소거하면, 최종적으로 14개의 변위성분으로 구성되는 엄밀한 변위벡터를 얻을 수 있다.

$$d(x) = X(x)\, E^{-1}\, U_e \tag{11}$$

3.2 동적 요소강도행렬의 산정

힘-변위 관계식 (2)에 식 (3)과 같은 14개의 변위 파라미터를 도입하여 정리하면 다음과 같이 행렬식으로 표현할 수가 있다.

$$f(x) = S\, d(x) \tag{12}$$

여기서 $f = \langle F_1, F_2, M_3, F_3, M_2, M_1, M_\Phi \rangle^T$ 이고, 7×14 행렬인 S 의 각 요소는 다음과 같다.

$$S = \left[\begin{array}{cccccc|ccccccc}
s_1 & & & & s_2 & & & & s_9 & & & & \\
 & & s_4 & s_5 & & & s_6 & s_6 & & & & s_7 & \\
s_2 & & & & s_8 & & & & s_9 & s_{10} & & & s_{11} \\
 & & s_6 & -s_6 & & & s_{12} & s_{13} & & & s_{14} & s_{15} & \\
s_3 & & & & s_9 & & & & s_{16} & s_{17} & & & s_{18} \\
 & & s_7 & s_{19} & & & s_{14} & s_{20} & & & s_{21} & s_{22} & \\
 & & & & s_{11} & & & & s_{16} & & & & s_{23}
\end{array}\right] \tag{13}$$

$$s_1 = EA,\ s_2 = -ES_3,\ s_3 = ES_2,\ s_4 = GA_2 + {}^oF_1,\ s_5 = -GA_2,\ s_6 = GA_{23}$$
$$s_7 = GA_{2r} - {}^oM_2,\ s_8 = EI_3,\ s_9 = -EI_{23},\ s_{10} = 0.5\,{}^oM_2,\ s_{11} = -EI_{3\Phi}$$
$$s_{12} = GA_3 + {}^oF_1,\ s_{13} = GA_3\ ,\ s_{14} = GA_{3r} - {}^oM_3,\ s_{15} = GA_{3r},\ s_{16} = EI_2$$
$$s_{17} = -0.5\,{}^oM_3,\ s_{18} = EI_{2\Phi},\ s_{19} = -GA_{2r} + 0.5\,{}^oM_2,\ s_{20} = GA_{3r} - 0.5\,{}^oM_3$$
$$s_{21} = GJ + GA_r + {}^oM_p,\ s_{22} = GA_r,\ s_{23} = EI_\Phi$$

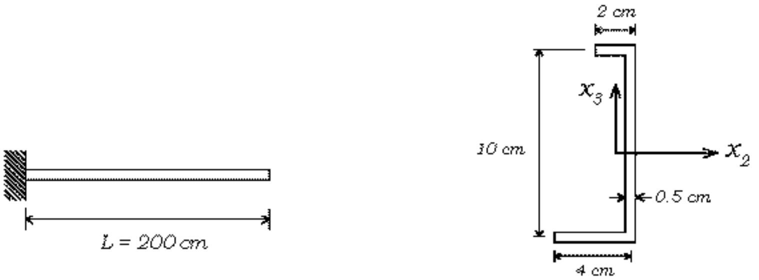
요소의 절점변위를 나타내는 식 (11)을 식 (12)에 대입하면, 다음과 같이 임의의 x 에서 박벽보 요소에 대한 단면력과 변위파라미터 관계식을 구할 수 있다.

$$f(x) = S\, X(x)\, E^{-1}\, U_e \tag{14}$$

한편 부재양단의 절점력벡터는 다음과 같이 정의한다.

$$F^\alpha = \langle F_1^\alpha, F_2^\alpha, M_3^\alpha, F_3^\alpha, M_2^\alpha, M_1^\alpha, M_\Phi^\alpha \rangle^T \ ,\quad \alpha = p\,,\, q \tag{15}$$

이제 식 (15)를 이용하여 부재 양단($x = 0$, l)의 부재력을 구한후 정리하면 박벽 직선보의 엄밀한 동적 요소강도행렬 $K(\omega)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.



(a) Cantilever beam under an axial load (b) Nonsymmetric channel section

그림 2. Cantilever beam with nonsymmetric channel section

$$E=30000.0\ N/cm^2,\ G=11500.0\ N/cm^2,\ A=8.0\ cm^2,\ J=0.6667\ cm^4,\ L=200\ cm$$

$$I_2=114.872\ cm^4,\ I_3=7.54463\ cm^4,\ I_\phi=408.333\ cm^6,\ I_{2\phi}=182.413\ cm^5,\ I_{3\phi}=18.9757\ cm^5$$

$$\rho=0.00785\ kg/cm^3,\ \beta_1=15.3021\ cm^2,\ \beta_2=0.57706\ cm,\ \beta_3=5.93192\ cm$$

$$f_{s2}=5.28221,\ f_{s3}=1.79271,\ C_r=0.01766$$

표 2. Flexural-torsional natural frequencies for the cantilever beam [(radian/sec)^2]

mode	Present Study		ABAQUS
	With shear deformation	Without shear deformation	
1	0.027	0.027	0.028
2	0.334	0.336	0.331
3	0.704	0.707	0.696
4	1.065	1.074	1.074
5	4.817	4.859	4.766
6	7.055	7.186	7.083
7	17.95	18.22	17.95
8	19.30	20.15	19.36
9	23.74	24.39	23.58
10	45.71	47.34	46.52

표 2는 비대칭 캔틸레버 박벽 보구조에 대하여 전단변형효과를 고려한 경우와 무시한 경우에 대하여 자유진동해석을 수행하여 10개의 모드를 산정하였으며, 본 연구에 의한 결과와 9절점 감차적분이 적용된 600개의 ABAQUS 쉘요소(S9R5)를 사용한 유한요소 해석의 결과를 함께 제시하였다. 표에서도 볼 수 있듯이 고차모드로 갈수록 전단변형효과를 고려한 직선보 요소에 의한 해석결과가 이를 무시한 해석결과와 비교하여 ABAQUS의 결과에 보다 근접한 것을 알 수 있으며, 8번째 모드에서 전단변형효과를 무시한 직선보 요소와 비교하여 최대 4.2% 정도 차이가 나타나는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

1) 전단변형효과를 고려한 비대칭 단면을 가지는 직선 박벽보의 3차원 자유진동해석을 위한 엄밀한 요소강도행렬을 산정하는 수치해석기법을 개발하였다.
2) 14개의 변위파라미터를 도입하여 고차의 연립미분방정식의 형태로 표현되는 비대칭 직선 박벽보 요소의 지배방정식을 1차 연립미분방정식 형태의 선형 고유치 문제로 전환하고, 재단력-변위 관계식을 이용하여

엄밀한 동적강도행렬을 유도하였다.

3) 요소강도행렬을 이용하여 단순지지 및 캔틸레버 보구조에 대한 고유진동수를 산정하고, 해석해 및 유한요소해석의 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다.

참고문헌

1. Banerjee J.R.(1998), "Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method" , *Computers and Structures* Vol.69, pp.197-208.
2. Banerjee, J.R. and Williams(1996), F.W., "Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications" , *Journal of Sound and Vibration* Vol.194, No.4, pp.573-585.
3. Leung, A.Y.T. and Zhou, W.E.(1995), "Dynamic stiffness analysis of non-uniform Timoshenko beams" , *Journal of Sound and Vibration* Vol.181, No.3, pp.447-456.
4. Leung, A.Y.T. and Zhou, W.E.(1995), "Dynamic stiffness analysis of axially loaded non-uniform Timoshenko columns" , *Computers and Structures* Vol.56, No.4, pp.577-588.
5. Eisenberger, M., Abramovich, H. and Shulepov, O.(1995), "Dynamic stiffness analysis of laminated beams using a first order shear deformation theory" , *Composite Structures* Vol.31, pp.265-271.
6. *ABAQUS User's Manual* Vol. I and Vol. II, Ver. 5.2, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. 1992.
7. 김문영, 김성보(1998), "전단변형 및 회전관성효과를 고려한 박벽 공간뼈대구조의 자유진동 및 안정성해석을 위한 일반이론" , 전산구조공학회 논문집, 제11권 제2호, pp.251-262.
8. Connor, J.J.(1976), *Analysis of structural members systems*, Ranald Press Company, New York.