

Navier-Stokes 방정식과 난류모델 방정식의 연계방법 비교

이 승 수^{1*}, 류 세 현²

COMPARISON OF COUPLING METHODS FOR NAVIER-STOKES EQUATIONS AND TURBULENCE MODEL EQUATIONS

Seungsoo Lee, Sehyun Ryu

Two coupling methods for the Navier-Stokes equations and a two-equation turbulence model equations are compared. They are the strongly coupled method and the loosely coupled method. The strongly coupled method solves the Navier-Stokes equations and the two-equation turbulence model equations simultaneously, while the loosely coupled method solves the Navier-Stokes equation with the turbulence viscosity fixed and subsequently solves the turbulence model equations with all the flow quantities fixed. In this paper, performances of two coupling methods are compared for two and three-dimensional problems.

Key Words: 전산유체역학(CFD), 난류(Turbulent flows), Navier-Stokes 방정식, 2방정식 난류모델

1. 서 론

항공분야 유동은 대부분 난류이므로 항공기의 설계와 해석에는 난류의 특성을 고려한 유동해석이 필요하다. 난류의 해석에 사용되는 모델 중 하나인 2방정식 난류모델은 항공분야에서 점차 그 사용이 증대되고 있다. 이러한 2방정식 난류모델 방정식과 유동의 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식과의 연계방법은 크게 두 가지를 생각할 수 있으며 각각 강한 연계방법(strongly coupled)과 약한 연계방법(loosely coupled)이다. 강한 연계방법은 두 방정식을 동시에 해석하는 반면 약한 연계방법은 Navier-Stokes 방정식을 난류 점성계수를 고정시킨 후 해석하고, 다음 단계에서 유동변수를 고정시킨 후 난류모델 방정식을 해석한다.

Kunz와 Lakshminarayana[1]는 외재적 Navier-Stokes code와 $k-\epsilon$ 난류모델 방정식의 연계방법에 대한 연구를 수행하였다. 그들은 외재적 Runge-Kutta 방법을 사용할 경우 두 연계방법의 수렴성은 같다는 것을 선형 수치 안정성 해석과 실제 수치해석을 통하여 보였다. Lui와 Zheng[2]은 $k-\omega$ 난류모델과 다중격자법을 이용한 수치해석을 통하여 강한 연계방법이 약

한 연계방법에 비하여 탁월하다고 주장하였다. 그들의 연구는 Kunz 등의 연구와 모순되는 것처럼 보인다. 그러나 그들의 약한 연계방법에서는 Navier-Stokes 방정식에는 다중격자법이 적용되었고 $k-\omega$ 난류모델 방정식에는 다중격자법이 적용되지 않은 반면 강한 연계방법에서는 다중격자법이 모든 방정식에 적용되었다. 그러므로 그들의 연구는 정당한 비교가 아니다. 최근에 Barakos와 Drikakis[3]은 Navier-Stokes 방정식과 $k-\epsilon$ 과 $k-\omega$ 모델 방정식의 3가지 연계방법에 대한 수치 연구를 수행하였다. 그들의 3가지 방법은 각각 내재적 강한 연계방법(Implicit-couple), 내재적 약한 연계방법(Implicit-decouple)과 외재적 방법이다. 내재적 강한 연계방법이 다른 두 방법보다 우수하다고 하였다. 그러나 내재적 약한 연계방법에서 난류모델 방정식은 외재적 Runge-Kutta 방법을 적용하였으며 Navier-Stokes 방정식은 내재적 unfactored 방법을 적용하였고 내재적 강한 연계방법에서는 모든 방정식을 내재적 unfactored 방법을 적용하였다. 이들의 연구도 정당한 비교가 아니다. Venkateswaran과 Merkle[4]은 난류 운동에너지가 상태 방정식 및 에너지 방정식에 포함되었을 때는 강한 연계방법을 사용하여야한다고 하였다. 그러나 난류에너지가 무시되었을 때는 강한 연계방법으로 수렴성의 향상은 없다고 하였다.

본 논문은 참고문헌[5]의 후속연구로 2차원 및 3차원 난류 유동해석을 위한 Navier-Stokes 방정식과 Coakley의 $q-\omega$ [6] 난

1 정회원, 인하대학교 항공우주공학과

2 학생회원, 인하대학교 대학원 항공공학과

* Corresponding author E-mail: slee@inha.ac.kr



류방정식을 AF-ADI(Approximate Factorization, Alternate Direction Implicit)를 이용하여 적분할 때 강한 연계방법과 약한 연계방법을 사용할 경우 각각의 수렴특성 연구를 수행하였다. 또한 Ventateswaran 등이 언급한 상태방정식 및 에너지 방정식에 포함된 난류 운동에너지가 연계방법에 미치는 영향에 대한 연구도 같이 수행하였다.

2. 지배방정식 및 수치해석 기법

2.1 지배방정식

Navier-Stokes 방정식은 Cartesian tensor를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \rho_{,i} + (\rho u)_{,i} &= 0 \\ (\rho u)_{,i} + (\rho u_i u_j + p \delta_{ij} + \tau_{ij})_{,j} &= 0 \\ e_{,i} + \{ (e + p_i) u_j - u_i \tau_{ij} + q_j \}_{,j} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

난류 전압력 p_i 는 열역학적 압력 p 과 다음의 관계가 있다.

$$p_i = p + \frac{2}{3} \xi \rho k \quad (2)$$

여기에서 ξ 는 0 또는 1이며 각각 난류 운동에너지가 상태방정식에 포함되지 않은 경우와 포함된 경우를 나타낸다. Boussinesq 근사와 난류압력의 정의를 이용하면, shear stress는 평균속도의 구배와 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_{ij} = -(\mu + \mu_t)(u_{i,j} + u_{j,i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} u_{k,k}) \quad (3)$$

여기에서 μ 와 μ_t 는 각각 층류점성계수와 난류점성계수이다. Fourier의 법칙으로 heat flux는 온도구배로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q_j = -\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) T_{,j} \quad (4)$$

여기에서 Pr 과 Pr_t 는 각각 Prandtl 수와 난류 Prandtl 수이다. 이상기체의 전에너지는 난류압력과 다음의 관계를 갖는다.

$$e = \frac{p_i}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_i + \xi C \rho k \quad C = \frac{3\gamma-5}{3(\gamma-1)} \quad (5)$$

또한, Coakley의 $q-\omega$ 난류모델 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (\rho \omega)_{,i} + (\rho u_i \omega)_{,i} &= H_\omega \\ (\rho \omega)_{,i} + (\rho u_i \omega + q_i)_{,i} &= H_\omega \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서 $q-\omega$ 난류모델 방정식의 확산항, 원천항 및 모델상수는 참고문헌[4]에 자세히 기술되어있어 여기에서는 생략한다. 난류 점성계수는 Prandtl-Kolmogorov 관계식으로부터 구할 수 있다.

$$\mu_t = C_\mu f \frac{\rho \omega^2}{\omega} \quad (7)$$

여기에서 $C_\mu=0.09$ 로 주어지며 f 는 난류 경계층내의 내부 층류층(viscous sublayer)을 모사하는 감쇄함수(damping function)이며 참고문헌[4]에 주어져 있다.

2.2 수치해석기법

2.2.1 공간차분법

이 논문에서 사용한 수치해석 방법은 유한체적법과 Roe의 근사 리만해(Approximated Riemann Solver)를 사용하여 공간 이산화하였으며, MUSCL기법을 이용하여 고차의 이산화오차를 갖도록 하였다. 점성항의 계산에 필요한 속도 및 온도의 미분은 gradient 이론에 의하여 다음과 같은 면적분으로 대체하여 계산하였다.

$$\nabla \phi = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \phi \hat{n} dS \approx \frac{1}{V} \sum \phi \hat{n} \Delta S \quad (8)$$

2.2.2 시간적분법

시간 적분법은 근사 인수분해(Approximate Factorization)에 의한 ADI(Alternating Direction Implicit) 방법을 사용하였다. 강한 연계방법에서는 두 방정식이 동시에 수치해석을 수행한다. 여기에서 간단히 수치해석방법을 기술하기로 한다. 자세한 내용은 참고문헌[7]을 참조하기 바란다. 여기에는 두 연계방법에 대한 선형 수치 안정성 해석이 포함되어 있다. 수치적 안정성의 향상을 위하여 혼합 미분항을 제외한 점성항을 내재적 인자에 포함하였으며, 난류 감쇄항만을 내재적 인자에 포함하였다.

강한 연계 방법에서의 수치해 vector를 다음과 같이 정의하자.

$$Q = (\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho w \quad e \quad \rho \omega)^T \quad (9)$$

내재적 AF-ADI를 적용하면 다음과 같이 간략히 쓸 수 있다.

$$L_i P^{-1} L_j P^{-1} L_k \Delta Q = -\Delta t R \quad (10)$$

한편, 약한 연계방법에서는 Navier-Stokes 방정식이 난류 점성 계수를 고정시킨 후 해석을 하고, 다음 단계에서 유동변수를 고정시킨 후 난류모델 방정식을 해석한다. 약한 연계방법에서는 Navier-Stokes 방정식의 수치해 vector는 다음과 같이 정의되며,

$$Q^{ns} = (\rho \ u \ v \ w \ \theta)^T \quad (11)$$

여기에서 상첨자 ns 는 Navier-Stokes 방정식을 의미한다. AF-ADI를 적용하면,

$$L_i^{ns} L_j^{ns} L_k^{ns} \Delta Q^{ns} = -\Delta t R^{ns} \quad (12)$$

또한, $q-\omega$ 의 난류방정식의 수치해를 다음 식으로 주어지며

$$Q^{qw} = (\rho q \ \omega)^T \quad (13)$$

AF-ADI를 $q-\omega$ 난류모델 방정식에 적용하면 다음과 같다.

$$L_i^{qw} P_{\omega}^{-1} L_j^{qw} P_{\omega}^{-1} L_k^{qw} \Delta Q^{qw} = -\Delta t R^{qw} \quad (14)$$

여기에서 상첨자 qw 는 $q-\omega$ 방정식을 뜻한다.

강한 연계방법은 3차원의 경우 7×7 의 block tri-diagonal matrix system을 해석하여야 한다. 반면 약한 연계방법은 Navier-Stokes 방정식을 해석할 때 5×5 의 block tri-diagonal matrix system을 난류모델 방정식을 해석할 때 2×2 의 block tri-diagonal matrix system을 해석하여야 한다. 그러므로 강한 연계방법을 사용할 때 더 많은 계산시간이 필요하다. 또한 강한 연계방법이 메모리의 필요도 더 많다.

3. 해석결과

3.1 2차원 해석결과

강한 연계방법과 약한 연계방법의 수치적 특성을 확인하기 위하여 RAE 2822 익형 주위의 유동해석을 수행하였다. 참고 문헌[8]의 case9 ($M=0.73$, $Re=6.5 \times 10^6$, $\alpha=3.19^\circ$)에 해당한다. 사용된 격자는 297×65 의 C형 격자를 사용하였으며 익형표면에는 200의 cell이 사용되었다. 격자는 첫 번째 격자의 중앙점은 y^+ 는 32이하가 되도록 구성하였다. 이 계산

에는 wall function을 적용하여 벽면조건을 주었다. ζ 가 0과 1 일 때와 약한 연계방법 및 강한 연계방법의 4 방법으로 계산한 결과가 Fig. 1에 도시되어있다. 연계방법에 의한 계산 결과의 차이는 없으나, ζ 의 값의 차이는 표면 압력계수에 있어 충격파 뒤에 약간의 차이를 가져 온다. 각 연계방법의 수렴성이 도시된 Fig. 2에 의하면 연계방법에 의한 수렴도는 차이가 없다. 사용된 CFL수는 20이며 ΔN 수의 영향은 고려되지 않았다. 모든 경우 약 4,500번의 반복계산으로 수치영으로 수렴하였다. 본 계산에서는 1회의 반복계산에 필요한 CPU 시간은 약한 연계방법이 cell 당 $20.7 \mu s$, 강한 연계방법이 $35.6 \mu s$ 으로 본문에서도 설명하였듯이 약한 연계방법이 강한 연계방법보다 계산시간이 적다. 계산에 사용된 컴퓨터는 dual processor를 갖는 12node PC cluster를 사용하였으며 본 계산에는 1개의 processor를 사용하였다.

이번 계산에는 벽면조건을 적용하지 않고 앞의 계산과 동일한 유동해석을 수행하였다. 계산된 격자는 익형의 수직향 방향으로 격자수를 늘린 297×85 크기의 격자를 사용하였으며, 첫 번째 격자의 중앙점은 y^+ 는 1.73보다 크지 않은 곳에 위치한다. Fig. 3에는 계산된 표면 압력계수 분포를 보여주고 있다. 앞의 경우와 같이 표면 압력계수 분포에서 ζ 값의 차이로 충격파 후방의 표면 압력계수의 차이만 보일뿐, 연계방법에 의한 차이는 없다. Fig. 4에는 이 경우의 수렴성을 보여주고 있다. 벽면에 밀집된 격자계와 벽면에서 사용된 감쇄함수의 강직성으로 인하여 수렴특성이 앞의 경우에 비해 현저히 떨어진다. 그러나 반복계산 6,500회 이후에는 선형적인 특성을 보인다. 이때 계산에 사용된 CFL은 5이며 ΔN 는 고려되지 않았다.

3.2 3차원 해석결과

3차원 유동해석에 연계방법이 수렴성에 미치는 영향을 보기 위하여 ONERA M-6 wing에 대한 자유류의 마하수가 0.84이고 Reynolds 수가 11.72×10^6 이며 받음각이 3.06° 에 대한 유동해석을 수행하였다. Fig. 5에는 6곳의 span 위치에서의 표면 압력계수의 분포를 참고문헌[9]에서 수행한 풍동시험결과와 비교하였다. 연계방법과 ζ 의 값에 무관하게 동일한 계산 결과를 얻었기 때문에 $\zeta=1$ 와 강한 연계방법을 이용하여 계산한 결과만을 이 그림에 도시하였다. 계산결과와 풍동시험치가 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 계산에 사용된 격자계는 $97 \times 33 \times 27$ 의 4개 block을 사용하였으며 각 block은 서로 다른 processor에 할당되었다. 주익은 129×34 크기의 patch로 표현되었다. Wall function이 날개표면의 경계조건 적용에 사용되었다. 계산결과와 풍동시험결과에서 볼 수 있듯이 앞선 충격파와 뒷선 충격파가 날개 끝에서 하나로 합쳐져서 lambda형의 충격파가 생성되는 것을 볼 수 있다. Fig. 6에는

$CFL=5$, $VN=5$ 를 사용하여 계산하였을 때의 4가지 경우의 수렴특성을 비교하였다. 그림에서 보듯이 4 경우 거의 같은 수렴특성을 보이고 있다. 3,000번의 반복계산으로 약 5 order의 잔류치가 감소하였다. 4개의 processor를 사용하였을 때 1회의 반복계산에 필요한 CPU time은 강한 연계방법은 cell 당 $68.5 \mu s$ 가, 약한 연계방법은 cell 당 $45.6 \mu s$ 가 소요되었다.

Fig. 7에는 RAE wing/body의 7곳에서의 표면 압력계수 분포를 도시하였다. 유동조건은 $M=0.8$, $Re=1.0 \times 10^6$, $\alpha=2^\circ$ 로 참고문헌[10]에 $8ft \times 6ft$ 천음속 풍동을 이용하여 측정된 시험치가 존재한다. 풍동시험치와 계산치가 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 전산영역은 $71 \times 41 \times 55$ 크기의 6 block으로 모델링하였다. 이번 예제에서는 벽면조건을 사용하지 않았다. Fig. 8에는 동체에서의 표면 압력계수를 풍동시험치와 비교하였다. 그림에서 보듯이 아주 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 앞의 경우와 같이 모든 계산 결과가 동일하므로 $\xi=1$ 와 강한 연계방법을 이용한 결과만을 Fig. 7과 8에 도시하였다. Fig. 9에는 4경우의 수렴도가 도시되어 있다. 앞의 경우와 같이 수렴도의 차이는 없는 것으로 판단된다. 모든 계산에는 $CFL=5$ 와 $VN=0.5$ 가 사용되었다. 1회의 반복계산에는 약한 연계방법이 cell 당 $49.4 \mu s$, 강한 연계방법에는 cell 당 $85.3 \mu s$ 의 CPU time이 필요하였다. 참고로 본 계산에는 6개의 processor가 사용되었다.

4. 맺음말

Navier-Stokes 방정식과 2방정식 난류모델의 하나인 $q-\omega$ 모델방정식의 연계방법을 2차원 및 3차원 문제에 대하여 비교하였다. 사용된 수치해석 방법은 Roe의 근사 리만해로 공간이산화를 수행하였으며 AF-ADI를 이용한 시간적분법을 적용하였다. 강한 연계방법과 약한 연계방법에 의한 수렴도의 차이는 거의 없으며, 난류 운동에너지를 상태방정식에 포함 여부도 수렴도에 영향을 주지 않는다. 그러나 강한 연계방법이 약한 연계방법에 비하여 필요 계산시간이 크다.

후 기

본 연구는 국방과학연구소 지정 비행체 특화연구센터(FV-23)의 지원을 받았으며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

[1] Kunz, R.F. and Lakshminarayana, B., 1992, "Stability of

Explicit Navier-Stokes Procedures Using $k-\epsilon$ and $k-\epsilon$ /Algebraic Reynolds Stress Turbulence Models," *JCP*, Vol.103.

[2] Lui, F. and Zheng, X., 1994, "A Strongly Coupled Time-Marching Method for Solving the Navier-Stokes and $k-\omega$ Turbulent Model Equations with Multigrid," *JCP*, Vol.128.

[3] Barakos, G. and Drikakis, D., 1998, "Implicit Unfactored Implementation of Two-Equation Turbulence Models in Compressible Navier-Stokes Methods," *IJNMF*, Vol.28, p73-94.

[4] Venkateswaran, S. and Merkle, C.L., 1999, "Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations," *Lecture Note of Von Karman Institute Lecture Series*.

[5] 이승수, 2000, "Navier-Stokes 방정식과 난류방정식의 연계 방법," *한국항공우주학회 논문집*, 28권 2호, p35-45.

[6] Coakley, T.J., 1984, "A Compressible Navier-Stokes Code for Turbulent Flow Modeling," *NASA TM 85899*.

[7] Lee, S. and Choi, D.W., 2005, "On Coupling the Navier-Stokes Equations with Two-Equation Turbulence Model Equations," *IJNMF* (in Press).

[8] Cook, P.H., McDonald, M.A., and Firmin, M.C.P., 1979, "Aerofoil RAE 2822 Pressure Distributions and Boundary Layer and Wake Measurement," *AGARD AR No.138*.

[9] Schmitt, V. and Charpin, F., 1979, "Pressure Distributions on the ONERA-M6-Wing at Transonic Mach Numbers," *AGARD AR No.138*.

[10] Treadgold, D.A., Jones, A.F., and Wilson, K.W., 1979, "Pressure Distribution Measured in the RAE $8ft \times 6ft$ Transonic Wind Tunnel on RAE wing 'A' in Combination with an Axi-symmetric Body at Mach Number of 0.4, 0.8 and 0.9," *AGARD AR No.138*.

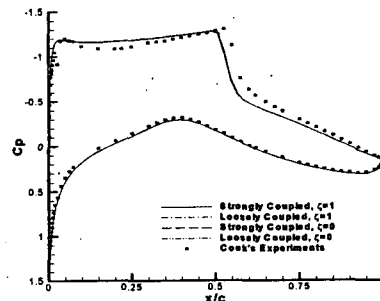


Fig. 1 RAE2822의형의 압력분포; wall function ($M=0.73$, $Re=6.5 \times 10^6$, $\alpha=3.19$)

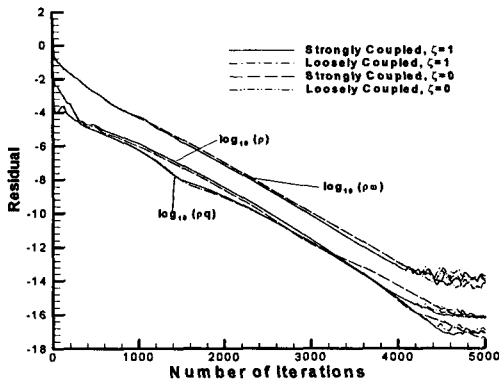


Fig. 2 수렴성 비교; wall function
($M=0.73, Re=6.5 \times 10^6, \alpha=3.19$)

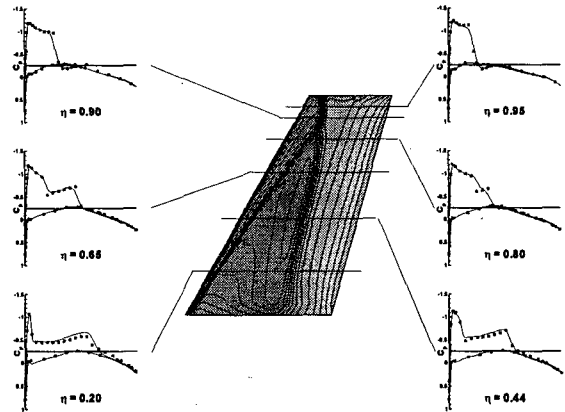


Fig. 5 ONERA-M6 wing 표면압력계수 비교
($M=0.84, Re=11.72 \times 10^6, \alpha=3.06$)

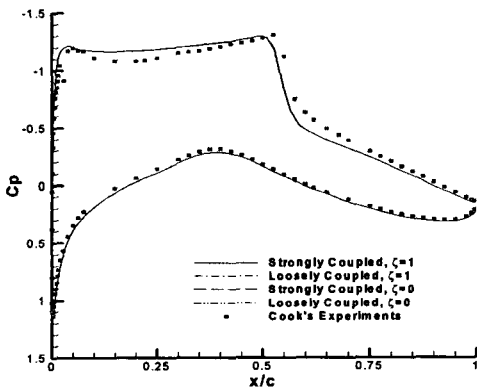


Fig. 3 RAE2822의형의 압력분포
($M=0.73, Re=6.5 \times 10^6, \alpha=3.19$)

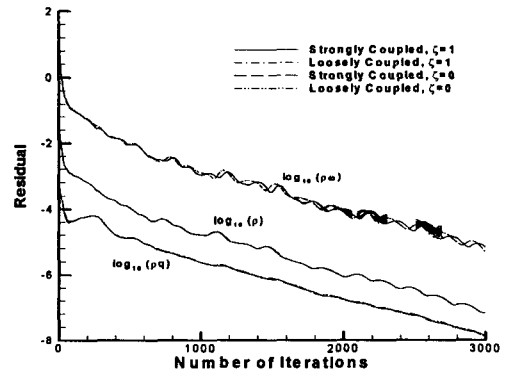


Fig. 6 수렴성 비교
($M=0.84, Re=11.72 \times 10^6, \alpha=3.06$)

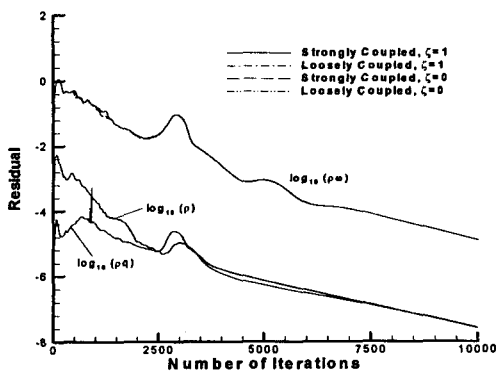


Fig. 4 수렴성 비교
($M=0.73, Re=6.5 \times 10^6, \alpha=3.19$)

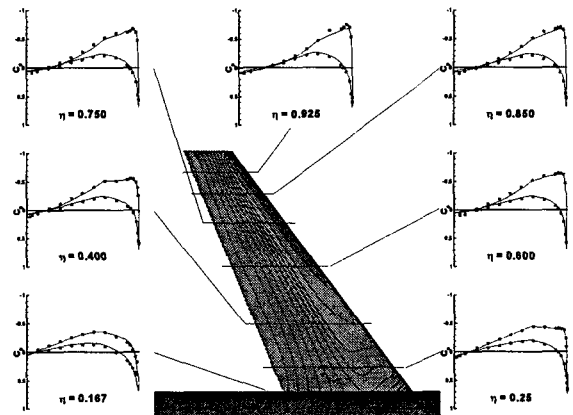


Fig. 7 RAE Wing/body 날개압력계수 비교
($M=0.8, Re=1.0 \times 10^6, \alpha=2$)

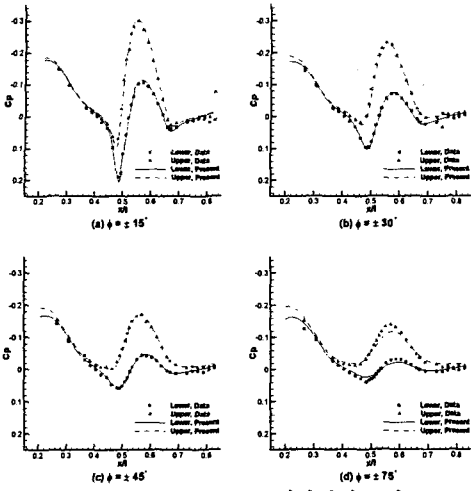


Fig. 8 RAE wing/body 동체압력계수 비교
 ($M=0.8, Re=1.0 \times 10^6, \alpha=2$)

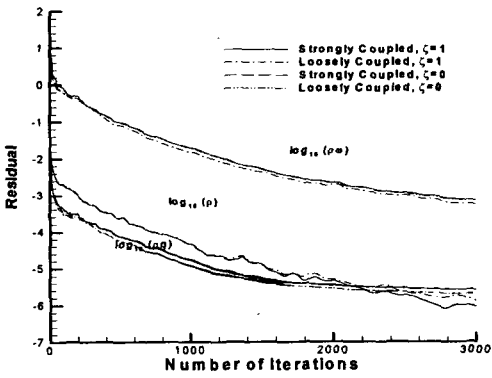


Fig. 9 수렴성비교 (RAE wing/body)