

# IMC-PID 제어기의 최적 동조

## An Optimum Tuning for IMC-PID Controller

박종수\*, 임동균\*\*, 서병설\*\*\*  
(Jong-Su Park, Dong-Kyun Lim, and Byung-Suhl Suh)

**Abstract** - This paper proposes an optimum tuning which improves the tuning effect of IMC-PID and guarantees the performance and robustness of controller system by considering gain margin, phase margin, sensitivity functions and integral square error(ISE) for IMC-PID controller.

**Key Words** : IMC-PID, ISE, performance, robustness, sensitivity function

### I. 서론

Morari와 Zafiriou(1989)<sup>[1]</sup>가 제안한 IMC-PID는 내부안정성이 보장되고, 모델링 오차가 거의 없다고 가정할 때 출력이 입력을 완전히 추종하는 완전 제어기이다. 시스템 제어에 있어서 반드시 고려되어야 할 요소에는 출력의 성능과 안정도이며, IMC-PID설계에 있어서의 주요한 과제는 이러한 성능과 안정도를 보장할 수 있는 제어기의 설계 변수 값을 적절히 선정하는 것이라 할 수 있다.

본 논문에서는 임계 이득 일치에 의한 시스템 식별 방법을 사용하여 모델의 변수 값들을 설정하였고, IMC-PID제어기의 동조방법으로 감도함수( $S_{iw}$ )와 설계변수사이의 관계를 수학적으로 유도하였고 적분제곱오차( $J_{ISE}$ )를 고려하여 설계변수값을 선정함으로써 제어기의 성능과 강인성을 모두 절충하고자 한다.

### II. 시스템 식별

제어기기의 동조(tuning)는 응답이 필요한 기준(criteria)에 만족되도록 제어기기 알고리즘 변수들을 최적화 시키는 것이라고 할 수 있다. 이 최적화를 위해서는 제어 알고리즘의 개선이나 동조 방법들에 대한 연구가 있을 수 있다. 본 논문에서는 시스템 식별 방법으로써 폐루프(closed loop)에서 제어기기의 비례모드(mode)만을 동작시켜서 응답곡선(response curve)의 실험 data를 얻고, 이로부터 추정모델 함수인 1차 전달함수의 변수들, 즉 지연시간(time delay), 시간상수(time constant), 안정상태 이득(steady state gain)을 결정하여 주는 관계식을 유도하여 PID 알고리즘

변수들의 값을 최적화 할 수 있는 방법이다.

시스템 응답 data로부터 얻은 페루프 전달함수는 식 (1)과 같다.<sup>[2]</sup>

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ke^{-ds}}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (1)$$

$$K = \frac{c_\infty}{A} \quad (2)$$

$$H = \frac{1}{3} \left[ \frac{c_{p1} - c_\infty}{c_\infty} + \frac{c_\infty - c_{m1}}{c_{p1} - c_\infty} + \frac{c_{p2} - c_\infty}{c_\infty - c_{m1}} \right] \quad (3)$$

$$\zeta = - \frac{\ln(H)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(H)}} \quad (4)$$

$$\tau = \frac{(t_{m1} - t_{p1})\sqrt{1 - \zeta^2}}{\pi} \quad (5)$$

$$d = 2t_{p1} - t_{m1} \quad (6), \quad c_\infty = \frac{c_{p1}c_{p2} - c_{m1}^2}{c_{p1} + c_{p2} - 2c_{m1}} \quad (7)$$

식 (1)로부터 위상 교차 주파수  $w_u$ 는 식 (8)을 만족한다.

$$-dw_u - \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta\tau w_u}{\sqrt{1 - \tau^2 w_u^2}} \right) = -\pi \quad (8)$$

그리고, 위상 주파수  $w_u$ 일 때 이득은 식(9)와 같이 구할 수 있다.

$$G_d(iw_u) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \tau^2 w_u^2)^2 + (2\zeta\tau w_u)^2}} \quad (9)$$

식 (9)는 이득 여유의 역수이다.

$$G_m(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} e^{-d_m s} \quad (10)$$

에서  $K_{cu} = K_c GM$  이므로

저자 소개

- \* 한양대학교 전기공학과 碩士課程
- \*\* 한양사이버대학교 컴퓨터학과 教授
- \*\*\*한양대학교 전기제어생체공학부 教授 · 교신책임자

$$\tau_m = \frac{1}{w_u} \sqrt{K_{cu}^2 K_m^2 - 1} \quad (11)$$

$$d_m = \frac{1}{w_u} [\pi - \tan^{-1}(\tau_m w_u)] \quad (12)$$

$$K_m = \frac{c_{\infty}}{Kc(A - c_{\infty})} \quad (13)$$

### III. IMC-PID 제어기 설계

#### 1. IMC-PID 제어기의 구조와 설계

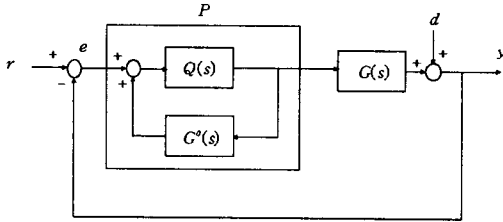


그림 1. 일반적인 IMC-PID 제어기 구조

Fig.1. Structure of general IMC-PID controller system

$G$  : 제어 대상 플랜트  $G^o$  : 플랜트의 모델

$Q = Q^o F$   $F$  : 강인성 필터

$Q^o : G = G^o$  라는 가정 하에 설계된 공칭제어기

$G^o(s) = G_{\infty}^o G_{nm}^o (G_{\infty}^o$  은 최소 위상,  $G_{nm}^o$  은 크기는 1 인 비최소 위상)

일반적인 IMC-PID의 구조는 그림 1과 같이 시간지연 항을 포함한 1차 모델을 공칭 모델로 사용하는 것이고, 제어기의 전달 함수와 설계변수는 식(14),(15),(16),(17),(18)과 같다.<sup>[1][3]</sup>

$$P(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right) \quad (14)$$

$$T_i = \tau_m + \frac{d_m}{2} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (15)$$

$$T_d = \frac{\tau_m d_m}{2 T_i} - \frac{T_F d_m}{2(T_F + d_m)} \quad (16)$$

$$K_p = \frac{T_i}{K_m (d_m + T_F)} \quad (17), \quad N = \frac{2 T_d (T_F + d_m)}{T_F d_m} \quad (18)$$

위 식으로부터 IMC-PID 제어기의 설계변수는  $T_F$  이고 이 값을 선정하면 IMC-PID 제어기가 설계되는 것이다.

Morari와 Zafriou는 설계변수  $T_F$ 를 선정하는 조직적인 방법을 제시하지 못하였고 단지  $T_F = 0.25d_m$ 를 제시 하였다. Maffezzoni - Rocco<sup>[3]</sup>는  $T_F$ 를 선정하기 위해  $H_{\infty}$  제어 기법을 이용하여 성능-강인성(performance-robustness)을 보장하고자 했으나 응답 시간이 길어지는 것과 가중치 함수를 구해야하는 단점이 있어 이를 개선하기 위한 연구로 성능-강인성을 절충할 수 있는 방법을 사용한다.

## 2. 강인성과 성능의 측정

### 2.1 강인성의 측정

시스템의 강인성이란 시스템의 어떤 구조나 파라메타의 변화에 서도 제어기의 성능이 유지되는 것을 말한다. 이 논문에서는 강인성의 측정을 위해  $|S|_{\infty}$ (감도함수)를 모델링 오차가 없다는 가정하에 모델의 시간 지연 부분을 1차 파데 근사하여 수학적으로 유도함으로 강인성을 보장할 수 있는  $T_F$ 값을 선정한다. 모델링 오차가 없다는 가정에 의해 식 (19)가 성립하고 시간 지연의 1차파데근사한 결과를 식 (20)로 하여 감도함수를 유도하는데 적용한다.

$$G(s) \approx G^o(s) = G_m^o(s) G_{nm}^o(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} e^{-d_m s} \quad (19)$$

$$G(s) \approx \tilde{G}(s) = \frac{K_m (1 - 0.5d_m s)}{\tau_m s + 1 (1 + 0.5d_m s)} \quad (20)$$

감도 함수  $S(s)$ 는 식 (21)로 나타난다.<sup>[5]</sup>

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)G(s)} \approx \frac{1}{1 + P(s)\tilde{G}(s)} = \frac{s^2 + cs}{s^2 + as + b} \quad (21)$$

여기에  $s = jw$ 을 대입하면 그 크기는 다음 식 (22)와 같고 감도 함수를 최대로 하는 최대 공진 주파수  $w_{rs}$  식(23))으로부터 부터 얻어진다.

$$|S(jw)| = \frac{\sqrt{w^4 + c^2 w^2}}{\sqrt{(b - w^2)^2 + a^2 w^2}} \quad (22)$$

$$\frac{d|S(jw_{rs})|}{dw} = \frac{(2w_{rs}^3 + c^2 w_{rs}) \sqrt{(w_{rs}^2 - b)^2 + a^2 w_{rs}^2}}{\sqrt{w_{rs}^4 + c^2 w_{rs}^2}} \quad (23)$$

$$+ \frac{(2w_{rs}(b - w_{rs}^2) - a^2 w_{rs}) \sqrt{w_{rs}^4 + c^2 w_{rs}^2}}{\sqrt{(b - w_{rs}^2)^2 + a^2 w_{rs}^2}} = 0$$

식 (23)을 만족하는 공진주파수  $w_{rs}$ 는 식 (24)와 같고, 유도된  $w_{rs}$ 를 식 (22)에 대입하면 감도 함수의 최대값 식(25)를 구할 수 있다.

$$w_{rs} = \sqrt{\frac{-b^2 - \sqrt{b^4 - (a^2 - 2b - c^2)c^2 b^2}}{a^2 - 2b - c^2}} \quad (24)$$

$$|S|_{\infty} = \frac{\sqrt{w_{rs}^4 + c^2 w_{rs}^2}}{\sqrt{(b - w_{rs}^2)^2 + a^2 w_{rs}^2}} \quad (25)$$

$$a = \frac{d_m + 2T_F}{d_m T_F} \quad (26), \quad b = \frac{2}{d_m T_F} \quad (27), \quad c = \frac{2(d_m + T_F)}{d_m T_F} \quad (28)$$

### 2.2 성능 측정

시스템의 성능을 측정하기 위한 가격함수로 적분제곱오차 (ISE)를 사용한다.

$$J_{ISE} = \int_0^{\infty} (r(t) - y(t))^2 dt \quad (29)$$

여기서  $J_{ISE}$ 는 변수  $T_F$ 에 대한 함수로 나타낼 수 있으므로 적절한  $T_F$ 를 선정하여 원하는 설계사양을 만족시킬 수 있다. 제어 성능의 관점에서,  $J_{ISE}$ 는 시스템의 오차를 나타내므로, 변수  $T_F$ 는  $J_{ISE}$ 를 최소화하는 값으로 선택되어야 한다. 그러나, 본 논문에서는 응답 성능과 강인성을 절충하는 값으로 선택한다.

### 2.3 Filter Parameter $T_F$ 의 결정

식 (25)와 (29)로부터 감도함수  $|S|_{\infty}$ 와 적분제곱오차ISE는 모두  $T_F$ 에 대한 함수이다.  $T_F$ 가 증가할 때  $J_{ISE}$ 도 증가하여 시스템의 응답시간이 증가하는 반면,  $|S|_{\infty}$ 는 감소하게 되어 안정도는 더 좋아지게 된다. 그러므로 식(30)을 이용하여  $|S|_{\infty}$ 와  $J_{ISE}$ 를 trade-off하는 것이 필요하다.<sup>[4]</sup>

$$\min_{T_F} (|S|_{\infty} + \gamma J_{ISE}) : \gamma \text{ weighting factor} \quad (30)$$

#### IV. 실험

본 논문에서는 큰 지연 시간을 갖는 시스템으로 Yuwana-Seborg (1982)<sup>[5]</sup>, Chen(1989)<sup>[6]</sup>, Ziegler-Nichols<sup>[7]</sup> 등에 의해 시뮬레이션 상 서로의 우수성을 입증하기 위해 사용된 시스템을 선정하였다.

$$G_p(s) = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2(2s+1)} \quad (32)$$

식(11,12,13)으로부터 계산된 추정모델의 변수값은 표 1과 같고, 모델 변수에 따른 모델 루프와 실제 루프와의 차이를 그림 2-(1)에서 비교한결과 모델 루프의 응답이 실제 루프 응답을 잘 추종하는 것으로 나타났다. 그림 2-(2)에서는 시스템의 안정도를 보장할 수 있는 감도함수  $|S|_{\infty}$ 와 성능을 나타내는 적분제곱오차  $J_{ISE}$ . 그림 2-(3)에서는 trade-off를 구하기 위한 값을  $T_F$ 에 대하여 각각 그래프로 나타내었다.

그림 2-(2,3)의 결과에 따라  $|S|_{\infty} + J_{ISE}$ 를 최소로 하는  $T_F$ 값은 1.95가 됨을 알 수 있다. 여기서  $\gamma$ 는 가중치 인자(weighting factor)로서 설계자가 원하는 결과값에 따라서 조절할 수 있다.(본 논문에서는  $\gamma$ 를 0.22로 하였다.) 그림 2-(4)는  $T_F$ 가 1.95일때 시스템의 스텝 응답을 다른 제어기 설계 방법의 스텝 응답과 비교한 것으로, 빠른 상승시간을 유지할 뿐만 아니라 가장 작은 overshoot와 가장 빠른 정착 시간을 보임을 알 수 있다. 그림 2-(5)는 실제플랜트와 모델과의 주파수 응답, 그림 2-(6)은 다른 동조방법들과의 주파수 응답을 비교하여 각각 나타내었다. 모델의 응답이 플랜트의 응답을 완전 추종하며, 다른 동조방법들과 같이 뛰어난 안정도를 보이는 것으로 나타났다.

표 1. 시스템의 모델 변수

Table 1. Model variables of the system

추정모델변수	$K_m$	$\tau_m$	$d_m$
크 기	1.0	2.89	4.49

표 2. 시간 영역 응답의 비교

Table 2. Comparison of the time domain response

성능지수 동조방법	Overshoot (%)	Rising Time(sec)	Settling Time(sec)
Proposed	7.54	4.30	22.6
M-Z	12.99	4.91	25.3
Z-N	9.41	2.76	27.1

표 3. 주파수 영역 응답의 비교

Table 3. Comparison of the frequency domain response

성능지수 동조방법	Gain Margin (dimensionless)	Phase Margin(°)
Proposed	2.14	63.31
M-Z	2.35	56.00
Z-N	1.66	76.05

#### V. 결론

본 논문에서는 IMC-PID 제어기의 설계 사양에 부합되는 시스템 식별 과정과 설계 인자의 동조 방법에 대해서 설명하였다. IMC-PID 제어기의 동조를 위해 감도 함수를 수학적 근거에 의해 유도함으로써 시스템의 강인성을 보장하였고, 적절한 가중치 인자( $\gamma$ )를 선택

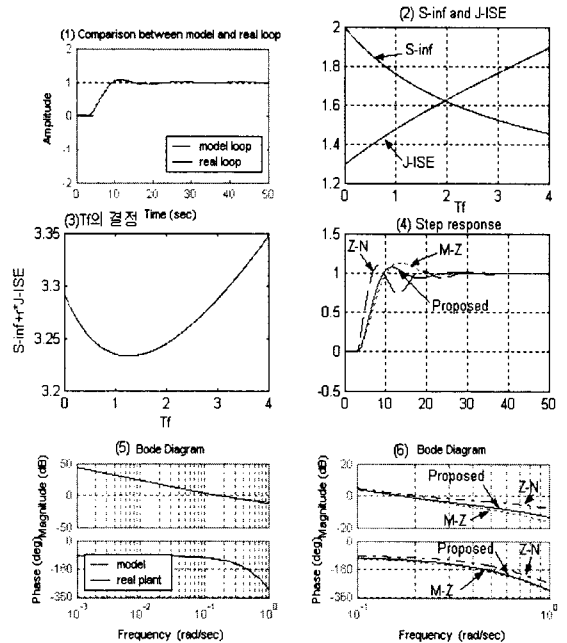


그림 2. Simulation

함으로써 설계자가 공정 변화 및 모델오차에 대한 제어계의 강인성(robustness)과 제어성능(control system performance)사이의 절충(trade-off)을 택할 수 있다는데 그 의미가 있다.

앞으로의 과제는 제어 인자를 주파수 영역의 모델링 오차에서 구하므로 실제 플랜트의 주파수 응답을 알아야하는 어려움이 있기 때문에 시간영역에서 설계 사양을 고려할 수 있는 연구와 다변수인 경우에도 적용할 수 있는 설계의 유연성 문제를 해결할 수 있도록 하는 연구가 수행되어야 한다.

#### 참고 문헌

- [1] M. Morari and E. Zafriou, "Robust Process control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1989.
- [2] 임동균, "시스템 식별 조절 인자와 루프 형성기법을 이용한 IMC-PID 제어기 동조", 한양대학교, December 2000.
- [3] C. Maffezzoni and P. Rocco, "Robust Tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification," European Journal of Control, Vol3, no2, pp. 125-136, Mar 1997.
- [4] Kang Liu, Tadaaki Shimizu, Makoto Inagaki, and Akira Ohkawa, "New Tuning Method for IMC Controller", Journal of Chemical Engineering of Japan, Vol. 31, No. 3, pp. 320-324, 1998.
- [5] Minta Yuwana, Dale E. Seborg, "A new method for on-line controller tuning", AIChE Journal, 1982.
- [6] C. L. Chen, "A Simple Method for On-Line Identification and Controller Tuning", Journal of AIChE, Vol.35, no.12, pp.2037-2039, Dec 1989.
- [7] J. G. Ziegler and N. B. Nichols, "Optimum Settings for Automatic Controllers," Trans. ASME, Vol. 64, pp. 759-768, 1942