

선형 시변 시스템에서의 이산 시간 모델의 신호처리 적용성 고찰

A Consideration on the Applicability of the Discrete-Time Models of Linearly Time-Varying Systems to Digital Signal Processing

권순만*, 이종무*, 박민국*, 김춘경*, 천종민*

Soonman Kwon, Jongmoo Lee, Minkook Park, Choon Kyung Kim, Jong Min Cheon

Abstract - This paper describes a consideration on the sampling in linearly time-varying (LTV) systems in view of the convenience in digital signal processing. The relation between a continuous-time and a discrete-time system models is investigated for a simple linear time-invariant system. Based on the results of the investigation, we first consider discrete-time models for LTV systems, Then the simplicity of the models in terms of microprocessor-based digital signal processing is compared.

Key Words : Discrete-Time Model, Linear Time-varying, Sampling Theorem

1. 서론

현재 우리 생활 및 산업 전반 곳곳에 적용되어 문화생활의 향상과 기술 문명의 발전에 이바지 하고 있는 20세기의 마이크로프로세서의 출현은 제어 및 신호처리 기술에서도 많은 변화를 가져왔다. 기존의 진공관이나 연산증폭기를 기반으로 하던 아날로그 시대에서 구현하지 못하던 복잡한 논리나 연산을 구현하게 됨으로서 그동안 이론에만 지나지 않던 기법들이 실제 구현될 수 있게 되어 보다 더 정교하며 지능을 가진 시스템들을 실생활 및 산업전반에 활용할 수 있게 되었다.

이러한 디지털 기술의 구현에서 수반되는 가장 중요한 기술 요소의 하나가 샘플링(sampling)이다. 샘플링은 우리 세계에 존재하는 신호들의 대표적인 형태인 아날로그 형식으로부터 적당한 각 시점에서의 값만을 추출하는 과정이다. 이를 통해 얻어진 정보는 원래 신호의 완전한 정보를 포함하지 못할 수도 있지만, 이론적으로 어떤 그룹에 속하는 신호에 대해서는 원래 신호의 완벽한 복원이 가능한 것을 Shannon은 샘플링 법칙(Sampling Theorem)을 통해 증명하고 있다[1].

샘플링을 고려한 시스템의 해석에는 반드시 시스템 및 시스템의 입출력 신호에 대한 이산시간 모델이 필요하게 된다. 따라서 본 논문에서는 선형 시변 특성을 가지는 시스템에서의 시스템 및 그 입출력에 대한 이산시간 모델에 대해 신호 처리의 편의성 관점에서의 샘플링 주기를 고려한 모델 식에 대해 고찰해 보기로 한다.

2. 본론

먼저 어떤 시스템에서의 연속시간 모델과 이산 시간 모델 간의 사이에 djEJs 관계가 존재하는지를 알아보기 위해 다음 그림 1과 같이 표시되는 선형 시불변 시스템의 경우를 고려해 보자.

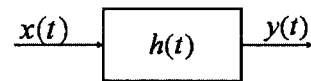


그림 1, 선형 시불변 시스템의 연속 시간 모델

2.1. 시불변 선형 시스템에서의 고찰

그림 1에서의 시스템의 출력은

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (1)$$

로 주어짐을 잘 알고 있다. 그런데 만약 그림 1의 시스템에서 입력의 주파수 대역이 B_i 라고 가정할 때 (이러한 가정은 실제 존재하는 모든 시스템에 대해 유효하므로 그 일반성에 문제가 되지 않는다) 시스템 및 입출력을 샘플링 주기

$T \leq \frac{1}{2B_i}$ 를 이용하여 다음 그림 2에서와 같이 표시하면 시스템 및 출력은 원래 연속 시간 모델과는 어떤 관계를 가질까?

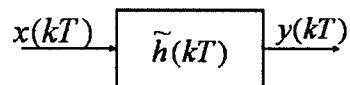


그림 2, 선형 시불변 시스템의 등가 이산 시간 모델

저자 소개

*한국전기연구원 계측제어그룹

그 관계는 다음 식에 의해 알 수 있다. 먼저 $\psi(t, B)$ 를 대역폭 B 를 가지는 sinc 함수로 정의하자. 그러면 시각 $t=kT$ 에서의 (1)에서의 출력 $y(t)$ 의 샘플값 $y(kT)$ 는

$$y(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} h(kT-\tau)\psi(\tau-nT; B_i) d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(kT-nT) \quad (2)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(kT-mT)h(mT) \quad (3)$$

으로 표시되는데 이 때 $T \leq \frac{1}{2B_i}$ 이며

$$h(mT) = \int_{-\infty}^{\infty} h(mT-\tau)\psi(\tau; B_i) d\tau \quad (4)$$

이다.

식(4)는 $h(t)$ 와 $\psi(t, B_i)$ 의 convolution 함수의 시각 $t=mT$ 에서의 샘플을 나타내는 데 이것을 그림으로 표시하면 다음 그림 3과 같다.

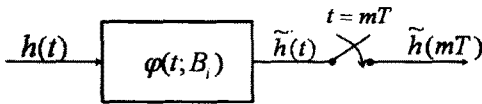


그림 3. $h(t)$ 와 $h(mT)$ 의 관계

이러한 사실로부터 알 수 있는 것은 시스템을 나타내는 연속시간 임펄스 응답 함수인 $h(t)$ 를 단순히 시각 $t=mT$ 에서 샘플링한 것이 일반적으로 이산시간 모델을 나타내는 것이 아니라는 것이다. 다시 말해서 유한 대역폭을 가지는 입력신호를 가지는 시스템의 등가 이산시간 모델은 연속시간 모델, 즉, 시스템의 임펄스 응답함수의 filtered version의 샘플링된 함수라는 것이다. 따라서 이러한 고찰을 통해 우리는 다음과 같은 샘플링 법칙을 얻을 수 있다.

Theorem 1: [샘플링 법칙] 연속 시간 임펄스 응답 함수가 $h(t)$ 인 시스템의 입력을 $x(t)$ 라고 할 때 이 입력의 대역을 B_i 라고 하면, 이 시스템의 출력의 연속시간 함수 $y(t)$ 는

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(t-kT; B_i) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(kT-nT) \quad (5)$$

로 표시되며 이 때 $T \leq \frac{1}{2B_i}$ 이고,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\psi(t-\tau; B_i) d\tau \quad \square$$

2.2. 시변 선형 시스템에서의 고찰

지금까지 선형 시불변 시스템의 경우를 통해 연속 시간 시스템 임펄스 응답 함수와 샘플링을 통한 이산 시간 등가 모

델과의 관계에 대해 고찰해 보았다. 그러면 이러한 고찰 결과를 바탕으로 선형 시변 시스템에서의 등가 이산 시간 모델에 대해 살펴보기로 하자.

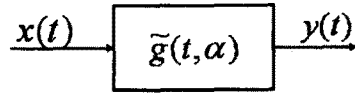


그림 4. 선형 시변 시스템

그림 4는 선형 시변 시스템의 임펄스를 나타낸다. 그림에서 시스템의 임펄스 응답을 나타내는 $\tilde{g}(t, \alpha)$ 는 시각 $t-\alpha$ 에서 임펄스를 시스템에 인가했을 경우에 시각 t 에서 관측한 시스템의 출력으로 정의된다.

먼저 다음 사항을 정의하고자 한다.

Definition 1: [유효 대역] 대역이 B_i 인 신호 $x(t)$ 를 임펄스 응답함수 $g(t, \alpha)$ 를 가지는 선형 시변 시스템의 입력이라고 하자. 그러면 이 시스템은 입력 $x(t)$ 에 대해 다음 식 (6)을 만족하는 경우, "유효 대역 B_e 를 가진다"("effectively B_e -bandlimited")라고 정의한다.

$$= \int \int g(\tau, \alpha)\psi(\alpha-\alpha; B_i)\psi(t-\tau; B_e) d\alpha d\tau \quad (6)$$

□

그림 4에서 입력 $x(t)$ 의 주파수 대역은 B_i 시스템의 유효 대역은 B_e 라고 각각 가정하자. 그러면 출력 $y(t)$ 의 대역 B_o 는 $B_o = B_e + B_i$ 로 된다.

그러면 우리는 Shannon의 샘플링 이론에 따라 임펄스 및 시스템 함수에 대해 각각 적절한 샘플링 주기를 선정할 수 있는데 이것을 각각 T_i , (T_s , T), T_o 라고 표시하면 이 값들은 다음 조건을 만족해야 한다:

$$T_i \leq \frac{1}{2B_i}, \quad T_s \leq \frac{1}{2B_e}, \quad T_o \leq \frac{1}{2B_o} \quad (7)$$

이 값들을 이용하여 입력 및 시스템 방정식을 표시하면

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_i)\psi(t-nT_i; B_i) \quad (8)$$

$$\tilde{g}(t, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{g}(mT_s, lT_i)\psi(t-mT_s; B_e)\psi(\alpha-lT_i; B_i) \quad (9)$$

로 표시할 수 있으며 앞에서 Theorem 1에서 소개한 바와 같이 이 시스템의 출력 $y(t)$ 는 $\tilde{g}(t, \alpha)$ 를 이용하여

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\alpha)\tilde{g}(t, \alpha) d\alpha \quad (10)$$

로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.

식(9)를 (10)에 대입한 후 출력을 샘플링하면

$$\begin{aligned}
 y(kT_o) &= \\
 &= \sum_m \sum_l x(kT_o - lT_i) \tilde{g}(mT_s, lT_i) \psi(kT_o - mT_s; B_i)
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

로 표시할 수 있으며 이것은 결국 그림 4에서의 각 함수를 (7)에 표시한 샘플링 주기로 샘플링한 값들로서 출력을 표시한 것을 나타낸다. 또한 식에서는 대역이 B_i 인 sinc 함수의 샘플 모델이 사용되고 있음을 알 수 있다.

2.3. 디지털 신호처리 관점에서의 모델 검토

식(11)에서 나타내진 이산 시간 모델에서의 두 index는 다음을 만족하며 상한값은 T_i 또는 T_s 가 $\frac{n}{m} T_o$ (단, n 과 m 은 각각 0이 아닌 정수)와 같을 때 간격 된다:

$$\begin{aligned}
 0 \leq |kT_o - lT_i| &\leq \min\{T_o, T_i\}, \\
 0 \leq |kT_o - mT_s| &\leq \min\{T_o, T_s\}.
 \end{aligned}$$

그러므로 (11)로부터 살펴보면 k 의 각 값에 대해 $y(kT_o)$ 를 구하기 위해서는 다른 시각 기준의 $x(t)$ 및 $\psi(t, B_i)$ 의 샘플들이 필요하게 된다. 이것은 결국 신호처리 측면에서 보면 두 신호의 샘플을 갖기 위해 아주 빠른 샘플링을 요구하게 될 수도 있게 된다. 그러나 다음 그림 5의 모델을 살펴보자.

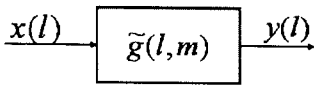


그림 5. 선형 시변 시스템의 등가 이산 시간 모델

그림 5에서 $\tilde{g}(l, m)$ 은 $\tilde{g}(t, \alpha)$ 를 $t = kT$ 및 $\alpha = nT$ (단, $T \equiv \frac{1}{2B_o}$)로 샘플링한 함수를 나타낸다. 따라서 이 시스템의 입출력 방정식은

$$y(l) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(l-m) \tilde{g}(l, m)
 \tag{12}$$

로 주어진다.

식(12)로 주어진 식은 디지털 신호처리 관점에서 아주 편리하다. 왜냐하면 $y(kT)$ 는 단순히 주기 T 로 샘플링된 입력과 시스템 샘플을 가지고 단지 index를 shifting함에 의해서 쉽게 계산될 수 있기 때문이다.

3. 결 론

본 논문에서는 선형 시변 시스템에서의 등가 이산 시간 모델에 대해서 고찰해 보았다. 먼저 비교적 간단한 선형 시불변 시스템을 이용하여 실제 시스템의 이산 시간 모델이 입력 신호의 주파수 대역을 고려한 등가의 다른 함수로 표현할 수 있음을 보였으며 이를 기반으로 선형 시변 시스템에 대해

이산 시간 모델을 표현하는 데 필요한 샘플링 주기를 중심으로 하여 디지털 신호처리 관점에서의 모델의 편의성을 검토하였다. 시변 시스템의 경우에서도 입력신호의 대역을 고려한 등가의 시스템 함수의 이산 시간 모델을 활용하면 디지털 신호처리에 아주 편리한 간단한 이산 시간 입출력 방정식을 얻을 수 있음을 보여 주었다.

참 고 문 헌

- [1] C. E. Shannon, "Communication in the Presence of Noise", Proceedings of the IRE, vol. 37, 1949.
- [2] Phillip A. Bello, "Characterization of Randomly Time-Variant Linear Channels", IEEE Trans. Communication Systems, vol. CS-11, no. 4, pp. 360-393, 1963.
- [3] W. A. Gardner, "A Sampling Theorem for Nonstationary Random Processes", IEEE Trans. Information Theory, vol. IT-18, pp. 808-809, 1972.
- [4] A. J. Jerri, "Application of the Sampling Theorem to Time-varying Systems", Journal of The Franklin Institute, vol. 293, no. 1, pp. 53-58, 1972.
- [5] A. J. Jerri, "The Shannon Sampling Theorem-Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review", Proceedings of the IEEE, vol. 65, no. 11, pp. 1565-1596, 1977.
- [6] S. P. Lloyd, "A Sampling Theorem for Stationary (Wide Sense) Stochastic Processes", Trans. of the American Mathematical Society, vol. 92, pp. 1-12, 1959.