

# 유사 역보행 기법을 이용한 이동로봇의 추종제어

## Tracking Control of Wheeled Mobile Robots Using Pseudo-Backstepping Method

박재용\*, 좌동경\*\*, 홍석교\*\*\*

Jaeyong Park, Dongkyoung Chwa, Suk-Kyo Hong

**Abstract** - This paper proposes tracking control method using pseudo-backstepping control for wheeled mobile robots with nonholonomic constraints. First, the pseudo commands for forward linear velocity and angular velocity are chosen based on the kinematics. Then, the actual torque control inputs are designed to make the actual forward linear velocity and angular velocity follow the pseudo commands. Both semi-global practical posture(position and heading direction angle) stabilization and trajectory tracking are achieved for reference trajectories such as straight line and sinusoidal curve. The stability and performance analysed and numerical simulations are performed to confirm the effectiveness of the proposed scheme.

**Key Words** : tracking, wheeled mobile robots, nonholonomic constraints, pseudo-backstepping

### 1. 서론

지금까지 이동로봇의 추종제어에 관한 많은 연구가 진행되어왔다[1]. 미끄럼이 없는 바퀴의 회전에 있어서 제한된 이동성을 갖는 이동로봇은 비홀로노믹 제약 조건을 가지고 있다. 특히, 선형화된 이동로봇의 모델은 가제어성이 부족하고, 선형 제어 기법을 사용할 수 없다[2]. 그러므로 비선형 제어는 이러한 부분에 있어서 널리 연구되어 왔다. 임의의 초기 추종 오차를 지닌 전반적인 추종 문제들[3, 4]은 한정된 선형화와 각속도가 요구되었을 때 해결되었다. 비록 하나의 제어 기라도 추종과 안정성을 위해 설계한 연구도 있다[5].

본 논문에서는 직진 및 회전운동을 갖는 이동로봇의 제어를 간단하게 설계하기 위한 유사 역보행 기법을 제시한다. 먼저 이동로봇의 기구학에 대한 직진주행속도와 자세각속도 명령을 만든 후, 실제 직진주행속도와 자세각속도가 생성된 명령을 따라갈 수 있도록 토크 제어 입력을 설계하는데, 이 방법은 수직이착륙기의 제어[6]에서도 효과적으로 적용되었다. 이를 통하여, 원하는 기준 궤적의 궤적추종성능을 가짐을 안정성 분석 및 모의실험을 통해 보인다.

### 2. 이동로봇의 기구학 및 동역학

본 절에서는 이동로봇의 동역학 및 기구학에 대해 간단히 소개한다. 동역학을 오일러-라그랑즈 기법을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$M(q)\ddot{q} + V(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B\tau + A^T(q)\lambda \quad (1)$$

여기서,  $q \in R^n$  는 일반좌표변수,  $\tau \in R^r$  는 토크제어입력,  $\lambda \in R^m$  는 제한적인 힘변수,  $M(q) \in R^{n \times n}$  는 대칭 양한정 관성행렬,  $V(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$  는 구심력 및 코리올리행렬,  $G(q) \in R^n$  는 중력벡터,  $B(q) \in R^{n \times r}$  는 입력변환행렬,  $A(q) \in R^{m \times n}$  는 비홀로노믹 제한과 관련된 행렬이다. 여기서,  $r = n - m$  이다. 위 식으로부터 자세한 과정은 생략하고, 간단히 유도된 수식을 보이면 다음과 같다.

$$F(q)\dot{z} + F(q, z) = \tau \quad (2)$$

여기서,

$$F(q) = [S^T(q)B(q)]^{-1}S^T(q)M(q)S(q),$$

$$F(q, z) = [S^T(q)B(q)]^{-1}S^T(q)\{M(q)\dot{S}(q) + V(q, \dot{q})S(q)\}z + G(q).$$

$S(q) \in R^{n \times (n-m)} = R^{n \times r}$  는  $A(q)$  의 영공간의 선형독립벡터로 구성되고,  $z$  는 내부상태변수이다. 이동로봇의 경우  $q$  와  $z$  는  $q^T = [x_c \ y_c \ \theta_c]$ ,  $z^T = [\nu_c \ \omega_c]$  이다. 한편, 미끄럼이 없는 이동로봇의 회전운동에 대한 비홀로노믹 제약 조건은 다음과 같다.

$$\dot{x}_c \sin \theta_c - \dot{y}_c \cos \theta_c = 0 \quad (3)$$

직각좌표에서의 기구학은

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_c \cos \theta_c \\ \nu_c \sin \theta_c \\ \omega_c \end{bmatrix} \quad (4)$$

와 같다. 여기서,  $x_c$  및  $y_c$  는 실제 이동로봇의 위치변수,  $\theta_c$  는 자세각,  $\nu_c$  는 직진주행속도,  $\omega_c$  는 각속도이다.

저자 소개

\*아주대학교 전자공학부 석사과정

\*\*아주대학교 전자공학부 조교수

\*\*\*아주대학교 전자공학부 교수

### 3. 유사 역보행 기법을 이용한 추종제어

수식 (4) 에서의 기준 궤적은

$$\begin{cases} \dot{x}_d = \nu_d \cos(\theta_d) \\ \dot{y}_d = \nu_d \sin(\theta_d) \\ \dot{\theta}_d = \omega_d \end{cases} \quad (5)$$

와 같이 설정한다. 여기서,  $x_d$  와  $y_d$  는 기준 궤적의 위치변수,  $\theta_d$  는 자세각,  $\nu_d$  는 직진주행속도,  $\omega_d$  는 각속도이다. 여기서, 기준 궤적 변수의 미분가능성 및 유한성은 쉽게 가정할 수 있다.

제어목적은 다음과 같이 정의된 실제 위치변수 및 자세각과 기준궤적의 위치변수 및 자세각의 오차가 각각 0 으로 수렴하도록 하는 것이다.

$$x_e = x_c - x_d, \quad y_e = y_c - y_d, \quad \theta_e = \theta_c - \theta_d \quad (6)$$

이를 위해, 제안된 방법에서는 직진주행속도 및 자세각의 가령들을 생성한 후, 실제 값들이 이들 명령 값들을 추종하도록 실제 토크입력을 생성한다.

먼저,  $\nu_c$  와  $\theta_c$  가

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_c = \nu_c \cos(\theta_c) = X \\ \dot{\bar{y}}_c = \nu_c \sin(\theta_c) = Y \end{cases} \quad (7)$$

를 만족하도록 설정한다. 여기서,  $k_p > 0$  에 대해

$$X = \dot{\bar{x}}_d - k_p x_e, \quad Y = \dot{\bar{y}}_d - k_p y_e \quad (8)$$

이다. 그러면 식(5) 는  $\dot{\bar{x}}_e = -k_p x_e$ ,  $\dot{\bar{y}}_e = -k_p y_e$  이므로 위치추종이 가능해 진다. 따라서 식(7)을 이용하여 가직진주행속도  $\nu_{pseudo}$  는

$$\nu_{pseudo} = \cos(\theta_c) X + \sin(\theta_c) Y \quad (9)$$

와 같이 얻어질 수 있다.

다음으로, 가자세각 명령  $\theta_{pseudo}$  생성 시에는 위치 추종뿐만 아니라 자세각도 고려해야 한다. 변수  $\theta = \text{atan2}(Y, X)$  (여기서,  $\text{atan2}(y, x)$  는 사분면에서의 역탄젠트함수로서,  $[-\pi, \pi]$  사이의 값을 지닌다)를 도입하게 되면 식(9)는

$$\nu_{pseudo} = \cos(\theta_c - \theta) \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (10)$$

이 되는데, 이 값은  $|\theta_c - \theta| < \frac{\pi}{2}$  에서 양수,  $|\pi - (\theta_c - \theta)| < \frac{\pi}{2}$  에서 음수이다. 기준 직진주행속도  $\nu_d$  가 전진 및 후진방향의 운동에 따라 양수 또는 음수가 될 수 있으므로, 가자세각 명령 생성 시  $\nu_c$  와  $\nu_d$  가 같은 부호를 가지도록 해야 한다. 즉,  $\nu_d$  가 양수(음수) 일 때  $\nu_c$  또한 양수(음수) 이어야 하고,  $\theta_c - \theta$  가 식 (10)으로부터  $|\theta_c - \theta| < \frac{\pi}{2}$  ( $|\pi - (\theta_c - \theta)| < \frac{\pi}{2}$ )을 만족하여야 한다. 한편 식(7)에서

$$X \sin(\theta_c) - Y \cos(\theta_c) = \sin(\theta_c - \theta) \sqrt{X^2 + Y^2} = 0 \quad (11)$$

성립하는데  $\theta_c$  가  $\theta$  혹은  $\theta + \pi$  가 되어야 한다. 따라서  $\nu_d$  가 양수일 경우,

$$\theta_{pseudo} = \theta \quad (12)$$

가 성립하여야  $\nu_{pseudo}$  또한 양수가 된다. 마찬가지로  $\nu_d$  가 음수일 경우

$$\theta_{pseudo} = \pi + \theta \quad (13)$$

가 성립하여야 한다.

동역학 식(2) 에서의  $\tau = [\tau_x, \tau_y]^T$  는 왼쪽 및 오른쪽 바퀴의 토크벡터이고,  $H(q)$  와  $F(q, \dot{q})$  는 알고 있다고 가정한다.

이제 제어입력  $\tau$  를 설계하여  $\nu_c$  와  $\theta_c$  가 각각  $\nu_{pseudo}$  와  $\theta_{pseudo}$  를 추종하도록 한다. 역보행 기법의 경우  $\theta_{pseudo}$  값의 미분값을 필요로 하므로, 제어입력이 상당히 복잡해질 수 있는 문제점이 있다. 따라서 고입력궤환을 통해  $\dot{\nu}_{pseudo}$  및  $\dot{\theta}_{pseudo}$  를 포함하도록 하여, 광범위한(semi-global) 추종오차 안정성을 가지도록 한다.

Computed-torque 제어 방법을 이용하면, 토크제어입력  $\tau$  는 식(2)로부터

$$\tau = F(q, \dot{q}) + H(q)u \quad (14)$$

와 같이 설계할 수 있고,  $\dot{z} = u$  이 된다. 이에 해당하는 입력  $u$  는

$$u = -Az + z_c \quad (15)$$

와 같이 설계할 수 있다. 여기서  $A = \text{diag}(k_v, k_\omega, a_1) > 0$ ,

$$z_c = [k_v \nu_{pseudo}, k_\omega a_0 (\theta_c - \theta_{pseudo})]^T \quad (16)$$

일 경우 다음 관계식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_c &= -k_v \nu_c + k_v \nu_{pseudo} \\ \dot{\theta}_c &= \omega_c \end{aligned} \quad (17)$$

$$\omega_c = -k_\omega a_1 \omega_c + k_\omega a_0 (\theta_c - \theta_{pseudo})$$

여기서  $a_p, a_l$  는 양의 상수  $k_v$  와  $k_\omega$  는  $\nu_c$  - 및  $\theta_c$  - 시스템의 고입력이득으로서,  $\nu_c$  와  $\theta_c$  가  $\nu_{pseudo}$  와  $\theta_{pseudo}$  으로 점근적으로 수렴하도록 한다. VTOL(vertical takeoff and landing) 항공 시스템에서의 안정성 적용 결과 [7, pp. 247-248]를 이용하면, 다음과 같은 안정성 결과를 얻을 수 있는데 자세한 증명 과정은 생략한다.

정리 1: 식(9)의  $\nu_{pseudo}$  식(12) 혹은 (13)의  $\theta_{pseudo}$  을 이용한 식(14)에서의 제어입력  $\tau = [\tau_x, \tau_y]^T$  에 의해 식(6)에서 정의된 추종오차의 광범위한(semi-global practical) 안정성이 보장된다. 즉,  $(x_e, y_e, \theta_e) = (0, 0, 0)$  의 유한하고 닫힌 근방  $\Omega$  에서는 양의 상수  $\bar{k}_p, \bar{k}_v, \bar{k}_\omega$  가 존재하여  $k_p \geq \bar{k}_p, k_v \geq \bar{k}_v, k_\omega \geq \bar{k}_\omega$  을 만족하는 제어입력 이득에 점근적 안정성을 만족한다.

### 4. 모의실험 결과

본 절에서는 제안된 기법을 이용한 이동로봇 추종제어의 모의실험 결과를 보인다. 실제 및 기준 궤적의 기구학은 각각 식(4) 과 (5) 을 사용하였고, Computed torque 제어기법은 식(14) 을 이용할 수 있으므로, 편의상 식(2) 대신  $\dot{z} = u$  을 이용하였다. 제어기는 식(14), (15), (16), (9), (12), (13), (8) 로 구성되는데, 특히 식(8) 과 (16) 에서의 제어기 설계변수는  $k_p = 1, k_v = 100, k_\omega = 30, a_0 = 1, a_1 = 1.4$  로 설정하였다. 주어진 초기위치 및 자세각을 설정하였고, 초기속도는  $(x(0), y(0), \theta(0)) = (0, 0, 0)$  으로 가정하였다. 먼저 그림 1에서의 기준궤적은 직선으로서, 기준속도는  $\nu_d = 5(m/sec), \omega_d = 0(rad/sec)$   $\omega_d = 0.1 \sin(0.04\pi t)(rad/sec)$  이다. 기준 궤적과 실제 이동로봇의 초기위치 및 자세각은 각각 다음과 같다.

$$[x_d(0), y_d(0), \theta_d(0)] = [0.707m, 0.707m, \pi/4 rad],$$

$$[x_c(0), y_c(0), \theta_c(0)] = [-19.789m, 18.839m, -0.38 rad].$$

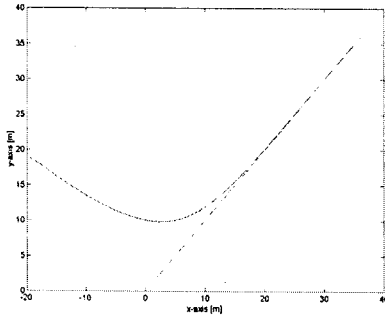
그림 2의 기준 궤적은 사인곡선으로서, 기준속도는  $\nu_d = 1(m/sec), \omega_d = 0.1 \sin(0.04\pi t)(rad/sec)$ , 기준 궤적의 초기

위치 및 자세각 오차 및 실제 이동로봇의 궤는 각각 다음과 같다.

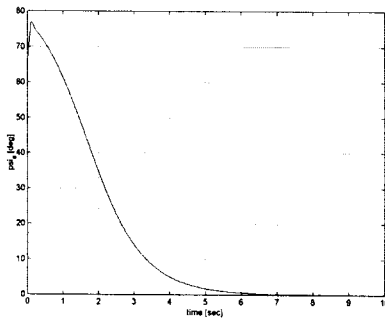
$$[x_d(0), y_d(0), \theta_d(0)] = [0m, 0m, 7\pi/4rad],$$

$$[x_c(0), y_c(0), \theta_c(0)] = [17m, 4m, \pi rad].$$

그림 1 (a)를 보면, 직선이 잘 추종됨을 알 수 있고, 그림 1 (b)를 보면 자세각 추종오차 또한 0으로 수렴함을 알 수 있다. 직진속도 및 회전속도 또한 기준궤적의 것과 같아짐을 확인할 수 있었다. 그림 2 (a)의 경우에서도 사인곡선에 대해 충분히 적은 추종오차를 지니면서 추종성능이 만족스러움을 알 수 있다. 그림 2 (b)도 자세각 추종오차가 0으로 수렴하고 있다. 이를 통해 제안된 기법의 성능을 확인할 수 있었다.

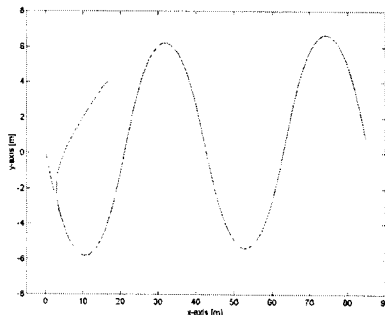


(a) x-y 평면상의 궤적 (점선: 기준궤적, 실선: 실제궤적)

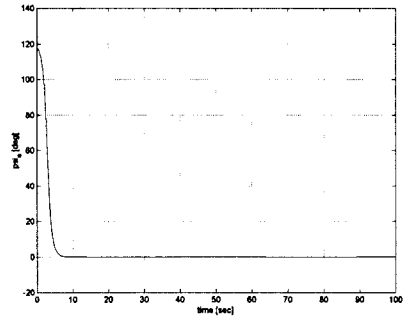


(b) 자세각 추종오차 ( $\theta$ )

그림 1. 제안된 제어기의 이동로봇 추종성능



(a) x-y 평면상의 궤적 (점선: 기준궤적, 실선: 실제궤적)



(b) 자세각 추종오차 ( $\theta$ )

그림 2. 제안된 제어기의 이동로봇 추종성능

## 5. 결론

본 논문에서는 이동로봇을 위한 간단한 안정화와 추종방법으로 유사 역보행 기법을 제안하였다. 여러 기준궤적에 대해 광범위한 영역에서의 안정화 결과를 얻을 수 있었는데, 모의 실험을 통해 충분히 작은 위치 및 자세각 추종오차가 얻어짐을 확인하였다.

## 참고 문헌

- [1] I. Kolmanovsky and N.H. McClamroch, "Developments in Non-Holonomic Control Problems" IEEE Control Systems, Vol. 15,
- [2] R. W. Brockett, "Asymptotic Stability and Feedback Linearization," in Differential Geometric Control Theory, R. W. Brockett, R. S. Millman, and H. J. Sussman, Boston, Birkhauser, 1983, pp. 181-191.
- [3] Z.-P. Jiang and H. Nijmeijer, "Tracking Control of Mobile Robots: A Case Study in Backstepping," Automatica, Vol. 33, No. 7, pp. 1393-1399, 1997.
- [4] Z.-P. Jiang, E. Lefeber, and H. Nijmeijer, "Saturated Stabilization and Tracking of a Nonholonomic Mobile Robot," Systems & Control Letters, Vol. 42, pp. 327-332, 2001.
- [5] T.-C. Lee, K.-T. Song, C.-H. Lee, and C.-C. Teng, "Tracking Control of Unicycle-Modeled Mobile Robots Using a Saturation Feedback Controller," IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 9, No. 2, pp. 305-318, Mar. 2001.
- [6] M. Saeki and Y. Sakaue, "Flight Control Design for a Nonlinear Non-Minimum Phase VTOL Aircraft Via Two-Step Linearization," Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, December 2001.
- [7] R. Sepulchre, M. Jankovic, and P. Kokotovic, Constructive Nonlinear Control, Springer-Verlag, 1997.