

시간지연 시스템의 PID제어기 동조방법 비교

A comparison for PID Turing method of time delay systems

윤영석*, 서병설**
(Young-Suk Yoon, Byung-Suhl Suh)

Abstract - The best known Lee & Sung and Ho's method for PID tuning of the system with time delay are compared with the recently developed the LQ-PID method.

Key Words : PID controller, Second order Systems, Time delay

1. 서론

시스템의 제어에 있어 PID 제어기는 그 성능의 우수성과 설계에 있어서의 간편성 때문에 현재에 이르기까지 실 산업에서 널리 응용 되어 왔다. 또한 현재도 산업 현장에서 광범위하게 이용되고 있다. 이러한 상황 속에서 제어 공학자들은 설계사양을 만족시키면서 안정성(stability)과 강인성(robustness)을 갖춘 PID제어기 설계를 위해서 노력해왔다. 이러한 노력으로 인해서 PID제어기의 설계방법은 많은 발전을 이룩해왔다. 그럼에도 최근에는 화학공정 시스템, 운송시스템, 통신시스템, 전력시스템 등에서 나타나는 시간지연 시스템에 대한 제어가 필요하게 되었다. 이런 시간지연 시스템에 대하여 Lee와 Sung^[1], Ho^[2]의 방법이 좋은 튜닝효과를 나타내 왔다. Lee와 Sung^[1]은 P controller와 relay feedback test를 이용한 온라인 PID동조 방법을 이용하였고, Ho^[2]는 PID제어기 파라미터를 이득 여유(gain margin)와 위상 여유(phase margin)에 관한 식으로 표현함으로써, 주어진 이득여유와 위상여유를 만족시키는 PID 설계변수를 선정하였다. 그러나 최근에 Suh와 Yang^[3]의 목표함수(target function)를 이용한 LQ-PID 방법론이 제시되었다.

따라서 본 논문에서는 시간 지연이 있는 시스템에서 기존의 대표적 방법론과 Suh와 Yang^[3]의 LQ-PID 방법론을 시뮬레이션을 통하여 서로의 성능을 비교해 보고자 한다.

2. 본 문

2.1 LQ-PID method (Suh와 Yang^[3], 2005)

2.1.1 LQR formulation

LQ-PID제어기는 PID제어기의 설계변수를 LQR방법론을 이용하여 설정한 것이다. LQR 제어기는 state feedback 형태로 설계된 제어기로서 이득 여유와 60° 위상 여유가 보장되는 강인한 특성을 가지고 있다. 플랜트의 상태 방정식

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1)$$

초기상태 $X(0)$, $X(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$
시스템 [A,B]안정가능

LQR의 가격함수 J

$$J[u(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [X(t)^T QX(t) + ru(t)^T u(t)] dt \quad (2)$$

Q는 양의 반한정 대칭행렬인 상태가중행렬

R은 양의 한정 대칭행렬인 제어가중행렬

여기서 LQR문제는 (1)의 구속조건 아래에서 가결함수 J를 최소화하는 u(t)를 찾는 문제가 되고, u(t)를 피드백형태로 실현시킬 수 있다.

$$u(t) = -GX(t) \quad (3)$$

제어게인행렬 G는

$$G = R^{-1}B^T K \quad (4)$$

K는 양의 반한정 대칭행렬로서 다음과 같은 제어대수 Riccati식의 유일한 해이다.

$$KA + A^T K + Q - KBR^{-1}B^T K = 0 \quad (5)$$

위에서 LQR 설계는 상태 가중행렬 Q와 제어가중행렬 R을 선정하는 문제가 된다.

2.1.2 LQ-PID 설계방법

3차의 목적함수(target function) 나타내면

$$F(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + \alpha\omega_n s^2 + \beta\omega_n^2 s + \omega_n^3} \quad (6)$$

(6)식을 설계변수인 p, r을 이용하여 나타내면

저자 소개

*한양대학교 전기공학과 碩士課程

**한양대학교 전기제어생체공학부 教授 · 교신책임자

$$F(s) = \frac{\omega_n^3}{\left(s + \frac{w_n}{r}\right)(s^2 + p\omega_n s + r\omega_n^2)} \quad (7)$$

설계변수와 weighting factors와의 관계는 다음과 같다.

$$\omega_n^3 = \frac{c\sqrt{\rho Q_{11}}}{\rho} \quad (8)$$

$$\left(r + \frac{p}{r}\right)\omega_n^2 = b + \frac{c^2}{\rho} K_{21} \quad (9)$$

$$\left(p + \frac{1}{r}\right)\omega_n = a + \frac{c^2}{\rho} \left(\sqrt{\frac{2\rho}{c^2} K_{21} + \frac{\rho}{c^2} Q_{22} + \frac{a^2}{c^4} \rho^2} - \frac{a}{c^2} \rho \right) \quad (10)$$

상태가중행렬 Q를 구하면

$$Q_{11} = \frac{\rho}{c^2} \omega_n^6 \quad (11)$$

$$Q_{11} = \frac{\rho}{c^2} \left[\left(r + \frac{p}{r}\right) \omega_n^4 - b^2 \right] \quad (12)$$

$$-2\omega_n^3 \sqrt{\frac{\rho}{c^4} \left\{ 2 \left[\left(r + \frac{p}{r}\right) \omega_n^2 - b \right] + a^2 \right\} + \frac{\rho}{c^2} Q_{22}}$$

$$Q_{22} = \frac{\rho}{c^2} \left[\left(p + \frac{1}{r}\right) \omega_n \right]^2 - \frac{\rho}{c^2} \left\{ a^2 + 2 \left[\left(r + \frac{p}{r}\right) \omega_n^2 - b \right] \right\} \quad (13)$$

위의 식들에 의해 Q를 구하고, (5)의 Riccati방정식을 풀어서 K행렬을 구하면 PID설계변수로 이루어진 행렬이 된다.

2.2. Lee and Sung method (Lee와 Sung^[1], 1996)

다음과 같은 시간지연 상태 방정식을 고려한다.

$$\tau_m^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\tau_m \zeta_m \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_m u(t - \theta_m) \quad (14)$$

(τ_m 은 모델에 대한 시상수, ζ_m 은 제동비,

θ_m 은 모델의 시간지연)

(14)와 같은 시간 지연 모델식에서 Lee and Sung이 제안한 방법에 의하면 PID제어기 설계변수들은 다음과 같이

$$\text{정해진다. } K_p = k_c, K_i = \frac{k_c}{\tau_i}, K_d = k_c \tau_d \quad (15)$$

static gain k_m 과 비례게인 k_c 는 ξ_m 크기에 따라 다음 두 가지의 경우로 정해진다.

$$k_m k_c = -0.04 + \left\{ 0.333 + 0.949 \left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right)^{-0.963} \right\} \xi_m \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow \xi_m \leq 0.9$$

$$k_m k_c = -0.544 + 0.308 \left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right) + 1.408 \left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right)^{-0.832} \xi_m \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \xi_m > 0.9$$

τ_i 는 적분시간, τ_m 은 모델에 대한 시상수, τ_d 는 미분시간

$$\frac{\tau_i}{\tau_m} = \left\{ 2.055 + 0.072 \left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right) \right\} \xi_m, \frac{\theta_m}{\tau_m} \leq 1 \quad (18)$$

$$\frac{\tau_i}{\tau_m} = \left\{ 1.768 + 0.392 \left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right) \right\} \xi_m, \frac{\theta_m}{\tau_m} > 1 \quad (19)$$

$$\frac{\tau_m}{\tau_d} = \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{\left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right)^{1.060} \xi_m}{0.870} \right) \right\} \left\{ 0.55 + 1.683 \left(\frac{\theta_m}{\tau_m} \right)^{-1.080} \right\} \quad (20)$$

(16),(17)식에서 k_c 를, (18),(19)식에서 τ_i 를, (20)식에서 τ_d 를 구하면 최종 PID 설계변수 K_p, K_i, K_d 를 구할 수 있다.

2.3 Ho's GPM method (Ho^[2], 1998)

다음과 같은 시간지연 상태 방정식을 고려한다.

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(s+1)} e^{-Ls} \quad (21)$$

PID 제어기의 일반적인 표현은

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) \quad (22)$$

모델식에 대한 gain margin과 Phase margin을 구하면

$$\text{Phase margin } \phi_m = \arg [G_c(j\omega) G_p(j\omega)] + \pi \quad (23)$$

$$\text{gain margin } A_m = \frac{1}{|G_c(j\omega_p) G_p(j\omega_p)|} \quad (24)$$

크기가 고정된 step응답으로부터 시스템의 성능지수인 ISE(integral of the absolute magnitude of the error)를 최소화 하는 PID 설계변수는 (25)-(27) 관계를 갖는다.

ISE-GPM-load

$$K_c = \frac{1.7022}{K_p} A_m^{-0.8432} \phi_m^{-0.116} \left(\frac{L}{\tau} \right)^{-0.908} \quad (25)$$

$$T_i = 1.2497 \tau A_m^{-0.8432} \phi_m^{-1.0082} \left(\frac{L}{\tau} \right)^{0.3678} \quad (26)$$

$$T_d = 0.4763 \tau A_m^{-0.0961} \phi_m^{-0.328} \left(\frac{L}{\tau} \right)^{1.0317} \quad (27)$$

설정값에서 변화하는 스텝에 대한 시스템의 성능지수인 ISE(integral of the absolute magnitude of the error)를 최소화 하는 PID 설계변수는 (28)-(30) 관계를 갖는다.

ISE-GPM-setpoint

$$K_c = \frac{1.8578}{K_p} A_m^{-0.9087} \phi_m^{-0.0821} \left(\frac{L}{\tau} \right)^{-0.9471} \quad (28)$$

$$T_i = \frac{0.0211 \tau \left(1 + 0.3289 A_m + 6.4572 \phi_m + 25.1914 \left(\frac{L}{\tau} \right) \right)}{1 + 0.0625 A_m - 0.8079 \phi_m + 0.347 \left(\frac{L}{\tau} \right)} \quad (29)$$

$$T_d = 0.4899 \tau A_m^{-0.0845} \phi_m^{0.1457} \left(\frac{L}{\tau} \right)^{1.0264} \quad (30)$$

위의 두 경우 모두 최종 PID제어기 설계변수는 다음과 같이 나타 낼 수 있다.

$$K_p = K_c, K_i = \frac{K_c}{T_i}, K_d = K_c T_d \quad (31)$$

3. 실 험

3.1 아래와 같은 시스템을 고려하자.

$$G(s) = \frac{\exp(-0.15s)}{(s+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)}$$

위의 시스템에 대해서 3가지 방법으로 설계된 PID 설계변수는 표1.과 같다.

표1. PID 제어기 설계 파라미터 비교

Table 1. Compare with the PID controller design parameters

	K_p	K_i	K_d
LQ-PID	2.352	1.437	1.1607
GPM	2.536	1.835	1.413
Lee & Sung	2.0035	1.1527	0.8256

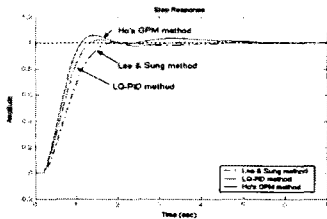


그림 1. 페루프 스텝응답 비교

Figure 1. The step responses of the closed loop transfer function

위 시뮬레이션 결과에 대한 성능요소들을 비교해 보면 다음 표2.와 같이 나타난다.

표 2. PID제어기 스텝응답에 대한 정량적 비교

Table 2. Compare with the step responses of PID controllers

	오버슈트	상승시간	정착시간
LQ-PID	2.22	0.759	2.75
GPM	5.63	0.643	4.24
Lee & Sung	0.558	0.979	3.28

3.2 다음과 같은 시스템을 고려하자.

$$G(s) = \frac{\exp(-s)}{s^2+4s+3}$$

위의 시스템에 대해서 3가지 방법으로 설계된 PID 설계변수는 표3.과 같다.

표3. PID 제어기 설계 파라미터 비교

Table 3. Compare with the PID controller design parameters

	K_p	K_i	K_d
LQ-PID	2.573	1.67	0.943
GPM	2.171	1.614	0.616
Lee & Sung	1.114	1.2403	0.655

그림 2. 페루프 스텝응답 비교

Figure 2. The step responses of the closed loop transfer function

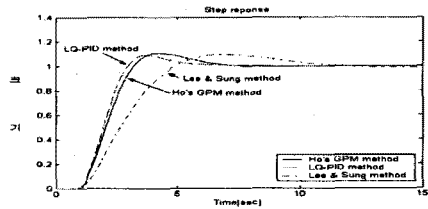


표 4. PID제어기시스템응답에 대한 정량적 비교

Table 4. Compare with the step responses of PID controllers

	오버슈트	상승시간	정착시간
LQ-PID	1.03	1.42	4.64
GPM	1.05	1.72	5.99
Lee & Sung	1.02	2.03	8.45

위의 시뮬레이션 결과를 보면 오버슈트는 Lee & Sung 방법이 가장 낮게 나왔고, 응답속도는 LQ-PID 방법론이 가장 빠르게 나타났다.

4. 결 론

위의 두 시스템에 대한 시뮬레이션 결과상에서 나타나는 것처럼 Lee & Sung 방법론은 응답속도가 늦고, Ho의 GPM 방법론은 오버슈트가 높은 수치를 나타냈다. 따라서 최종적으로 시간지연 시스템에 대하여 응답속도와 오버슈트를 종합적으로 고려할 때 Suh와 Yang이 제안한 목표함수를 이용한 LQ-PID 방법론이 이전의 방법론에 비해서 보다 좋은 튜닝 효과를 보이고 있는 것으로 나타났다.

5. 참 고 문 헌

- [1] Sung, S. W. , O, J. M. and I. B. Lee ; "Automatic tuning of PID controller using second order puls time delay model", Journal of Chemical Engineering of Japan, Vol. 29, No. 6, 1996.
- [2] Ho, W. K. , LIM, K. W. and WEN XU ; "Optimal Gain and Phase Margin Tuning for PID Controllers", Automatica, Vol. 34, No. 8, pp. 1009-1014, 1998
- [3] Suh, B. S. and J. H. Yang ; "A Tuning of PID Regulator via LQR Approach", Journal of Chemical Engineering of Japan, Vol. 5, pp. 344-356, 2005.
- [4] Park, T. S. and B. S. Suh ; "LQ-PID Controller Tuning for a Second-Order System with Time delay", 대한 전자공학회 추계학술대회, pp67-70, December, 2002
- [5] Lee, J. T. and S. W. Sung ; "Comparison of Two Identification Methods for PID Controller Tuning", AIChE Journal, Vol. 39, No.4, April, 1993
- [6] John, C. D. , Bruce, A. F. and R. T. Allen, Feedback Control Theory, Singapore Inc., 1992
- [7] Wang, Q. G. Tan, K. K. and C. C. Hang, Advances in PID Control, Springer, 1999
- [8] 김용수, Matlab 입문과 활용, 높이깊이, 2001