

압전 수정진동자의 설계민감도 해석과 위상 최적설계

Design Sensitivity Analysis and Topology Optimization of Piezoelectric Crystal Resonators

하 윤 도*
Ha, Youndoh

조 선 호**
Cho, Seonho

정 상 섭***
Jung, Sangsub

ABSTRACT

Using higher order Mindlin plates and piezoelectric materials, eigenvalue problems are considered. Since piezoelectric crystal resonators produce a proper amount of electric signal for a thickness-shear frequency, the objective is to decouple the thickness-shear mode from the others. Design variables are the bulk material densities corresponding to the mass of masking plates for electrodes. The design sensitivity expressions for the thickness-shear frequency and mode shape vector are derived using direct differentiation method(DDM). Using the developed design sensitivity analysis (DSA) method, we formulate a topology optimization problem whose objective function is to maximize the thickness-shear component of strain energy density at the thickness-shear mode. Constraints are the allowable volume and area of masking plate. Numerical examples show that the optimal design yields an improved mode shape and thickness-shear energy.

1. 서 론

압전 수정진동자(Piezoelectric Crystal Resonator)는 설계주파수에서의 두께방향 전단 진동모드(Thickness Shear Vibration Mode)를 통해 요구되는 전기적 신호를 발생시켜야 한다. 그러나 압전재료 수정판은 부도체이므로 전기적 신호를 얻기 위해서 수정판의 양면에 동일한 모양으로 얇은 층의 전극(마스킹)을 도금한다. 전극경은 일반적으로 수정진동자의 진동에 방해가 되지 않고 전기적 신호만 검출할 수 있도록 연성이 좋은 금이나 은을 사용하기 때문에, 전극경에 의한 전기적인 영향은 미미하며, 기계적인 영향도 부가질량에 의한 영향이 지배적이다. 전극경에 대한 연구는 여러 학자들에 의해 연구되어 왔다^{(1),(2),(3)}. 현재까지는 마스킹 형상을 정하기 위해 설계자의 경험과 실험값들에만 의존하고 있기 때문에 적절한 형상을 얻기가 용이하지 않았다. 따라서 본 연구에서는 수정진동자에 대하여 위상최적설계 기법을 적용하여 최적의 마스킹 형상을 찾아내는 방법을 제안하였다.

고차 Mindlin 판이론에 기반한 유한요소법을 통해 압전 수정진동자의 수치적 해석을 수행하였다. 압전 수정진동자는 얇은 판이면서 두께방향의 전단변형을 해석해야 하기 때문에 변형을 두께방향으로

* 서울대학교 조선해양공학과 박사과정

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과 부교수

*** (주) 빛샘정보통신 대표이사

고차 보간할 수 있는 고차 Mindlin 판이론을 도입하였다. 위상최적설계 기법과 결합하여 최적의 기계, 전기적 성능을 발휘하는 마스크 형상을 얻기 위해서는 목적하는 성능함수의 설계구배가 필수적이다. 따라서 본 연구에서는 연속체 기반 설계민감도 해석을 통해 보다 효율적이고 정확하게 설계구배를 계산함으로써 효율적인 위상최적설계가 가능하게 하였다.

2. 고차 Mindlin 판 이론

그림 1과 같이 표현되는 판요소를 고려한다. x_2 는 두께방향 좌표계이고, x_1 과 x_3 는 중심면 (Midsurface)에서의 좌표계를 의미한다. $2b$ 와 $2t$ 는 각각 수정판의 두께와 수정판 한 면에 마스크된 전극경의 두께를 의미한다.

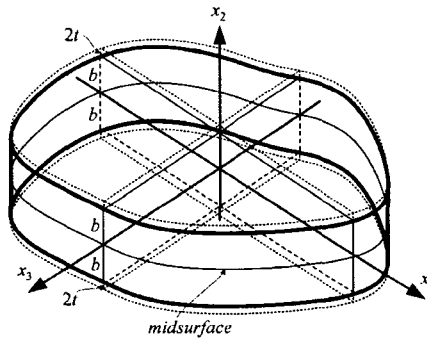


그림 1 고차 Mindlin 판

고차 Mindlin 판 이론⁽⁴⁾에서는 기계적 변위와 전기적 포텐셜을 두께방향으로 무한급수전개를 하여 다음과 같이 표현한다.

$$z_j(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0} z_j^{(n)}(x_1, x_3) x_2^n, \quad (1)$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{n=0} \phi^{(n)}(x_1, x_3) x_2^n, \quad (2)$$

여기서 $z_j^{(n)}$ 와 $\phi^{(n)}$ 는 각각 기계적 변위와 전기적 포텐셜의 2차원 n 차 요소가 된다. 변형율-변위 관계식과 전기장-포텐셜 관계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_{ij}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(z_{j,i} + z_{i,j}) = \sum_n S_{ij}^{(n)}(\mathbf{z}) x_2^n, \quad (3)$$

$$E_i(\phi) = -\phi_{,i} = \sum_n E_i^{(n)}(\phi) x_2^n, \quad (4)$$

여기서 $S_{ij}^{(n)}(\mathbf{z})$ 과 $E_i^{(n)}(\phi)$ 는 각각 기계적 변형율과 전기장으로 다음 식으로 나타난다.

$$S_{ij}^{(n)}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}[z_{j,i}^{(n)} + z_{i,j}^{(n)} + (n+1)(\delta_{i2} z_j^{(n+1)} + \delta_{2j} z_i^{(n+1)})], \quad (5)$$

$$E_i^{(n)}(\phi) = -\phi_{,i}^{(n)} - (n+1)\delta_{i2}\phi^{(n+1)}. \quad (6)$$

2차원 선형 압전 구성방정식은 다음과 같다.

$$T_{ij}(\mathbf{z}, \phi) = c_{ijkl} S_{kl}(\mathbf{z}) - e_{kij} E_k(\phi), \quad (7)$$

$$D_i(\mathbf{z}, \phi) = e_{ijk} S_{jk}(\mathbf{z}) + \varepsilon_{ij} E_j(\phi), \quad (8)$$

n 차 기계적 응력과 전기적 변위는 다음 식으로 표현된다.

$$T_{ij}^{(n)}(\mathbf{z}, \phi) = \int_{-b}^b x_2^n T_{ij}(\mathbf{z}, \phi) dx_2 = \sum_{m=0}^b B_{mn} (c_{ijkl} S_{kl}^{(m)}(\mathbf{z}) - e_{kij} E_k^{(m)}(\phi)), \quad (9)$$

$$D_i^{(n)}(\mathbf{z}, \phi) = \int_{-b}^b x_2^n D_i(\mathbf{z}, \phi) dx_2 = \sum_{m=0}^b B_{mn} (e_{ijk} S_{jk}^{(m)}(\mathbf{z}) + \varepsilon_{ij} E_j^{(m)}(\phi)), \quad (10)$$

여기서 B_{mn} 은 두께방향 적분에 의해 나타나는 적분상수로써 다음과 같다.

$$B_{mn} = \begin{cases} \frac{2b^{m+n+1}}{m+n+1}, & m+n = \text{even}, \\ 0, & m+n = \text{odd}. \end{cases} \quad (11)$$

마스킹에 의한 영향은 부가적인 질량의 효과가 지배적이기 때문에 평형방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$T_{ij,i} = \rho[1 + (m+n+1)R]z_j, \quad (12)$$

$$D_{i,i} = 0. \quad (13)$$

식 (12), (13)으로부터 유도되는 2차원 변분방정식은 다음과 같다.

$$\sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} (c_{ijkl} S_{kl}^{(m)}(\mathbf{z}) - e_{kij} E_k^{(m)}(\phi)) S_{ij}^{(n)}(\bar{\mathbf{z}}) d\Omega = \lambda \sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} \rho[1 + (m+n+1)R] z_j^{(m)} \bar{z}_j^{(n)} d\Omega, \quad (14)$$

$$\sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} (e_{ijk} S_{jk}^{(m)}(\mathbf{z}) + \varepsilon_{ij} E_j^{(m)}(\phi)) E_i^{(n)}(\bar{\phi}) d\Omega = 0, \quad (15)$$

여기서 ρ 는 수정판의 밀도를 의미하며, Ω 는 판의 중심면을 의미한다. 또한 고유치 λ 는 고유진동수 ω 의 제곱수를 의미하며, $\bar{\mathbf{z}}$ 와 $\bar{\phi}$ 는 각각 \mathbf{z} 와 ϕ 의 변분을 의미한다. R 은 전극경과 수정판의 질량비로 다음과 같으며 μ 는 전극경의 밀도가 된다.

$$R = \frac{2t\mu}{b\rho}, \quad (16)$$

식 (14), (15)에서 \mathbf{z} 와 ϕ 를 일반화된 변위장으로 표현하고 유한요소로 이산화하면 일반화된 유한요소 정식화가 가능하다⁽⁵⁾.

$$\bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{K} \mathbf{y} = \lambda \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{M} \mathbf{y}, \quad (17)$$

여기서

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad \mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega. \quad (18)$$

또한 \mathbf{y} 는 이산화된 자유도 벡터로 식(17)과 같은 자유진동문제의 고유벡터가 된다.

3. 연속체 기반 설계 민감도 해석

3.1. 고유치 설계민감도

설계변수 \mathbf{u} 에 대해, 식 (17)은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$a_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) \equiv \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{K}(\mathbf{u}) \mathbf{y}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{y}}^T \mathbf{M}(\mathbf{u}) \mathbf{y}_i \equiv \lambda_i d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{y}} \in Z. \quad (19)$$

여기서 λ_i 와 \mathbf{y}_i 는 i 번째 고유치와 고유벡터를 의미한다. 균일(Homogeneous) 경계조건을 만족하는 변위벡터공간 Z 는 다음과 같이 정의된다. 여기서 \mathbf{G} 는 경계조건을 부여하며 설계변수에 무관하다.

$$Z = \{\mathbf{y}_i \in R^n : \mathbf{G} \mathbf{y}_i = 0\}, \quad (20)$$

식 (19)의 양변에 1차 변분을 취하고, 연쇄법칙을 적용하면 다음과 같다.

$$a_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}'_i, \bar{\mathbf{y}}) - \lambda_i d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}'_i, \bar{\mathbf{y}}) = \lambda'_i d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) + \lambda_i d'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) - a'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{y}} \in Z. \quad (21)$$

식 (21)은 모든 $\bar{\mathbf{y}} \in Z$ 에 대해 성립하므로, $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_i$ 로 두고 $a_{\mathbf{u}}(\bullet, \bullet)$ 과 $d_{\mathbf{u}}(\bullet, \bullet)$ 의 대칭성을 고려하여 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\lambda'_i d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) = \lambda_i d'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) - a'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) - [a_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}'_i) - \lambda_i d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}'_i)]. \quad (22)$$

또한 $\mathbf{y}'_i \in Z$ 이므로, 식 (22) 우항의 대괄호 항은 0이 된다. 따라서 정규화 조건 $d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \delta_{ij}$ 을 적용하면 i 번째 고유치의 설계민감도를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\lambda'_i = a'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) - \lambda_i d'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i). \quad (23)$$

3.2. 고유벡터 설계민감도

n 자유도계에서 고유벡터의 설계민감도는 전체 고유벡터의 선형합으로 표현이 가능하다⁽⁶⁾.

$$\mathbf{y}'_i = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k. \quad (24)$$

여기서 c_k 는 임의의 상수가 된다. 먼저 $c_k (k \neq i)$ 를 계산하기 위해 식 (24)을 식 (21)에 대입하면 다음과 같다.

$$a_{\mathbf{u}}\left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k, \bar{\mathbf{y}}\right) - \lambda_i d_{\mathbf{u}}\left(\sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_k, \bar{\mathbf{y}}\right) = \lambda'_i d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) + \lambda_i d'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) - a'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \bar{\mathbf{y}}) \text{ for all } \bar{\mathbf{y}} \in Z. \quad (25)$$

식 (25)는 모든 $\bar{\mathbf{y}} \in Z$ 에 대해 성립하므로 $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_m (m \neq i)$ 로 두고 정규화 조건 $a_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ 과 $d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \delta_{ij}$ 을 적용하면, $c_k (k \neq i)$ 를 계산할 수 있다.

$$c_k = -\frac{a'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_k) - \lambda_i d'_{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_k)}{\lambda_k - \lambda_i}, \quad k \neq i. \quad (26)$$

따라서, 식 (24)는 다음과 같이 분리된다.

$$\mathbf{y}'_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n c_k \mathbf{y}_k + c_i \mathbf{y}_i. \quad (27)$$

다음으로 c_i 를 구하기 위해 $d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) = 1$ 을 설계변수에 대해 변분을 취한다.

$$2d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}'_i, \mathbf{y}_i) + d'_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) = 0. \quad (28)$$

식 (28)에 식 (27)을 대입하고 $d_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \delta_{ij}$ 을 적용하면, c_i 는 다음과 같다.

$$c_i = -\frac{1}{2}d'_{\mathbf{u}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i). \quad (29)$$

4. 위상 최적설계 정식화

압전 수정진동자는 두께방향 전단진동으로부터 전기적 신호를 검출하기 위해서 사용되므로, 전기적 신호를 보다 명확하게 얻어내기 위해서는 전단진동이 지배적인 모드형상을 구현해야 한다. 이를 위해서 전단변형에 의한 에너지를 최대화하도록 위상최적설계 문제를 다음과 같이 구성한다.

$$\text{Maximize } \psi = \sum_n \sum_m B_{mn} \int_{\Omega} (c_{12kl} S_{kl}^{(m)}(\mathbf{z}) - e_{k12} E_k^{(m)}(\phi)) S_{12}^{(n)}(\mathbf{z}) d\Omega, \quad (30)$$

$$\text{Subject to } \int_{\Omega} u d\Omega \geq V_0 \text{ and } \int_{\Omega(u \geq 0.7)} u d\Omega \geq V_1. \quad (31)$$

여기서 ψ , u 는 각각 전단 변형에너지와 정규 재료밀도 함수를 뜻한다. 또한 첫번째 제약조건을 전극경에 의해 발생하는 부가질량이 전단변형을 구속하기 때문에 최저 사용 재료량 V_0 과 최저 집중 사용재료량 V_1 을 부여해서 마스킹 형상을 유지하도록 한다. 설계 변수는 각 요소의 전극경의 밀도와 관련된 재료밀도 함수이다.

$$\mu_i = u_i^P \mu_0, \quad (i = 1, 2, \dots, NE). \quad (32)$$

P 는 집중된 재료분포를 얻기 위한 벌칙인자(Penalty Parameter)이다. 수치적 특이점 (Singularity)을 피하기 위해 최소점 u_{\min} 을 부여하였다.

$$0 < u_{\min} \leq u_i \leq 1. \quad (33)$$

목적함수를 설계변수에 대해 미분을 취해서 얻어진 목적함수의 설계민감도는 다음과 같다.

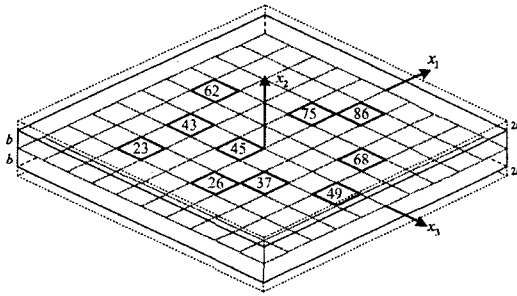
$$\frac{d\psi}{d\mathbf{u}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{u}} + \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{y}_i} \frac{d\mathbf{y}_i}{d\mathbf{u}}. \quad (34)$$

여기서 변형에너지 ψ 는 설계변수에 대해 명시적 종속성이 없으므로 $\partial\psi/\partial\mathbf{u} = 0$ 이고, $d\mathbf{y}_i/d\mathbf{u}$ 는 고유벡터의 설계민감도이다.

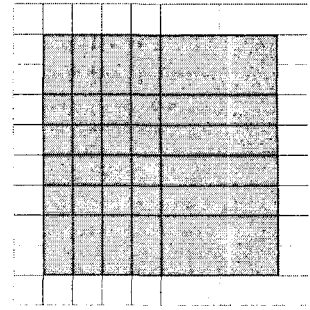
5. 수치예제

5.1. 설계 민감도 해석 검증

설계민감도 식(34)의 정확성 및 효율성을 알아보자. 설계 민감도가 정확하게 구해졌는지 확인하기 위해서, 유한차분법을 이용하여 검증한다. 그림 2(a)와 같이 너비와 폭이 각각 $1750\mu\text{m}$ 이고 두께(2b)가 $100\mu\text{m}$ 인 수정판을 고려한다.



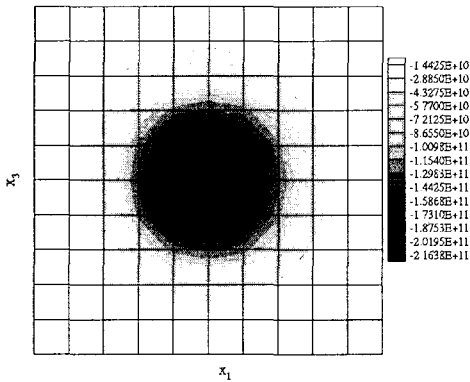
(a) 수정판 모델과 설계민감도 검증을 위해 선택된 요소들



(b) 설계영역

그림 2 수정판 모델과 설계영역

수정판과 전극경의 밀도는 각각 $2649 \times 10^{-18} \text{ kg}/(\mu\text{m})^3$ 와 $1049 \times 10^{-8} \text{ kg}/(\mu\text{m})^3$ 이다. 사용된 전극경은 은(Ag, silver)이며, 두께 ($2t$)는 $10^{-4} \mu\text{m}$ 이다. 모델은 100개의 고차 Mindlin 판요소로 구성되어 있다. 설계 변수는 전극경의 밀도와 연관이 되는 각 요소의 정규 재료밀도 함수 u 이며, 그림 2(b)에 나타내듯이 회색부분만 설계영역으로 설정한다. 설계영역에 아닌 부분은 전극경이 마스킹되지 않는다. 성능함수는 위상최적설계의 목적함수와 동일하게 전단 변형에너지 ψ 로 하였다. 각 요소의 정규 재료밀도 함수에 대한 설계민감도 해석 결과를 그림 3(a)에 나타내고, 설계민감도 해석값과 유한차분법의 결과를 그림 3(b)에서 비교하였다.



(a) 설계민감도 분포

| 설계변수 | $\frac{d\psi}{du_i} (\times 10^{10})$ | $\frac{\Delta\psi}{\Delta u_i} (\times 10^{10})$ | $\frac{\Delta\psi}{\Delta u_i} / \frac{d\psi}{du_i} (\%)$ |
|----------|---------------------------------------|--|---|
| u_{23} | -4.2737 | -4.3051 | 100.7349 |
| u_{26} | -8.6935 | -8.7603 | 100.7684 |
| u_{37} | -13.956 | -14.070 | 100.8164 |
| u_{43} | -9.1668 | -9.2415 | 100.8152 |
| u_{45} | -23.080 | -23.268 | 100.8146 |
| u_{49} | -2.7403 | -2.7622 | 100.7975 |
| u_{62} | -3.2360 | -3.2607 | 100.7640 |
| u_{68} | -7.1927 | -7.2497 | 100.7926 |
| u_{75} | -8.6935 | -8.7603 | 100.7687 |
| u_{86} | -4.4124 | -4.4411 | 100.6492 |

(b) 유한차분법과의 비교 검증

그림 3 설계민감도의 분포와 검증

$d\psi/du_i$ 은 설계민감도해석을 통해 해석적으로 구한 결과를 $\Delta\psi/\Delta u_i$ 는 유한차분법을 통해 구한 결과를 의미한다. 유한차분법의 결과와 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 전체 설계변수에 대한 설계민감도를 구하는데 유한차분법은 약 8883.2초가 걸린 반면, 해석적인 방법은 약 0.15%정도인 13.7초가 소요되어 매우 효율적이며 정확함을 알 수 있다 (Xeon CPU 2.4GHz, 2GB RAM 기준).

5.2. 압전 수정진동자의 위상 최적설계

그림 4와 같은 196개의 요소로 이루어진 수정판을 고려한다. 회색부분은 설계영역을 의미하며, 그림 2(a)의 수정판과 동일한 크기와 물성치를 가진다. 두 모델에 공통적으로 V_0 와 V_1 는 각각 전체 설계 영역의 40%, 20%로 설정하였다. 모델 A의 경우는 벌칙인자 P 는 1, 전극경의 두께 $2t$ 는 $10^{-4} \mu m$ 로 설정하고, 모델 B는 P 는 2, $2t$ 는 $10^{-6} \mu m$ 로 설정하였다.

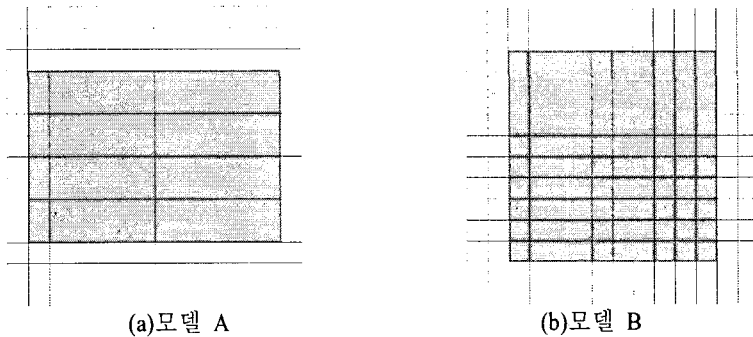


그림 4 위상최적설계를 위한 수정판 모델과 설계영역

위상최적설계 결과는 그림 5와 같다. 두 모델에 공통적으로 전단 변형에너지를 높이기 위해서 전극경이 중앙으로 집중되어 배치되는 것을 확인할 수 있다. 이미 상용화되어 사용되고 있는 대부분의 압전 수정진동자들에 마스크된 전극경이 수정판의 중앙부에 집중적으로 분포하는 형상을 보이고 있는 것과 비교 하더라도 위상 최적설계가 타당한 방향을 제시하고 있는 것을 알 수 있다. 또한 위상 최적설계를 이용하면 해석적으로 전극경의 형상을 결정하므로 보다 높은 성능의 형상을 결정할 수 있다.

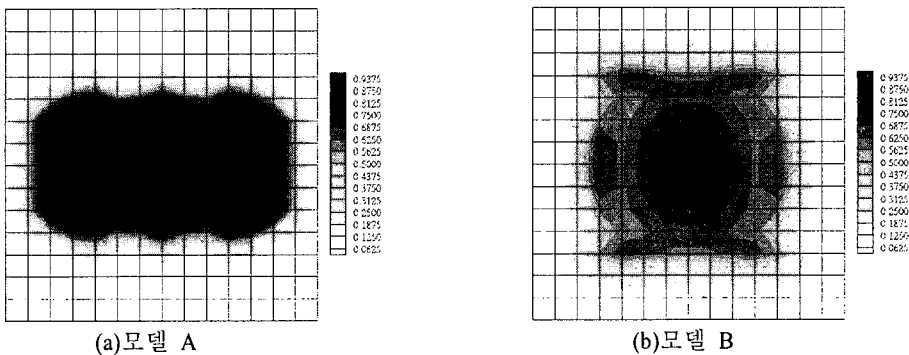
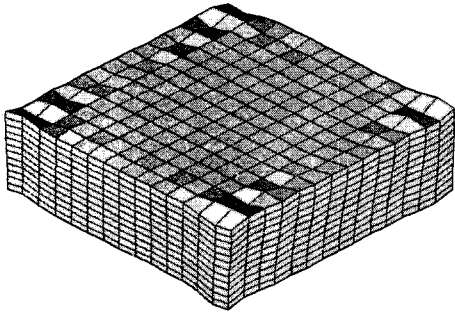


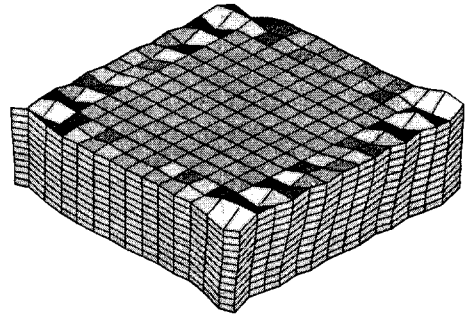
그림 5 위상최적설계 결과

위상 최적설계에 의한 성능의 개선 효과를 확인하기 위해 모델 B에 대해서 모드 형상과 고유진동수, 전단 변형에너지를 그림 6에서 비교하였다. 초기 재료분포에서의 모드형상보다 위상 최적설계 후의 모드형상이 전단변형을 좀더 지배적으로 나타내고 있음을 확인할 수 있다. 고유진동수는 거의 변화가 없

지만, 전단 변형에너지는 약 2.6%정도 개선된 것을 알 수 있다. 고유진동수는 설계주파수에 해당하는 것으로 위상최적설계에 의한 변화가 거의 없어야 하므로 타당한 방향임을 알 수 있다.



(a) 최적화 전: 고유진동수 110.07 MHz
전단변형에너지 10462.22 J



(b) 최적화 후: 고유진동수 109.93 MHz
전단변형에너지 10743.02 J

그림 6 위상 최적설계 전후의 성능개선

6. 결론

본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 압전 수정진동자의 진동해석을 수행하고, 연속체 기반의 설계민감도 방정식을 유도하고 유한차분법과 비교하여 효율성 및 정확성을 확인하였다. 또한 유도된 설계민감도를 위상 최적설계에 적용하였다. 수치 예제를 통해서, 위상 최적설계를 통해 설계주파수를 변경하지 않으면서 전단변형모드가 보다 명확하게 나올 수 있는 결과를 제시할 수 있음을 확인하였다. 또한 설계영역에 따라서 다양한 위상을 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

참고 문헌

1. Mindlin, R.D., "High frequency vibrations of plated, crystal plates," *Progress in Applied Mechanics*, Macmillan, New York, 1963, pp. 73~84
2. Tiersten, H.F., *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*, Plenum Press, New York, 1969
3. Lee, P.C.Y., Syngellakis, S., Hou, J.P., "A two-dimensional theory for high-frequency vibrations of piezoelectric crystal plates with or without electrodes," *Journal of Applied Physics*, Vol.61, No.4, 1987, pp.1249~1262
4. Mindlin, R.D., "Frequencies of piezoelectrically forced vibrations of electroded, doubly rotated, quartz plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.20, No.2, 1984, pp.141~157
5. J., Wang, Y.K., Yong, T., Imai, "Finite element analysis of piezoelectric vibrations of quartz plate resonators with higher-order plate theory," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.36, 1999, pp.2303~2319
6. Nelson, R.B., "Simplified Calculation of Eigenvector Derivative," *AIAA Journal*, Vol.14, No.9, 1986, pp.823~832