

서브피코뉴톤 양자 분동

최재혁*(한국표준과학연구원), 최만수(고려대학교), 김민석, 박연규(한국표준과학연구원)

Sub-pico-Newton Quantum Weight

J.-H. Choi(KRISS), M. S. Choi(Physics Dept., KU), M.-S. Kim(KRISS), Y.-K. Park(KRISS)

ABSTRACT

We suggest flux quantum-based mechanism for force realization in the sub-pico-Newton range. By controlling the number of flux quantum in a superconducting ring, a force can be created as an integer multiple of a constant force step. For a 50 nm-thick Nb ring with the inner and outer radii of 5 μm and 10 μm , respectively, the force step is estimated to be 165 fN, assuming the magnetic field gradient of 10 T/m. We also estimated a maximum force limit to be 1 ~ 2 pN.

Key Words : Force realization (힘발생), magnetic flux quantum (자속양자), sub-pico-Newton(서브피코뉴톤), superconducting ring(초전도링), and ultra-soft cantilever (초고감도 캔틸레버)

1. 서론

측정감도의 괄목할만한 발달에 힘입어 힘측정은 첨단 나노/바이오 연구에서 매우 유용하고 필수적인 프로브로 인식되고 있으며, 단백질 폴딩 연구, 고집적 데이터저장, 나노스케일 이미징, 나노인텐테이션, 비뉴턴식 중력 측정에 걸쳐 널리 이용되고 있다.^{1,2} 힘측정 영역은 점점 더 확장되어 자기공명 힘현미경에서 보는 것처럼 에토뉴톤(10^{-18} N)에 이르고 있으나,³ SI-소급이 가능한 힘표준이나 힘발생 체계가 1 N 이하에서조차 확립되어 있지 않은 상황이다. 기존의 실하중 방식은 마이크로뉴톤 이하에서 유효하지 않으며, 최근 NIST에서는 10 마이크로뉴톤 이하의 힘을 전기적 방식으로 생성시키는 Microforce Realization and Measurement Project에 착수했다.⁴ 전압이 걸린 커패시터의 두전극 사이에 작용하는 힘을 이용하는 것으로, 힘이 전압 등 전기적 단위로 표현되며 이들 값은 조셉슨 효과나 분수홀 효과에 의해 그 표준이 제공되고 있다. 그러나, 나노뉴톤, 피코뉴톤 이하의 힘에 대해선 아직까지 힘 구현방식이나 표준방식에 대해 제시된 바가 없다. 덧붙여 강조할 점은 전기적 단위와는 달리 아직까지 양자현상에 직접 기반한 힘 발생방식 또한 제기된 적이 없다는 것이다.

이 논문에서 우리는 초전도링의 자속양자화라는

거시양자현상에 기반한 새로운 개념의 힘발생 방식을 제시하고자 한다. 자속양자의 수를 변화함으로써 힘을 일정 크기인 단위힘의 정수배만큼 증가 혹은 감소시킬 수 있으며 그 단위크기는 대략 서브피코뉴톤 정도이다. 자속양자가 마치 서브피코뉴톤 크기의 분동의 역할을 하는 것으로 볼 수 있는데, 이 양자분동은 인공물이 아니며 SI-소급성을 가지고 각각의 크기가 양자역학적으로 균일하다는 장점을 가지고 있다.

2. 기본원리

그림 1 은 양자기반 힘발생 기술의 개략도이다. 초고감도 캔틸레버 위에 수 마이크로 크기의 초전도링이나 초전도양자간섭(SQUID) 회로가 올려져 있다. 초전도 물질의 임계온도 이하에서는 초전도링이나 SQUID 를 통과하는 자속(magnetic flux)의 크기가 불연속적인 값을 가지는 양자화 현상이 발생한다. 결과적으로 자기모멘트 m 가 특정값의 정수배에 비례하는 성분을 가지게 되며 그 수는 자속양자수에 의해 결정된다.

자기모멘트를 가진 초전도링이 자기장기울기 dB/dz 에 놓이게 되면 힘을 받게 되며, 이를 이용하여 우리는 자속양자수에 비례하는 힘을 발생시킬 수 있다. 이 때 발생한 힘은 초고감도 캔틸레버의

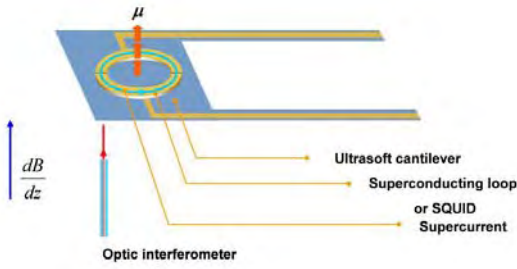


Fig. 1 Schematic of quantum-based force realization

변위를 통해 측정할 수 있고, 캔티레버의 스프링상수를 직접 교정하는 데 이용할 수 있다. 캔티레버의 변위는 광섬유 간섭계를 이용하여 정밀측정할 수 있다. 힘발생을 위한 절차는 초전도링이나 SQUID 이나에 따라 달라지는데, 적절한 절차에 따른 자기장 및 온도 환경 변화를 통해 양자수를 통제할 수 있고, 마치 분동을 추가하듯이 힘을 계단식으로 증가 혹은 감소시킬 수 있다.

3. 초전도링의 자기모멘트

초전도링 또는 SQUID내 양자화된 자속의 크기는 $\Phi = n\phi_0 = nh/2e$ 로 표현되는데, 자속단위양자 ϕ_0 는 기본상수인 플랑크상수 h 와 전자전하 e 에 의해 정의된다. 자속양자 한 개에 해당하는 자기모멘트를 대략 추정해 보자. 링/SQUID의 인덕턴스 추정치 $L = 2\mu_0 R$ ($\mu_0=4\pi \times 10^{-7}$, R : 링 반지름)와 초전류 I_s 에 의한 자기모멘트 $m = I_s \pi R^2$ 를 이용하면, 자속양자에 의한 자기모멘트는 $m_Q = (\pi/2\mu_0)(h/2e)R$ 로 간단히 표현된다. 이 값은 기본상수 h , e 와 길이량 R 에 의해 결정되며, 이들 기본상수와 주파수량에 의해 전압이 결정되는 양자전압표준과 유사성을 가진다. 위 식은 자속양자에 의한 자기모멘트 기여를 직관적으로 보여주지만, 정밀한 힘의 발생을 위해서는 보다 정확한 자기모멘트를 계산할 필요가 있다. 그러나, 수 마이크로 크기 시스템에 대해 이를 계산하는 것은 그리 단순한 문제가 아니다. 초전도체 내부의 3 차원적 전류분포를 Ginzburg-Landau 방정식과 Maxwell 방정식을 동시에 만족시키도록 구해야 하기 때문이다. 본 논문에서는 계산의 편의를 위해 초전도링 경우만을 다루도록 하겠다.

3.1 지배 방정식들

두께 d , 내경 $2a$, 외경 $2b$ 이고 xy 평면에 평행한 초전도링을 고려해보자. 초전도 질서매개변수(order parameter) $\psi = |\psi|\exp(iS)$ 에서 크기의 공간변화가 무시할 수 있을 정도로 작을 때, Ginzburg-Landau 방정식은 다음과 같이 간결해진다.⁵

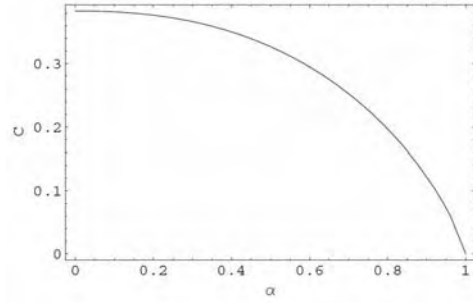


Fig. 2 Coefficient $C(\alpha)$ as a function of α

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = 4\pi \vec{j}$$

$$4\pi \vec{j} = (1/\lambda^2) \left(\phi_0 / 2\pi \vec{\nabla} S - \vec{A} \right)$$

이 때 \vec{A} 는 벡터포텐셜, \vec{j} 는 전류밀도, λ 는 자기장이 초전도체를 침투하는 침투깊이(penetration depth)이다. $d < \lambda$ 인 박막의 경우 \vec{j} 와 λ 가 z 방향으로 상수임을 가정할 수 있고 윗식을 평균할 수 있다.

위 식들을 연립하면 전류밀도 \vec{j} 에 대한 적분방정식으로 표현할 수 있는데 편의상 자속양자에 의한 전류밀도 J_1 과 외부자기장에 의한 유도전류 J_2 로 나누어 보자.

$$\int_a^b dr' Q(r, r') \mu_0 J_v(r') + \Lambda \mu_0 J_v(r) = -D_v(r)$$

$$D_1(r) \equiv n\Phi_0 / 2\pi r$$

$$D_2(r) \equiv A_{\text{ext}}(r) = (1/2)B_{\text{ext}}r$$

$\Lambda = \lambda^2/d$ 는 박막에서의 유효 침투깊이를 나타내며, a , b 는 초전도링의 내부반지름, 외부반지름을 나타낸다.

$$\mu_0 J_v(r) = -(1/\Lambda) [D_v(r) + A_v(r)] \quad (v=1, 2)$$

에 의해 전류밀도와 벡터포텐셜이 연결되어 있다. 커널 $Q(r, r')$ 는 타원적분들로 구성된 해석적인 형식으로 표현된다. 이 적분방정식의 해인 전류밀도의 분포를 구하고 이를 적분하여 궁극적으로 원하는 자기모멘트를 계산할 수 있다.

3.2 폭이 좁은 경우

링의 폭이 좁은 경우, 즉 $b \ll \Lambda$ 경우에는 근사를 통해 전류밀도와 벡터포텐셜의 공간분포를 해석적으로 구할 수 있고, 적분을 통해 다음과 같이 자기모멘트를 얻을 수 있었다.

$$m_Q \approx \frac{\pi}{4} (1 - \alpha^2) \left(\frac{b}{\Lambda} \right) \left[1 - C(\alpha) \frac{b}{\Lambda} \right] \frac{\phi_0 b}{2\pi^2}$$

이 때 $C(\alpha)$ 함수는

$$C(\alpha) \equiv 4[2(1+\alpha^2)E(\alpha^2) + (1-3\alpha^2)K(\alpha^2) - 2(1+\alpha^3)]/9\pi(1-\alpha^2)$$

으로 주어지며, $E(\alpha)$, $K(\alpha)$ 는 각각 1 차, 2 차 타원적 분함수이고, α 는 내경과 외경의 비 즉 a/b 이다. 그림 2 는 자기모멘트를 α 의 함수로 나타낸 것이다.

3.3 일반적인 경우

임의의 링 크기와 자장 침투깊이에 대한 위 적 분방정식의 해석적인 해는 아직 알려져 있지 않다. 최근, Brandt와 Clem은 가중 그리드(weighted grid) 방법을 도입하여 수치적인 해를 구하는 데 성공하였다.⁶ 총 자기모멘트를 두 성분으로 나눌 수 있는데, 자속양자에 의한 성분 m_1 과 외부 자기장에 의한 성분 m_2 이다.

자속양자화 현상에 관계된 m_1 은 자속양자 한 개에 의해 발생하는 자기모멘트 m_Q 의 정수배가 된다. 자기모멘트 스텝 m_Q 는 $\phi_0 b/\mu_0$ 단위로 표시될 때 두가지 비 a/b 와 Λ/b 에만 의존하는 함수이다. 그리고, 외부자기장에 의해 유도되는 성분 m_2 는 초전도링의 반자성에 기인하며 외부자장에 정비례하는 함수이다. 반자성 성분 m_2 는 $\Lambda=0$ 이고 $a/b \rightarrow 0$ 인 극한에서

$$m_2 = \frac{3\pi^2}{128 \tanh^{-1}(a/b) - 1 + \ln 4} \left(\frac{1+a}{b} \right)^3 \left(-\frac{8}{3} \right) b^3 H_a$$

으로 표현된다.

3.4 열적 요동

각 자속양자 상태가 열적요동에 대해 안정한가는 매우 중요한 이슈이다. 왜냐하면 각 상태 사이의 열적 전이는 자속양자의 수 즉 힘 발생을 통제할 수 없게 만들기 때문이다. 양자상태 사이의 에너지장벽(energy barrier)은 자속양자가 초전도 영역에 존재할 때의 내부 에너지와 전자기적 에너지로 근사할 수 있다. 이를 열에너지 $k_B T$ 와 비교하여 안정성을 따질 수 있는데, 4 K의 저온에서는 충분히 안정임이 예측되었다.⁷

4. 초전도링 디자인과 힘 스텝

4.1 초전도링

초전도 전이온도는 초전도체의 종류에 따라 1

K 이하에서 134 K까지 폭넓게 변한다. 저온초전도체인 Nb과 Al의 경우 박막제작이 잘 확립되어 있으며 이를 이용하여 SQUID와 같은 초전도 회로 제작이 양질의 수준으로 이루어져 왔다. 우리의 목적으로는 작동온도가 높아서 상대적으로 온도제어가 쉬운 Nb 물질이 더 선호된다. Nb은 9.25 K의 전이온도를 가지며, 자장침투깊이와 결맞음길이(coherence length)가 각각 50 nm, 39 nm이다.⁸

현재 널리 이용되는 초고감도 캔티레버의 크기를 고려할 때 초전도링의 내부 및 외부 반경을 5 μm , 10 μm 로 잡는 것이 적절하다. 박막 두께를 50 nm 로 할 경우, 실질적 박막 침투깊이가 약 50 nm 가 되며, $\Lambda/b=0.005 \ll 1$, $a/b = 0.5$ 의 길이비를 가진다.

4.2 힘 스텝과 한계

위의 디자인변수를 선택할 때, Brandt와 Clem⁷의 수치결과를 이용하면 단위 자속양자에 의한 자기모멘트 스텝은 $m_Q=1.116\phi_0 b/\mu_0$ 이 되며, 이 때 $\phi_0 b/\mu_0$ 는 $[b/\text{nm}] \times 1.65 \times 10^{-18} \text{ Am}^2$ 이다. 자기장 기울기를 10 T/m로 걸어줄 때, 발생하는 힘은 $1.65 \times 10^{-12} \text{ N}$, 즉 165 fN으로 추정된다. 자속양자수를 조절하므로써 힘의 크기를 165 fN의 정수배 만큼 증감할 수 있다.

현실적으로는 힘의 크기를 무한히 증가시킬 수 없으며, 최대 가능힘은 초전도 물질의 임계전류에 의해 제한된다. 자기모멘트를 증가하기 위해 초전류를 증가시키는 과정에서 임계전류에 이르면 초전도상이 깨어지면서 자기모멘트가 사라지게 된다. 우리가 선택한 Nb 물질의 임계전류밀도는 $10^5 \sim 10^6 \text{ A/cm}^2$ 이며 위 초전도링 디자인의 경우, 임계전류가 수 mA로 예상된다. 이 경우 발생 가능한 힘의 한계는 근사식 $F_{\text{max}} = I_c \pi [(a+b)/2] 2(dB/dz)$ 에 의해 1~4 pN으로 추정된다.

5. 힘 발생 절차

그림 3 에서 보는 것은 각 양자상태 n에 해당하는 총 자기모멘트를 외부자장의 함수로 그린 것이다. 앞에서 언급한 바와 같이 반자성에 의해 자기모멘트가 외부자장에 음으로 비례함을 보인다. 총 자기모멘트가 외부자장에 의한 유도성분 m_2 를 가지므로 자속양자에 의한 성분 m_1 만 분리하기 위해서는 특별히 디자인된 힘 발생절차가 필요하다.

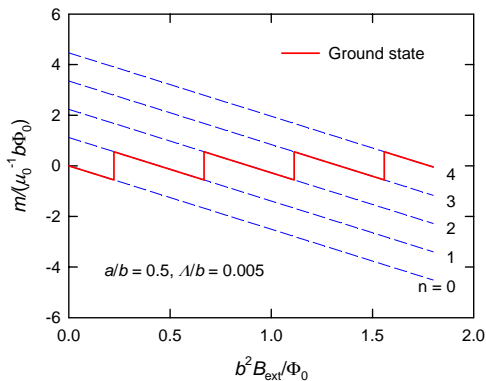


Fig. 3 Total magnetic moment of a superconducting ring vs. applied field for quantum state $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

각 양자상태의 자기모멘트 직선들 사이 간격이 일정하며, 그 값이 단위양자에 의한 값 m_Q 에 해당하므로, 원리적으로는 양자상태 $n=0$ 에서 $n=3$ 으로 전이를 통해 $3 \times m_Q$ 의 자기모멘트 증가를 발생할 수 있다. 그러나, 한가지 유의할 점은 열적요동에 비해 각 양자상태 사이의 에너지 장벽이 매우 높아 전이가 쉽지 않다는 것이다.

우리가 제시하는 방식은 다음과 같다. 먼저 양자상태 $n=0$ 이며, 외부자장이 없는 상태에서 시작하여, $n=3$ 이 바닥상태(ground state)가 되는 값 근처까지 자기장을 증가시킨다. 그러나, 에너지장벽 때문에 두 상태간에 전이가 일어나지는 않는데, 이 때 초전도체의 온도를 전이온도 이상으로 올렸다가 다시 내리면 $n=3$ 상태가 된다. 다시 자기장을 감소하여 없애면 최종 자기모멘트의 변화량은 정확히 $3 \times m_Q$ 이 된다. 사실 초기 자기장이 반드시 0 일 필요는 없으며 최종 자기장과 일치하면 되므로, 완벽히 차단할 수 없는 자기장 배경(background magnetic field)이 있는 경우에도 본 힘발생 절차가 유효함을 알 수 있다.

6. 결론

이 논문에서 우리는 초전도링의 자속양자화라는 거시양자현상에 기반한 새로운 개념의 힘발생 방식을 제시하고자 하였다. 자속양자의 수를 변화함으로써 힘을 일정 크기인 단위힘의 정수배만큼 증가 혹은 감소시킬 수 있으며 그 단위크기는 대략 서브피코뉴턴 정도이다. 자속양자가 마치 서브피코뉴턴 크기의 분동의 역할을 하는 것으로 볼 수 있는데, 이 양자분동은 인공물이 아니며 SI-소급성을 가지고 각각의 크기가 양자역학적으로 균일하다는 장점을 가지고 있다. 내경 10 μm , 외경 20 μm , 두께 50

nm 의 Niobium 초전도링이 10 T/m 의 자기장 기울기 내에 놓일 경우, 단위 힘은 165 펨토뉴턴 크기이며, 최대 6~14 배의 힘까지 구현할 수 있을 것으로 추정된다.

참고문헌

1. Pratt, J. R., Smith, D. T., Newell, D. B., Kramar, J. A., and Williams, E. R., "Progress toward System International d'Unites traceable force metrology for nanomechanics," J. Mater. Res, Vol. 19, pp. 366-379, 2004; and references therein.
2. Chiaverini, J., Smullin, S. J., Geraci, A. A., Weld, D. M., and Kapitulnik, A., "New Experimental Constraints on Non-Newtonian Forces below 100 μm ," Phys. Rev. Lett., Vol. 90, pp. 151101, 2003.
3. Rugar, D., Budakian, R., Mamin, H. J., and Chul, B. W., "Single Spin Detection by Magnetic Resonance Force Microscopy," Nature, Vol. 430, pp. 329-332, 2004.
4. Newell, D. B., Kramar, J. A., Pratt, J. R., Smith, D. T., and Williams, E. R., "The NIST Microforce Realization and Measurement Project," IEEE Trans. Instrum. Technol., Vol. 52, pp. 508-511, 2003.
5. Deo, P. S., Schweigert, V. A., and Peeters, F. M., "Magnetization of Mesoscopic Superconducting Disks," Phys. Rev. Lett., Vol. 79, pp. 4653-4656, 1997.
6. Brandt, E. H., and Clem, J. R., "Superconducting Thin Rings with Finite Penetration Depth," Phys. Rev. B, Vol. 69, pp. 184509, 2004.
7. Choi, J.-H., Choi, M.-S., Kim, Park, Y.-K. (to be submitted).
8. Pool Jr., C. P., "Handbook of Superconductivity" Academic Press, San Diego, 2000, pp. 433-457.