

유연 매니플레이터 동역학 모델링의 비선형 커플링 요소

이진호*(경희대 대학원 기계공학과), 임성수(경희대 기계공학과), 이순걸(경희대 기계공학과)

Nonlinear Coupling Factor in Dynamic Model of Flexible Manipulator

JinHo Lee* (Mech. Eng. Dept., KHU), SungSoo Rhim (Mech. Eng. Dept., KHU),
SoonGeul Lee (Mech. Eng. Dept., KHU)

ABSTRACT

Having flexibility in a manipulator will degrade trajectory tracking control and manipulator tip positioning. In practice, however, constraints imposed by various operating requirements, will render the presence of such flexibility unavoidable. The dynamic analysis of the flexible manipulator is essential in designing proper control systems. A flexible manipulator consists of infinite number of elastic modes and the modes are usually coupled to each other. For the practicality, however, it is usually assumed that the flexible system consists of finite number of elastic modes and the modes are decoupled. These assumptions result in a linear and decoupled mathematical model of the flexible manipulator and simplify the analysis of the dynamic behavior and the design of the control system. The decoupling and linearization of the flexible link, however, has been assumed without in depth analysis. This paper focuses on the analysis of the significance of the non-linear coupling factors.

Key Words : Flexible manipulator, rigid mode, elastic mode, decoupling, dynamic model

1. INTRODUCTION

매니플레이터의 궤적추종제어나 팁 위치제어는 매니플레이터의 유연성(flexure)으로 인해 그 성능이 현저히 저하된다. 그러나 실제로는 매니플레이터에 관한 여러 가지 운동 및 제작 요건으로부터 부여되는 제약조건들로 인해 매니플레이터의 유연성을 무시할 수 없는 경우가 많이 발생한다. 유연 매니플레이터의 동역학적 해석은 적절한 제어 시스템을 구성하고 필요한 동적 거동을 달성하기 위해서는 필수적이다[5]. 일반적으로 유연 매니플레이터의 동적 거동은 무한개의 탄성 모드들로 구성되어 있으며, 항상 이들 무한 모드의 복합적 운동으로 나타난다[2][3]. 그러나 현실적인 이유로 인해 동적 해석 시 매니플레이터는 유한개의 탄성모드들로 이루어져 있으며 모드들은 서로 독립적이라고 가정한다. 이와 같은 가정은 유연 매니플레이터의 수학적 모델을 선형화 및 단순화시키며 동역학적 분석과 제어시스템의 구성을 용이하게 한다. 그러

나 이와 같은 유연 매니플레이터의 선형화 및 단순화는 정확한 동역학적 분석이 고려되지 아니하고 가정되어 왔다. 본 논문에서는 유연 매니플레이터의 동역학 모델링 시 일반적으로 무시되는 비선형 커플링 요소들이 매니플레이터의 동적 거동에 미치는 영향에 대한 해석 결과를 보여준다.

2. SYSTEM DYNAMICS

본 논문에서 관심을 갖는 유연 매니플레이터는 그림 1에 개략적으로 나타낸 직교좌표형(gantry-type) 매니플레이터로, 미끄럼 조인트에 유연한 링크를 설치한 구조로 되어있다. $u(t)$ 는 시간 t 에 따른 액추에이터로부터 발생한 제어 입력력을 표시하며, $x_0(t)$ 는 병진조인트(prismatic joint)의 이동한 거리, L 은 연성 링크의 길이를 표시한다. 움직이는 좌표계 $O-w-y$ 는 조인트에 부착되어 있다.

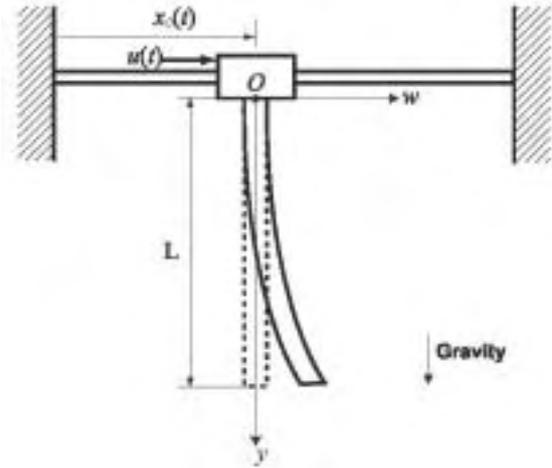


그림 1. 단일 연성 링크를 설치한 직교좌표형 (gantry-type) 매니퓰레이터의 개략도

y 는 연성링크의 중심축을 따른 위치를 표시하며 ($y=0$ 은 베이스를 $y=L$ 은 팁을 나타냄) x 는 링크의 수평이동거리를 나타낸다. 연성 링크 시스템은 무한개의 자유도로 구성되어져 있다. 식(1)과 같이 적절한 경계조건을 가지고 있는 편미분방정식으로 주어진 링크를 해석할 수 있다.

$$m(y) \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[E(y)I(y) \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2} \right] = f(y, t), \quad 0 < y < L, \quad (1)$$

여기서 $m(y)$ 는 y 점에서의 단위길이당 질량, $E(y)$ 는 y 에서의 링크의 탄성계수, $I(y)$ 는 y 점에서의 횡단면적의 중심을 지나가는 횡단면적의 관성 모멘트를 나타낸다.

그림 1에 보인 직교좌표 매니퓰레이터 링크부의 경계조건은 다음과 같다.

1) $y=0$ 에서 병진 미끄럼 운동 :

$$\text{전단응력} = \frac{\partial}{\partial y} \left[E(I(y) \frac{\partial^2 x(0, t)}{\partial y^2} \right] = u(t)$$

$$\text{기울기(slope)} = \frac{\partial x(0, t)}{\partial y} = 0,$$

2) $y=L$ 에서 자유단:

$$\text{모멘트} = EI(y) \frac{\partial^2 x(L, t)}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{전단응력} = \frac{\partial}{\partial y} \left[EI(y) \frac{\partial^2 x(L, t)}{\partial y^2} \right] = 0$$

Assumed Mode Method는 (2)와 같은 형태로 연속시스템의 경계값 문제의 해법(즉, 링크의 수평방향 운동)을 가정한다.

$$x(t, y) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \phi_i(y) \quad (2)$$

여기서 $\phi_i(y)$ 는 모드 함수들이고 $q_i(t)$ 는 일반화 좌표(generalized coordinate)이다. 이를 Lagrange 방정식에 적용하면, 매니퓰레이터의 운동방정식을 얻을 수 있다[2]. 따라서 강체운동은 단일 강체 모드 (rigid mode) 함수 $\phi_r(y)$ 와 탄성 모드(elastic mode) 함수들 $\phi_{ei}(y)$ 로 표시하여 탄성운동으로부터 강체모드의 독립을 가능토록 한다.

일반화 좌표를 강체 모드 일반화 좌표 $q_r(t)$ 와 탄성 모드 일반화 좌표 $q_{ei}(t)$ 로 나누어 적용하면 매니퓰레이터의 운동을 식(3)과 같이 나타낼 수도 있다.

$$x(t, y) = q_r(t) \phi_r(y) + \sum_{i=1}^{\infty} q_{ei}(t) \phi_{ei}(y) \quad (3)$$

이론적으로, 연성 매니퓰레이터는 무한개의 탄성 모드들로 구성되어 있으나, 현실적인 이유로 인하여 단지 N 개의 모드들만을 해석에 포함하고, N 개의 모드만으로도 시스템의 동역학적 거동의 특성을 충분히 파악할 수 있다고 가정한다. 이러한 가정을 통해 링크의 수평방향 변위 $x(t, y)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$x(t, y) = q_r(t) \phi_r(y) + \sum_{i=1}^N q_{ei}(t) \phi_{ei}(y) \quad (4)$$

Lagrange 방정식과 허용 가능한 (admissible) N 개의 직교 탄성 모드 함수를 조합하면 연성 매니퓰레이터에 관한 운동방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}^{-1} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}u(t) \quad (5)$$

여기서

$$\mathbf{q}(t) = [q_r(t) \quad q_{e1}(t) \quad \dots \quad q_{eN}(t)]^T,$$

$$\mathbf{q}_{ei}(t) = [q_{e1}(t) \quad q_{e2}(t) \quad \dots \quad q_{eN}(t)]^T,$$

그리고 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 의 (i, j) 요소는 각각 식 (6), (7)과 같이 계산된다.

$$m_{ij} = \int_0^L m(y) \phi_i(y) \phi_j(y) dy \quad (6)$$

$$k_{ij} = \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_i(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j(y)}{\partial y^2} dy \quad (7)$$

벡터 \mathbf{f} 의 i 번째 열은 $f_i = \phi_i(0)$ 이다. 결과적으로, 운동방정식의 시스템 파라미터 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_r & M_{re} \\ M_{re}^T & M_e \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_e \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

여기서 아래첨자 r 과 e 는 각각 강체 모드운동과 탄성 모드 운동을 표시한다. M_{re} 는 강체운동과 탄성운동이 조합되어 나타나는 커플링 항을 표시한다. 또한 여기서 수평 이동에 대해서는 오직 한 개의 강체 모드 운동만이 포함 되어 있음을 주의하기 바란다. 탄성 모드 운동의 표현을 위해 직교 정규 모드들이 사용되어졌으므로, M_e 은 항등 행렬이고 K_e 는 대각행렬이 된다. M_r 과 M_{re} 는 0이 아니다.

일반적으로, 매니플레이터 시스템에서 질량을 나타내는 행렬 \mathbf{M} 과 강성을 나타내는 행렬 \mathbf{K} 는 매니플레이터의 위치와 자세 $\mathbf{q}(t)$ 에 따라 변화할 수 있다. 그러나, 직교좌표형(gantry-type) 매니플레이터에서 이 행렬들은 자세에 따라 변화하지 않는다.

식 (8)과 같은 변환행렬 \mathbf{T} 를 식 (5)의 양변에 곱하면 탄성 운동으로부터 강체 운동을 독립시킬 수 있다.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -M_{re}M_e^{-1} \\ -M_{re}^T M_r^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (8)$$

이와 같은 변환을 통하여 (9) 또는 (10)과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$\overline{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \overline{\mathbf{K}} \mathbf{q}(t) = \overline{\mathbf{f}} u(t) \quad (9)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_r & 0 \\ 0 & \overline{M}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \overline{K}_{re} \\ 0 & \overline{K}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r(t) \\ \mathbf{q}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f}_r \\ \overline{f}_e \end{bmatrix} u(t) \quad (10)$$

$$\overline{M}_r = M_r - M_{re} M_e^{-1} M_{re}^T,$$

$$\overline{M}_e = M_e - M_{re}^T M_r^{-1} M_{re},$$

$$\overline{K}_{re} = -M_{re} M_e^{-1} K_e,$$

$$\overline{K}_e = K_e$$

$$\overline{f}_r = f_r - M_{re} M_e^{-1} f_e,$$

$$\overline{f}_e = -M_{re}^T M_r^{-1} f_r + f_e$$

이다.

(10)의 양변에 $\overline{\mathbf{M}}$ 의 역행렬을 곱하면 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \overline{M}_r^{-1} \overline{K}_{re} \\ 0 & \overline{M}_e^{-1} \overline{K}_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r(t) \\ \mathbf{q}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{M}_r^{-1} \overline{f}_r \\ -\overline{M}_e^{-1} \overline{f}_e \end{bmatrix} u(t) \quad (11)$$

식 (11)을 전개하면, 우리는 두 개의 하위시스템 (강체 모드 운동 하위 시스템과 탄성 모드 운동 하위 시스템)을 위한 두 개의 동역학 방정식을 얻을 수 있다. 만약 식 (11)에서 비(非)대각행렬 $M_{re}^T M_r^{-1} M_{re}$ 을 무시할 수 있다고 가정하면 식 (12)와 (13)을 얻을 수 있다.

$$\overline{M}_e = M_e = I \quad (12)$$

$$\overline{M}_e^{-1} \overline{K}_e = M_e^{-1} K_e = K_e \quad (13)$$

여기서 K_e 는 대각행렬이므로, 탄성 모드 운동 ϕ_{ei} 는 서로 분리(decouple)될 수 있고, 이들 탄성 모드들의 고유진동수는 식 (13)의 대각항들의 제곱근으로부터 얻을 수 있다.

3. COUPLING STRENGTH ANALYSIS

강체 모드와 탄성 모드간의 커플링 요소 $M_{re}^T M_r^{-1} M_{re}$ 의 특징을 면밀히 살펴보기 위해 P 를 아래와 같이 정의한다.

$$P = M_{re}^T M_r^{-1} M_{re} \quad (14)$$

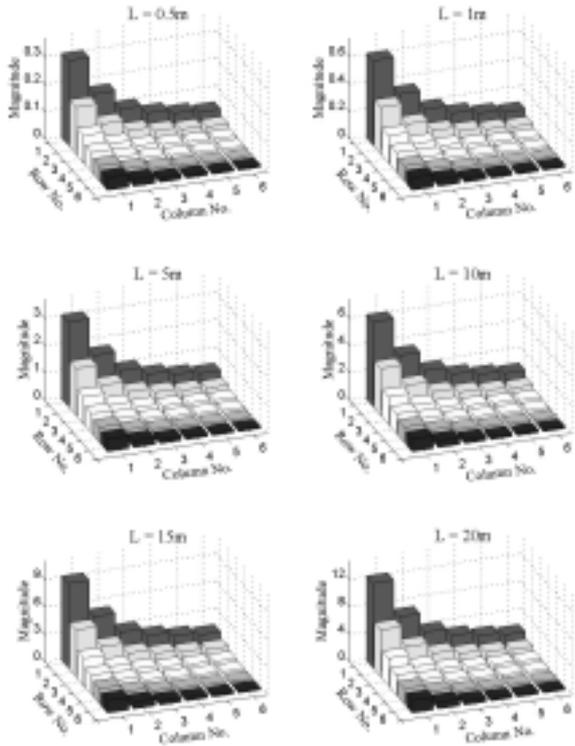


그림 2. 링크의 길이와 $\int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy$ 의 값의 변화

\mathbf{P} 의 (i, j) 요소 p_{ij} 는 다음과 같이 계산된다.

$$p_{ij} = \frac{\int_0^L \rho \phi_r(y) \phi_i(y) dy \int_0^L \rho \phi_r(y) \phi_j(y) dy}{\int_0^L \rho \phi_r(y) \phi_r(y) dy} \quad (15)$$

만약 $\phi_r(y)$ 가 unity 함수로 가정된다면 식 (15)는 다음과 같이 간략화 된다.

$$p_{ij} = \frac{\rho}{L} \int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy \quad (16)$$

p_{ij} 값들의 크기의 정도를 파악하기 위해 \mathbf{M}_e 의 대각항들과 p_{ij} 의 값을 비교해보고자 한다. 직교 정규 모드라는 가정으로부터, \mathbf{M}_e 는 항등행렬이고 p_{ij} 는 그 자체로서 두 행렬의 요소 사이의 크기의 비율이 된다. 모드 함수 ϕ_i 자체와 ϕ_j 에 포함되어 있는 고유치들의 초월함수적인 특성으로

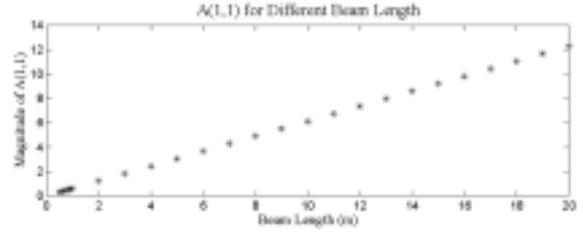


그림 3. $\int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy$ 의 링크의 길이의 변화에 따른 최대 요소 크기의 변화

인해 크기 비교를 위해서 해석적 방법 대신 수치적 방법을 사용한다.

그림 2는 링크의 길이 L 의 변화($L=0.5, 1, 5, 10, 15, 20$ m)에 따른 $\int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy$ 의 변화 추이를 3차원 그래프를 통해 보여준다. 이 때, 링크는 6개의 탄성 모드를 갖는 것으로 가정하였다. 그림 3은 L 의 변화에 따라 변화하는 \mathbf{P} 의 요소 중에 최대의 크기를 갖는 요소 $\int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy$ 의 크기를 L 의 변화에 대하여 나타내었다. 그림에서 보이는 바와 같이 $\int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy$ 중 최대 요소의 크기는 L 의 증가에 비례하여 증가함을 알 수 있다. 이는 $\frac{1}{L} \int_0^L \phi_i(y) dy \int_0^L \phi_j(y) dy$ 가 L 의 크기에 상관없이 일정(0.613)하다는 것을 의미하며, 유연체 링크의 동역학 모델 생성 시 일반적으로 무시되어 지는 $\mathbf{M}_{re}^T \mathbf{M}_r^{-1} \mathbf{M}_{re}$ 는 시스템의 동역학적 거동에 상당한 영향을 미치는 요소임을 보여준다.

4. CONCLUSIONS

본 논문에서는 운동방정식에 나타나는 커플링 요소들의 중요성을 분석하였다. 연성 매니플레이터 시스템에서 비선형 커플링 요소의 커플링 경향이 링크의 길이에 비례하여 강해진다는 사실을 수치 해석을 통해 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] Magee, D.P. and W.J. Book, "Optimal Filtering to Minimize Elastic Behavior in Serial Link Manipulators," *Proceedings of the American Control Conference*, Philadelphia, PA, June 24-26, 1998, pp.2637-2642.
- [2] Meirovitch, L., *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan Publishing CO. Inc., New York, 1967.
- [3] Meirovitch, L., *Dynamics and Control of Structures*, Wiley Interscience, New York, 1987.
- [4] Rhim, S. and W.J. Book, "Adaptive Command Shaping Using Adaptive Filter Approach in Time Domain," *Proceedings of the American Control Conference*, CA, 1999, pp81-85.
- [5] Spector, V.A. and H. Flashner, "Modeling and Design Implications of Noncollocated Control in Flexible Systems," *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 112, No. 2, 1990, pp.186-193.