

엔드밀 가공에서 푸리에 급수를 이용한 절삭력 및 공구변형 표현

류시형*(전북대 기계공학과)

Representation of cutting forces and tool deflection in end milling using Fourier series

S. H. Ryu (Department of Mechanical Engineering, Chonbuk National University)

ABSTRACT

Cutting forces and tool deflection in end milling are represented as the closed form of tool rotational angle and cutting conditions. The discrete cutting forces caused by tool entry and exit are continued using the Fourier series expansion. Tool deflection is predicted by direct integration of the distributed loads on cutting edges. Cutting conditions, tool geometry, run-outs and the stiffness of tool clamping part are considered for cutting forces and tool deflection estimation. Compared to numerical methods, the presented method has advantages in short prediction time and the effects of feeding and run-outs on cutting forces and tool deflection can be analyzed quantitatively. This research can be effectively used in real time machining error estimation and cutting condition selection for error minimization since the form accuracy is easily predicted by tool deflection curve.

Key Words : Endmill (엔드밀), Cutting force (절삭력), Tool deflection (공구변형), Form accuracy (형상정밀도), Fourier series (푸리에 급수)

1. 서론

엔드밀링 공정은 기계 부품 및 금형 제작에 사용되는 주요한 가공 공정으로, 가공중 공구에 부가되는 절삭력은 공구의 변형을 발생시켜 공작물의 형상 정밀도, 치수 정밀도, 표면거칠기에 좋지 않은 영향을 준다.^{1,2} 엔드밀링에서의 절삭력에 관한 연구는, 공구를 미소날로 분할한 후 여기에 작용하는 미소 절삭력의 수치적분을 통하여 구하는 것이 일반적이다.³⁻⁵ 본 논문에서는 이러한 수치적분 방법을 사용하지 않고, 절삭조건과 공구회전각의 폐형으로 절삭력과 공구변형을 유도하였다. 공작물에 대한 절삭날의 인입과 이탈에 의해 발생하는 절삭력의 불연속 성분을 푸리에 급수 전개를 통하여 연속화시키고 절삭날에서의 미소절삭력을 공구축의 헬릭스를 따라 적분함으로써 절삭력을 구했다. 또한, 절삭날에서 분포 절삭력의 직접 적분을 통하여 절삭조건에 대한 함수로 공구변형량을 예측하였다. 이 방법은 전체 절삭력의 작용점을 구해 이로부터 공구변형의 형상을 결정하는 기존의 방법에 비해 더욱 정확하다고 할 수 있으며, 절삭조건과 절삭계수

로부터 공구회전각과 공구위치의 함수로 공구변형이 구해지므로 번거로운 수치해석 과정을 생략할 수 있는 장점이 있다. 또한 절삭력 및 공구 변형의 예측에서 공구 날의 수를 고려하지 않아도 되는 이점을 지닌다.

2. 푸리에 급수를 이용한 절삭력 예측

일반적으로 엔드밀 가공에서 미소날에 작용하는 절삭분력은 식 (1)과 같이 절삭계수와 미변형 칩단면적의 곱으로 표현된다. 이송 방향과 이송에 수직인 방향의 절삭분력은 식 (2)와 같은 좌표 변환을 통해 얻어진다. 공작물에의 인입, 이탈에 따른 절삭날의 절삭 참여 여부를 나타내는 창 함수 $\delta(\theta)$ 는 Fig. 1에서 보듯이 공구 한 회전 즉, 2π 를 주기로 하는 불연속 함수가 되어 식 (2)의 직접 적분을 통한 절삭력의 예측이 불가능하다. 만일 적분이 가능하다면 매순간 미소절삭날의 절삭참여 여부를 판단하지 않고 절삭조건만의 함수로 절삭력을 구할 수 있게 된다. 푸리에 급수는 삼각함수를 이용하여 주기 함수를 표현하는 방법이다. 절삭과정이 주축의 한 회

전을 주기로 하는 반복 과정을 고려할 때 푸리에 급수 전개를 통해 절삭력이나 공구변형 성분의 표현이 가능함을 알 수 있다. 인입, 이탈의 불연속 때문에 발생하는 적분 불가 요소를 푸리에 시리즈를 이용한 연속함수로 대체함으로써 적분이 가능하게 된다.⁶

$$\begin{aligned} dF_x &= k_x f_i \sin \theta dz \\ dF_y &= k_y k_r f_i \sin \theta dz \\ dF_z &= k_z k_a f_i \sin \theta dz \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{cases} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{cases} = k_i f_i dz \delta(\theta) \begin{bmatrix} -\frac{\sin 2\theta}{2} & -\frac{1-\cos 2\theta}{2} & 0 \\ \frac{1-\cos 2\theta}{2} & -\frac{\sin 2\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ k_r \\ k_a \end{Bmatrix}$$

where, $dz = \frac{R}{\tan \alpha} d\beta$ (2)

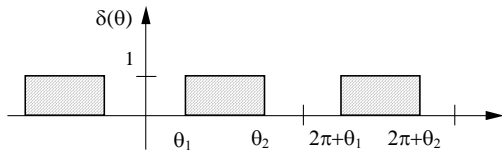


Fig. 1 Window function representing tool entry and exit

창 함수 $\delta(\theta)$ 를 푸리에 급수로 전개하면 식 (3)과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta(\theta) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta] \\ a_0 &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \cos k\theta d\theta = \frac{\sin k\theta_2 - \sin k\theta_1}{k\pi} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \sin k\theta d\theta = \frac{\cos k\theta_1 - \cos k\theta_2}{k\pi} \end{aligned} \quad (3)$$

엔드밀에서 첫번째 공구날 끝의 회전각을 ϕ 라 할 때 공구길이 방향으로 헬릭스에 의한 절삭날 후퇴각 β 에서 m 번 째 절삭날의 공구위치각은 다음과 같다.

$$\theta(\phi, \beta, m) = \phi - \beta - \frac{2m\pi}{N} \quad (4)$$

따라서, 평 엔드밀가공에서 절삭력은 다음 식의 적분을 통해 계산될 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} \left[f\left(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N}\right) \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos k\left(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N}\right) + b_k \sin k\left(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N}\right) \right] \right\} \right] d\beta \quad (5)$$

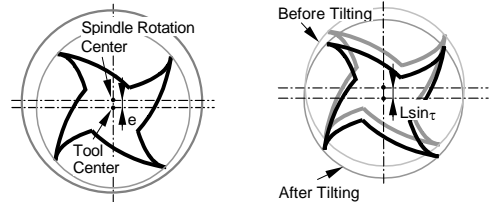
식 (5)에서, 적분 상한 β_0 는 절삭날 끝에 대한 축방향 절삭깊이에서의 헬릭스에 의한 절삭날 후퇴각의 크기를 나타내며, $f(\theta)$ 는 절삭력의 기본과형을 형성하는 $1, \sin\theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta$ 등을 나타내는 함수이다. 1 과 $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ 는 절삭계수와 함께 이송 방향과 이송에 수직인 방향 절삭력의 크기와 형태를 결정하게 되고, $\sin\theta$ 는 축방향 절삭력의 크기와 형태를 결정하게 된다. 식 (5)에서 각 항의 삼각함수의 곱을 함으로 나타내고, 다음 성질을 이용하면 절삭력 계산에서 절삭날 개수의 영향을 배제시킬 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N-1} \sin k\left(\theta + \frac{2m\pi}{N}\right) &= \begin{cases} N \sin k\theta, & \text{if } k \text{가 } N \text{의 배수일 때} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \sum_{m=0}^{N-1} \cos k\left(\theta + \frac{2m\pi}{N}\right) &= \begin{cases} N \cos k\theta, & \text{if } k \text{가 } N \text{의 배수일 때} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

위의 성질은 삼각함수의 덧셈 법칙으로 식을 전개한 후, 지수함수의 성질을 이용하여 보일 수 있다. 식 (2)와 (5)에서 $f(\theta)$ 가 $1, \sin\theta, \sin 2\theta, \cos 2\theta$ 일 때 β 에 대해서 적분하면, 절삭력 성분들이 공구회전각의 함수로 구해진다.

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{N-1} \left[\cos\left(\frac{m}{N} 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{m}{N} 2k\pi\right) \right] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{i \frac{m}{N} 2k\pi} = \frac{1 - e^{i 2k\pi}}{1 - e^{i \frac{2k\pi}{N}}} = \frac{1 - (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)}{1 - e^{i \frac{2k\pi}{N}}} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

일반적으로 엔드밀링에서는 런 아웃이 존재하여 절삭날간의 절삭력 편차를 발생시킨다. 런 아웃은 공구를 공작기계에 장착할 때 발생하며 공구의 기하학적 중심축과 주축회전 중심축 사이의 편차로 정의된다. 두 축간의 불일치는 공구와 아버의 결합부에서의 주축중심과 공구중심의 편심량과 두 축간의 틸팅각 그리고 편심과 틸팅 사이의 각도 편차를 나타내는 인자들로 나타낼 수 있다.



(a) axis eccentricity (b) tool tilting

Fig. 2 Run-out induced by tool setting error

편심과 틸팅이 존재할 때 각 날의 회전반경은 식 (8)로 구해진다.

$$\begin{aligned}
r(m) &= [(R \cos(\lambda + \beta + \frac{2m\pi}{N}) \cos \tau + (L - \frac{R\beta}{\tan \alpha}) \sin \tau + e \cos \kappa)^2 \\
&\quad + (R \sin(\lambda + \beta + \frac{2m\pi}{N}) + e \sin \kappa)^2]^{1/2} \\
&\approx R + e \cos(\lambda + \beta + \frac{2m\pi}{N} - \kappa) + (L - \frac{R\beta}{\tan \alpha}) \sin \tau \cos(\lambda + \beta + \frac{2m\pi}{N} - \kappa)
\end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 λ 는 공구의 틸팅방향을 나타내는 X' 축과 첫 번째 절삭날의 날 끝 위치 사이의 각도를 나타내며, κ 는 X' 축과 공구이송축에 수직인 Y 축 사이의 각도를 나타낸다. 식 (8)에서 두번째항은 편심에 의한 공구반경의 변화를 나타내며 세번째항은 공구의 틸팅에 의한 공구반경의 변화를 의미한다.

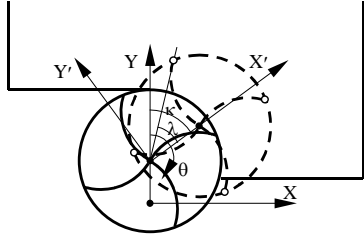


Fig. 3 Coordinate setting including tool run-out

공구의 런 아웃에 의한 미변형 칩두께 변화는 아래 식과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
t_c(\phi, \beta, m) &= f \sin(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N}) - 2 \sin \frac{\pi}{N} \{ e \sin(\lambda + \beta - \kappa + \frac{2m\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) \\
&\quad + (L - \frac{R\beta}{\tan \alpha}) \sin \tau \sin(\lambda + \beta + \frac{2m\pi}{N} - \frac{\pi}{N}) \}
\end{aligned} \quad (9)$$

따라서 런 아웃이 존재할 때 미소 절삭날에 작용하는 미소 절삭력은 식 (10)과 같이 구해진다.

$$\begin{Bmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{Bmatrix} = k_s dz \delta(\theta) t_c(\phi, \beta, m) \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ k_r \\ k_a \end{Bmatrix} \quad (10)$$

런 아웃을 나타내는 각도 성분을 적절히 치환하면, 식 (11)이 얻어진다.

$$\begin{Bmatrix} dF_x \\ dF_y \\ dF_z \end{Bmatrix} = k_s dz \delta(\theta) [f \sin(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N}) + 2 \sin \frac{\pi}{N} \{ e \sin(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N} - \xi) \\ - (L - \frac{R\beta}{\tan \alpha}) \sin \tau \sin(\phi - \beta - \frac{2m\pi}{N} - \eta) \}] \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ k_r \\ k_a \end{Bmatrix}$$

where,

$$\xi = \phi - \kappa + \lambda - \frac{\pi}{N}, \quad \eta = \phi + \lambda - \frac{\pi}{N} \quad (11)$$

각 방향의 절삭분력에서 첫째항은 이송에 의한 절삭력 성분, 둘째항은 공구중심과 주축회전중심의 편심에 의한 절삭력 성분, 세번째 항은 공구의 틸팅에 의한 절삭력 성분을 나타낸다. 따라서 위와 같은 방법으로 절삭력을 나타내면, 공구의 런 아웃 성분들이 절삭력의 변화에 주는 영향을 분리하여 파악할 수 있다. 이상에서 절삭력이 절삭조건과 공구회전각의 함수로 표현됨을 알 수 있다.⁷

Fig. 4는 푸리에 급수의 차수 변화에 따른 절삭분력들의 시뮬레이션 결과이다. 급수의 차수가 커짐에 따라 그래프가 절삭력의 기본 파형에 수렴하고 있음을 볼 수 있다.

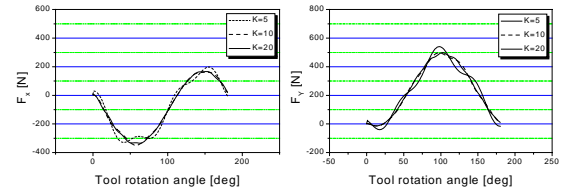
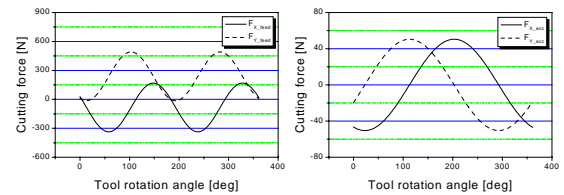
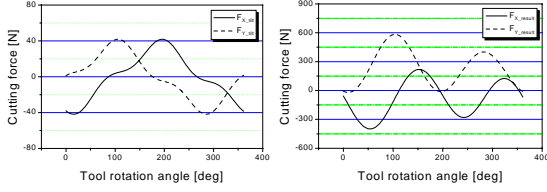


Fig. 4 Cutting forces with respect to order of Fourier series

Fig. 5는 절삭력의 크기와 형태를 결정하고 칩두께 변화에 영향을 주는 성분들을 분리하여 나타낸 것이다. 공구 길이는 50 mm, 틸팅각은 0.01°, 공구와 아머 접면부에서 공구중심과 주축회전중심 사이의 편심량은 10 μm으로 가정하였다. 두 날 평엔드밀에서 날 당 이송량이 0.2 mm일 때의 시뮬레이션 결과이다. λ 와 κ 는 모두 45°로 두었다. (a)는 이송에 의한 칩 두께 변화에 의해 공구에 가해지는 절삭력의 형태를 나타내는데 날 수에 따르는 주기함수 형태를 갖음을 알 수 있다. (b)에서 보듯이 공구의 편심성분은 공구 한 회전을 주기로 하는 정현파의 형태가 되나 (c)에서 나타난 공구의 틸팅성분은 복잡한 모양을 갖게 된다. 이러한 이유는 편심은 공구회전각의 함수로 칩두께의 변화에 영향을 주지만, 공구 틸팅은 공구회전각 뿐만 아니라 절삭깊이의 위치에 따라 칩 두께에 변화를 주기 때문이다. 결국 (a), (b), (c) 세 성분의 합성에 의해 공구에 가해지는 최종 절삭력의 형태가 (d)와 같이 결정된다.



(a) feeding component (b) eccentricity component



(c) tool tilting component (d) resulting cutting forces
Fig. 5 Cutting forces composed by feeding and run-out

3. 푸리에 급수를 이용한 공구변형 예측

이송과 이송에 수직방향으로의 분포 절삭분력은 식 (12)와 같이 쓸 수 있다.

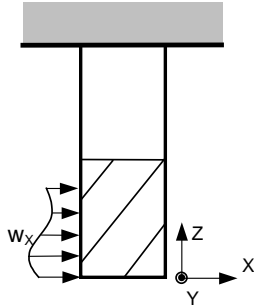


Fig. 6 Tool deflection by distributed loads

$$\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} = k_r \delta(\theta) t_c(\phi, \beta, m) \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ K_r \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Z 방향의 절삭력은 그 크기가 미소하고, 공구의 축방향으로 작용하므로 X, Y 방향으로의 공구 변형에 주는 영향은 무시할 수 있다. Fig. 6의 좌표계에서 X 방향으로의 분포하중을 w_x 라 하면, 변형과 하중의 관계는 식 (13)과 같다.

$$M_{bx} = z \int_0^z w_x dz - \int_0^z w_x z dz$$

$$M_{bx} = EI \frac{d^2 v_x}{dz^2} \quad (13)$$

where,

$$z = \frac{R}{\tan \alpha} \beta, \quad dz = \frac{R}{\tan \alpha} d\beta$$

절삭날에서의 분포 절삭력을 식 (13)에 대입하고 공구 축방향을 따라 β 에 대해 적분하면 공구 변형각과 공구 변형량을 Z와 공구회전각의 함수로 얻을 수 있다. 공구 변형의 계산에 있어서 경계조건은 식 (14)와 같이 주어진다. 절삭날부와 실린더의 경계에서, 그리고 축방향 절삭깊이 지점에서의 연속조건, 즉 공구 변형각과 공구 변형의 기울기가 같다

는 조건을 이용하여 미지의 적분상수들을 결정한다.

$$\left. \frac{dv_x}{dz} \right|_{Z=L} = 0, \quad v_x|_{Z=L} = 0$$

$$M_b|_{Z=0} = 0, \quad V|_{Z=0} = 0 \quad (14)$$

절삭력 분포에 따른 공구 변형의 구간은 축방향 절삭깊이 이하의 공구 절삭부와 축방향 절삭깊이 위쪽의 공구 상단부로 나눌 수 있고 또한 공구의 절삭날부와 절삭날이 존재하지 않는 공구 실린더부로 분리할 수 있다. 절삭깊이 상단의 공구 절삭날부와 공구 실린더부는 단면 이차 모멘트가 다르므로 공구 변형각과 공구 변형량을 계산할 때 이를 고려해야 한다.

$$M_{bx} = z \int_0^z w_x dz - \int_0^z w_x z dz$$

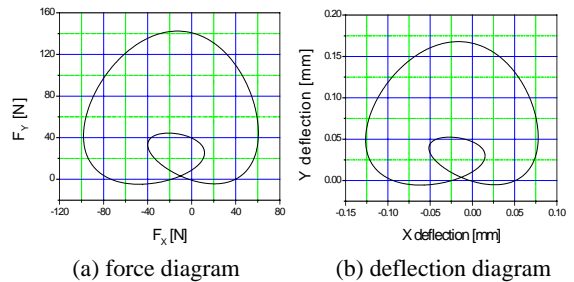
$$= \left(\frac{R}{\tan \alpha} \right)^2 \left[\int_0^\beta w_x d\beta - \int_0^\beta w_x \beta d\beta \right] \quad (15)$$

식 (15)에서 첫번째 항은 공구 내부의 전단력에 의한 굽힘 모멘트 성분을 의미하고 두번째 항은 분포하중에 의한 굽힘 모멘트 성분을 나타낸다. 다시 식 (15)를 β 에 대하여 적분하면 공구 변형각과 공구 변형량이 구해진다.

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{1}{EI} \left(\frac{R}{\tan \alpha} \right)^3 \left[\int_0^\beta \int_0^\beta w_x d\beta d\beta - \int_0^\beta \int_0^\beta w_x \beta d\beta d\beta \right] \quad (16)$$

$$v_x = \frac{1}{EI} \left(\frac{R}{\tan \alpha} \right)^4 \left[\int_0^\beta \int_0^\beta \int_0^\beta w_x d\beta d\beta d\beta - \int_0^\beta \int_0^\beta \int_0^\beta w_x \beta d\beta d\beta d\beta \right]$$

공구 변형은 이송에 의한 성분, 편심에 의한 성분, 틸팅에 의한 성분으로 분리하여 계산할 수 있고, 축방향 절삭깊이 이하의 영역과 이상의 영역을 구분하여 공구 변형각과 공구 변형량을 구한다.⁷ 이로부터 공구 변형이 공구 회전각과 공구 위치의 함수로 표현된다.



(a) force diagram (b) deflection diagram
Fig. 7 Relationship between cutting forces and tool deflection

Fig. 7은 날 당 이송을 0.1 mm, 축방향 절삭깊이를 0.3 mm로 하고 두 날 엔드밀로 슬롯 절삭한 경우의 X, Y 축으로의 절삭력, 공구변형을 표시한 것이다. 절삭력과 공구변형이 정적인 가정하에서 선형적인 것을 고려할 때 형태에 있어서 같은 모양을 갖음을 확인할 수 있다.

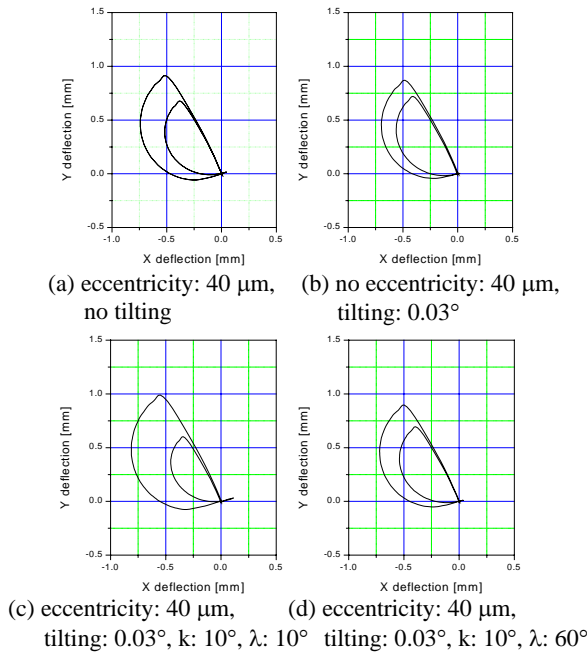


Fig. 8 Tool deflection according to run-out components (feed per tooth: 0.5 mm, axial depth of cut: 2 mm, slot cutting)

Fig. 8은 두 날 절삭에서의 런 아웃 성분에서의 공구변형 궤적을 나타낸 것이다. 두 절삭날간의 절삭력 편차에 기인한 공구궤적 편차는 초기 절삭날의 위치, 공구 틸팅의 방향과 편심의 방향사이의 각도 차이를 나타내는 κ 와 λ 에 의해 영향을 받는다. 이들 각의 관계에 의하여 틸팅의 방향과 편심의 방향이 180°의 값을 갖게 되면 두 날 간의 절삭력 편차와 공구궤적의 편차는 최대가 되고, 0°의 값을 갖게 되면 런 아웃에 의한 편차 성분은 최소가 된다. 이상으로부터 엔드밀 가공에서 절삭력과 공구변형이 공구회전각과 공구위치의 함수로 표현됨을 알 수 있다. 공구변형 곡선으로부터 가공물의 형상 정밀도는 쉽게 구할 수 있다.⁸

4. 결론

엔드밀 가공에서의 절삭력 및 공구변형을 푸리에 급수 전개를 통하여 절삭조건과 공구회전각의 함수로 표현하였다. 제시된 방법은 기존의 수치해

석법에 비하여 계산 시간을 단축시킬 수 있을 뿐만 아니라, 절삭력과 공구변형을 구성하는 이송 성분과 런 아웃 성분을 분리하여 고찰할 수 있는 이점이 있다. 또한 공구날 수의 영향을 배제시킴으로써 절삭날의 수가 많아지는 경우에도 동일한 시간으로 예측이 가능하다. 절삭날에 가해지는 분포 하중의 공구 축 방향 적분을 통하여 공구변형을 구하였다. 공구변형을 외팔보 이론에 의한 정적인 처짐으로 가정하여 공구회전각과 절삭날의 위치 함수로 공구변형량과 공구변형각을 표현하였다. 가공물의 형상 정밀도는 공구변형 곡선으로부터 쉽게 얻어지므로, 본 연구는 CAD/CAM 시스템에 적용되어 실시간 가공 오차 예측 및 오차 최소화를 위한 가공 조건의 선정에 유용하게 이용될 수 있다.

참고문헌

1. Koenigsberger, F., and Sabberwal, A. J. P., "An Investigation into the Cutting Force Pulsations during Milling Operations," *Int. J. Mach. Tool Design Research*, Vol. 1, pp. 15-33, 1961.
2. Kline, W. A., DeVor, R. E., and Shareef, I. A., "The Prediction of Surface Accuracy in End Milling," *ASME J. of Eng. for Ind.*, Vol. 104, pp. 272-278, 1982.
3. Sutherland, J. W., and DeVor, R. E., "An Improved Method for Cutting Force and Surface Error Prediction in Flexible End Milling Systems," *Trans. ASME, J. of Eng. for Ind.*, Vol. 108, pp. 269-279, 1986.
4. Kline, W. A., DeVor, R. E., and Lindberg, J. R., "The Prediction of Cutting Forces in End Milling with Application to Cornering Cuts," *Int. J. Mach. Tool Design Research*, Vol. 22, pp.7-22, 1982.
5. Kline, W. A., and DeVor, R. E., "The Effect of Runout on Cutting Geometry and Forces in End Milling," *Int. J. Mach. Tool Design Research*, Vol. 23, pp. 123-140, 1983.
6. Zheng, L., Liang, S. Y., and Melkote, S. N., "Angle Domain Analytical Model for End Milling Forces," *ASME J. of Manu. Sci. and Eng.*, Vol. 120, pp. 252-258, 1998.
7. Ryu, S. H., *Optimal Cutting Condition in Side Wall Machining Considering Tool Deflection*, Ph.D. dissertation, Seoul National University, 2000.
8. Ryu, S. H., Lee, H. S., and Chu, C. N., "The Form Error Prediction in Side Wall Machining Considering Tool Deflection," *Int. J. Mach. Tools and Manuf.*, Vol. 43, pp. 1405-1411, 2003.