A Study on the Multiresponse Robust Design using Loss Function

Yong Man Kwon[1) · Duk Joon Chang[2)

Abstract

In this paper we propose how to simultaneously optimize multiple responses for robust design when data are collected from a combined array. The proposed method is based on the quadratic loss function. An example is illustrated to show the proposed method.

Keywords : Simultaneously optimize multiple responses, Robust design, Combined array, Quadratic loss function

1. 서론

다중 반응에서 설계인자의 최적조건을 찾는 방안은 Derringer와 Suich(1980), Khuri와 Conlon(1981) 그리고 Vining(1998)등에 의하여 이루어졌다. Derringer와 Suich(1980)는 기대함수를 이용한 다특성 동시 최적화 방안을 제시하였다. 이 방법은 사용하기 편리한 점이 있으나 반응변수간의 분산-공분산을 고려하지 않았다. 그리고 Khuri와 Conlon(1981)은 거리함수(distance function)을 이용한 다중 반응 동시 최적화 방안을 제시하였다. 이 방법은 반응변수간의 분산-공분산을 고려하였으나 단순히 목표치와의 거리만을 고려할 뿐 실제 현장에서 필요한 경제적인 측면을 전혀 고려하지 않았다. 또한 Vining(1998)은 손실함수(loss function)를 이용한 다중 반응 동시 최적화 방안을 제시하였다. 그러나 앞서 제시된 모든 방안들은 잡음인자의 영향에 의한 품질변동을 고려하지 않은 동시 최적화 방안이다.

다구찌 파라미터 설계에서 교차배열(product array)은 제어인자와 잡음인자의 모든 교호작용을 고려함으로써 실험수가 지나치게 많을 뿐 아니라 축차실험을 고려하지 않는 등 많은 단점을 가지고 있다. 따라서 실험수를 줄일 수 있을 뿐 아니라 기존의 잘 정립된 실험계획법 이론을 이용한 대체방안이 연구되고 있다. 그 중에서 통합배열(combined array)접근법이 Welch, Yu, Kang, 와 Sacks(1990)에 의해 처음으로 제안되었다. 그 이후로 Vining와 Myers (1990), Box와 Jones(1992)등에 의하여 연구되었다.

본 논문에서는 Vining(1998)이 제시한 손실함수를 이용하여 통합배열에 의한 실험배치에서 로버스트 설계를 위한 다중 반응 동시 최적화 방안을 제안한다.

---

1) Associate Professor, Department of Computer and Statistics, Chosun University, Gwangju, 501-759, Korea.
E-mail : ymkwon@chosun.ac.kr

2) Professor : Department of Statistics, Changwon National University, Changwon, 641-773, Korea.

2. 로버스트 설계에서 손실함수를 이용한 동시 최적화

반응변수 y는 제어인자들(x)과 잡음인자들(z)에 의해 값이 정해진다고 가정하자. i 번째 반응변수의 이차회귀모형은 다음과 같다.

$$y_i(x, z) = \beta_{i0} + x' \beta_i + x'B_i x + z'R_i z + z' \gamma_i + z'D_i x + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r \quad (2.1)$$

ε_i는 i번째 반응변수에서의 실험오차이다. 식(2.1)을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{y}_i = X\, \Theta_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, r \quad (2.2)$$

여기서 $\mathbf{y}_i$는 i 번째 반응변수에서의 측정치의 벡터이고, X는 계획행렬이고 i번째 반응변수에서의 Θ_i 모집단의 회귀계수들의 벡터이고 ε_i는 실험오차의 벡터이다. 식(2.2)와 관련된 가정으로

$$E(\varepsilon_i) = 0,\ Var(\varepsilon_i) = \sigma_{ii} I_N,\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij} I_N \qquad i, j = 1, 2, \cdots, r, \quad i \neq j$$

이 성립된다고 하자. Σ는 $r \times r$행렬이고 (i, j)번째 원소는 σ_{ij}이다. Σ 의 불편추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\Sigma} = Y' \left[I_N - X(X'X)^{-1} X' \right] Y \,/\, (N - p) \quad (2.3)$$

여기서 $Y = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_r)$이고 I_N은 모든 원소가 1인 $N \times N$ 행렬이다. $\widehat{\Theta}_i$의 분산-공분산행렬은 다음과 같다.

$$Var(\widehat{\Theta}) = (X'X)^{-1} \Sigma.$$

i번째 품질특성의 추정식은 다음과 같다.

$$\widehat{y}_i(x, z) = g'(x, z)\, \widehat{\Theta}_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, r \quad (2.4)$$

여기서 $g'(x, z)$는 (x, z)점에서 계산되어진 X행렬의 행과 같은 형태의 벡터이다. 식(2.4)로부터 다음이 성립된다.

$$\Sigma_{\widehat{y}}(x, z) = Var[\widehat{y}(x, z)] = g'(x, z)(X'X)^{-1}g(x, z)\Sigma, \qquad (2.5)$$

여기서 $\widehat{y}(x, z) = (\hat{y}_1(x, z), \hat{y}_2(x, z), \cdots, \hat{y}_r(x, z))'$은 (x, z)점에서 추정된 품질특성의 벡터이다. 식(2.5)의 불편추정량은 다음과 같다.

$$\widehat{\Sigma}_{\widehat{y}}(x, z) = \widehat{Var}[\widehat{y}(x, z)] = g'(x, z)(X'X)^{-1}g(x, z)\widehat{\Sigma}. \qquad (2.6)$$

식(2.4)는 다시 다음과 같은 적합된 2차회귀모형으로 나타낼 수 있다.

$$\hat{y}_i(x, z) = b_{i0} + x'b_i + x'\widehat{B}_i x + z'\widehat{R}_i z + z'r_i + z'\widehat{D}_i x, \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

잡음인자들 z는 실험할 때는 제어할 수 있으나 실제 현장에서는 제어할 수 없는 확률변수들이다. Box와 Jones(1992)는 평균모형식은 다음과 같다고 하였다.

$$\widehat{m}_i(x) = b_{i0} + x'b_i + x'\widehat{B}_i x + (tr\,\widehat{R}_i)/3, \qquad i = 1, 2, \cdots, r \qquad (2.7)$$

여기서 $tr(\widehat{R}_i)$는 행렬 $\widehat{R}_i$의 대각선 원소들의 합이다.

반응변수가 한 개인 경우 $y(x, z)$의 추정식은 $\hat{y}(x, z)$이고 목표치를 τ라 할 때 손실함수는 다음과 같다.

$$L = c[\hat{y}(x, z) - \tau]^2,$$

여기서 c는 비용계수(cost coefficient)이다. 다중 반응변수인 경우 즉, 반응변수가 여러 개인 경우 $y(x, z)$의 추정식은 $\widehat{y}(x, z)$이고 목표치를 $\tau = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_r)'$라 할 때 손실함수는 다음과 같다.

$$L = [\widehat{y}(x, z) - \tau]'C[\widehat{y}(x, z) - \tau], \qquad (2.8)$$

여기서 C는 비용행렬이다. 식 (2.8)의 기대손실함수(expected loss function)를 구하면 다음과 같다(Graybill(1976)을 보시오).

$$E[L] = [E[\widehat{y}(x, z)] - \tau]'C[E[\widehat{y}(x, z)] - \tau] + tr[C\Sigma_{\widehat{y}}(x, z)] \qquad (2.9)$$

만약 모든 추정된 평균모형식 (2.7)로부터 $\widehat{m}(x) = (\widehat{m}_1(x), \widehat{m}_2(x), \cdots, \widehat{m}_r(x))'$이라하면 식(2.9)은 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$E[L] = [\widehat{m}(x) - \tau]' C[[\widehat{m}(x) - \tau] + E[tr[C\Sigma_{\widehat{y}}(x, z)]] \tag{2.10}$$

식 (2.10)를 최소로 하는 제어인자의 최적조건을 구하기 위하여 $Var[\widehat{y}(x, z)]$의 불편추정량 식 (2.6)를 이용하여 추정하면 다음과 같다.

$$\widehat{E}[L] = [\widehat{m}(x) - \tau]' C[[\widehat{m}(x) - \tau] + E[tr[C\,\widehat{\Sigma}_{\widehat{y}}(x, z)]] \tag{2.11}$$

이제 우리는 추정된 기대손실함수 식 (2.11)을 이용하여 다중 반응 동시최적화 방안을 다음과 같이 제안한다.

$$SL = \underset{x \in R_x}{Min}\ \widehat{E}[L] \tag{2.12}$$

여기서 R_x는 제어인자 x의 흥미영역이다.

3. 예제

통합배열에서 제어인자 x_1, x_2 그리고 잡음인자 z를 <표 1>과 같이 실험배치 한다. <표 1>로부터 제어인자와 잡음인자간의 교호작용을 고려한 추정된 이차회귀모형은 각 각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\widehat{y}_1(x, z) &= 76.00 - 12.37x_1 - 8.96x_2 - 7.22x_1^2 - 8.45x_2^2 \\ &\quad - 8.11x_1x_2 + 5.38z^2 - 1.44z + 2.96x_1z - 1.86x_2z.\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\widehat{y}_2(x, z) &= 103.00 - 12.21x_1 + 6.68x_2 - 13.96x_1^2 - 8.50x_2^2 \\ &\quad - 2.93x_1x_2 + 6.23z^2 - 1.38z + 1.75x_1z - 2.95x_2z.\end{aligned} \tag{3.2}$$

식(3.1) 그리고 식(3.2)로부터 식(2.7)를 이용하면, 다음과 같은 추정된 평균모형식을 얻는다.

$$\widehat{m_1}(x) = 77.79 - 12.37x_1 - 8.96x_2 - 7.22x_1^2 - 8.45x_2^2 - 8.11x_1x_2.$$
$$\widehat{m_2}(x) = 105.08 - 12.21x_1 + 6.68x_2 - 13.96x_1^2 - 8.50x_2^2 - 2.93x_1x_2$$

흥미영역 R_x는 $-1 \le x_1, x_2 \le 1$이며, R_x 상에서 y_1은 망목특성이므로 $\widehat{m_1}(x)$의

목표치 τ_1을 특정값인 75.00으로 두고 y_2는 망대특성이므로 $\widehat{m_2}(x)$의 목표치 τ_2는 최대값 109.65가 된다.

<표 1> 통합배열에 의한 실험자료

실험수	x_1	x_2	z	y_1	y_2
1	-1	-1	-1	80.6	81.4
2	-1	-1	1	74.9	95.9
3	-1	1	-1	83.1	105.0
4	-1	1	1	71.2	103.0
5	1	-1	-1	66.8	74.0
6	1	-1	1	74.2	76.8
7	1	1	-1	38.1	81.2
8	1	1	1	36.8	76.9
9	-1.41	0	0	80.9	100.0
10	-1.41	0	0	42.4	50.5
11	0	-1.41	0	73.4	71.2
12	0	-1.41	0	45.0	101.0
13	0	0	0	77.4	102.0
14	0	0	0	74.6	104.0

식(2.3)에 따라 추정된 분산-공분산행렬은

$$\widehat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 5.4367 & 2.3361 \\ 2.3361 & 68.2638 \end{bmatrix}$$

이다. 비용행렬은 두 반응변수의 손실비용을 고려하여

$$C = \begin{bmatrix} 49 & 21 \\ 21 & 9 \end{bmatrix}$$

와 같이 결정하였다. 동시최적화 방안인 식(2.12)를 적용하면 제어인자의 최적조건은 다음과 같다.

$$x_1 = 0.03, \qquad x_2 = 0.29.$$

제어인자의 최적조건에서 $\widehat{m}_1(x)$, $\widehat{m}_2(x)$는 각 각 74.92와 106.68이고 기대손실비용은 100.44 이다.

4. 결론

본 논문에서는 고려하여야할 품질특성이 여러 개인 경우에 비용함수를 이용한 다중 반응 동시최적화 방안을 제안하였다. 제안한 동시최적화방안은 손실함수를 이용하여 기존의 다중 반응 동시최적화 방안에서 결여되었던 반응변수간의 분산-공분산에 대한 고려와 비용행렬을 이용하여 경제적인 손실비용 등을 고려하였다.

참고문헌

1. Box, G. E. P. and Jones, S. P. (1992). Designing Products That Are Robust to the Environment, *Total Quality Management*, Vol. 3, 265-282.
2. Derringer, G. and Suich, R. (1980). Simultaneous Optimization of Several Response Variables, *Journal of Quality Technology,* Vol. 12, pp. 214-219.
3. Graybill, F. A. (1976). *Theory and Application of the Linear Model*, Duxbury Press, Boston, MA.
4. Khuri, A. I. and Conlon, M. (1981). Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Functions, *Technometrics*, Vol. 23, 363-375.
5. Vining, G. G. (1998). A Compromise Approach to Multiresponse Optimization, *Journal of Quality Technology*, Vol. 30, 309-313.
6. Vining, G. G. and Myers, R. H. (1990). Combining Taguchi and Response Surface Philosophies : A Dual Response Approach, *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, 38-45.
7. Welch, W. J., Yu, T. K., Kang, S. M. and Sacks, J. (1990). Computer Experiments for Quality Control by Parameter Design, *Journal of Quality Technology*, Vol. 22, 15-22.