

## 이동질량을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 동특성

### Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid with Moving mass

손인수\* · 윤한익†

In-Soo Son and Han-Ik Yoon

**Key Words** : Moving Mass(이동질량), Rotating Cantilever Pipe Conveying Fluid(유체이송 회전 외팔 파이프), Dynamic Behavior(동특성), Follower Force(중동력)

#### ABSTRACT

In this paper, we studied about the effects of the rotating cantilever pipe conveying fluid with a moving mass. The influences of a rotating angular velocity, the velocity of fluid flow and moving mass on the dynamic behavior of a cantilever pipe have been studied by the numerical method. The equation of motion is derived by using the Lagrange's equation. The cantilever pipe is modeled by the Euler-Bernoulli beam theory. When the velocity of a moving mass is constant, the lateral tip-displacement of a cantilever pipe is proportional to the moving mass and the angular velocity. In the steady state, the lateral tip-displacement of a cantilever pipe is more sensitive to the velocity of fluid than the angular velocity, and the axial deflection of a cantilever pipe is more sensitive to the effect of a angular velocity.

#### 1. 서론

이송유체와 이동질량을 갖는 회전 외팔 파이프의 대표적인 형태는 산업현장에서 자동화를 목적으로 사용되는 유연한 로봇 매니플레이터를 들 수 있다. 특히 원가절감의 이유로 공정을 줄이기 위해 다목적으로 사용되는 매니플레이터들이 개발됨에 따라 이송유체와 이동질량이 존재하는 형태의 매니플레이터를 생각할 수 있다. 따라서 파이프의 끝단에 집중 중동력으로 작용하는 비점성 유체의 분사력과 이동질량, 그리고 회전요소에 의한 연성관계가 전체 계의 동적특성에 미치는 영향을 연구하고 예측하는 것은 중요한 일이라 할 수 있다. 그러나 이송유체와 이동질량 등의 영향을 고려한 회전하지 않는 보에 관한 연구<sup>(1)</sup>에 비해 회전하는 유체유동 외팔 파이프에 관한 연구는 그리 활발하지 않은 실정이다. 또한 회전하는 외팔 파이프에 이동질량이 존재하는 경우는 더욱 그러하다. 회전운동을 하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Southwell<sup>(2)</sup>로부터 비롯하여 많은 연구자들에 의해 연구<sup>(3-5)</sup>되어 졌다. 최근들어 회전 운동을 하는 외팔보에 대한 연구는 회전하는 유연 매니플레이터의 비선형 자유

진동해석<sup>(6)</sup>, 그리고 끝단질량을 갖는 곡선보의 회전운동의 동특성 해석<sup>(7)</sup> 및 회전 유체튜브의 동특성 해석<sup>(8)</sup> 등 광범위하게 연구되어지고 있다. 이 연구에서는 점성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 회전 외팔 파이프의 끝단에 집중 중동력이 작용되고 이동질량을 갖는 계를 고려하였으며, 계의 운동방정식은 가정모드 방법과 Lagrange 방정식으로 유도하여 수치해석 하였다. 수치해석을 통하여 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향의 끝단변위 및 진동수에 미치는 이동질량, 유동유체, 그리고 회전 각속도의 영향을 비교 고찰하였다. 또 계의 동적특성에 영향을 미치는 각 설계변수들의 동적특성과 특징적 상호연성관계를 제시하였다.

#### 2. 시스템 모델링

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경  $r$ 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 이송유체와 이동질량을 갖는 유연 외팔 파이프를 나타낸 것이다. Fig. 1에서  $x$ 는 외팔 파이프의 고정점  $O$ 로부터 변형 전 임의 질점  $P_0$ 까지의 거리를 나타내며,  $s$ 는 변형 전 임의 질점  $P_0$ 에서 변형 후의 질점  $P$ 까지 변형할 때 파이프가 인장된 길이를 나타낸다. 또  $F_f$ ,  $u$ , 그리고  $u$ 는 각각 유체의 분사력에 의한 집중전선중동력, 임의 질점의 탄성변위 벡터, 그리고 이송 유

† 정희원, 동의대학교 기계공학부

E-mail : hiyoon@deu.ac.kr

Tel: (051)800-1645 Fax: (051)800-2232

\* 정희원, 동의대학교 산업기술개발 연구소

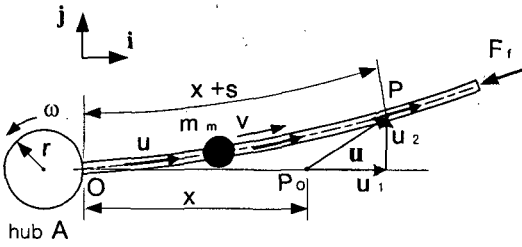


Fig. 1 Schematic diagram of a rotating cantilever pipe conveying fluid with a moving mass

체의 속도를 의미한다.  $m_m$  과  $v$  는 이동질량과 이동질량의 이동 속도를 각각 표현하고 있다. 외팔 파이프의 회전운동 중에 생기는 축방향 및 횡방향의 탄성변형은 가정 모드법 (assumed-mode method)을 이용하여 각각 다음과 같이 근사화 할 수 있다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \quad (1)$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \quad (2)$$

여기서,  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$  는 각각 축방향과 횡방향 가정모드 함수,  $q_{1i}(t)$ ,  $q_{2i}(t)$  는 일반화 좌표를, 그리고  $\mu$  는 일반화 좌표의 수를 나타내고 있다. 그리고 각 가정모드함수  $\phi_{1i}(x)$ ,  $\phi_{2i}(x)$  는 한쪽 단이 고정되고 다른 한쪽은 자유인 외팔보의 방정식으로부터 구할 수 있다.

### 2.1 외팔 파이프의 에너지식

변형에 따른 외팔 파이프의 임의 질점 P의 속도는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{v}_O$  와  $\mathbf{v}_{P/A}$  는 각각 O점의 속도와 P점의 A점에 대한 상대속도를 나타내며,  $\boldsymbol{\omega}$  는 고정축의 회전 각속도 벡터를 나타내고 있다. 식 (3)의 속도를 이용하여 외팔 파이프의 운동에너지와 포텐셜에너지를 구하면 각각 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \int_0^L (\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P) dx \quad (4)$$

$$V_{pl} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

여기서 EI는 외팔 파이프의 굽힘 강성계수, A는 파이프의 단면적을, 그리고 m은 외팔 파이프의 단위길이당 질량을 나타낸다.

### 2.2 이송유체의 에너지식

파이프에 대한 유체의 상대속도가  $u$  이므로, 유체의 절대 속도에는 파이프의 운동이 포함되어야 한다. 따라서 유체의 절대속도의 수직성분, 즉 파이프의 횡방향 성분( $v_y$ )과 축방향에 평행한 수평성분( $v_x$ )은 각각 다음과 같다.

$$v_x = \dot{u}_1 - u_2 \omega + u \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \quad (6)$$

$$v_y = r\omega + \dot{u}_2 + \omega(x + u_1) + u \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

식 (6)을 이용하여 유속의 합을 구할 수 있으며 따라서 이송유체의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_f = \frac{1}{2} m_f \int_0^L (v_f v_f) dx \quad (7)$$

여기서  $m_f$ 는 유체의 단위 길이당 질량이다.

접성이 매우 작은 이송유체의 분사력에 의하여 파이프에 작용되는 힘은 외팔 파이프의 자유단에 작용하는 집중 점선 총동력이 된다. 이러한 점선 총동력에 의한 일은 보존력성분에 의한 일과 비보존력 성분에 의한 일로 구분하여 구할 수 있다.<sup>(1,5)</sup>

### 2.3 이동질량에 의한 에너지식

파이프 위를 이동하는 이동질량의 운동에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>(1)</sup>

$$T_m = \frac{1}{2} m_m \int_0^L (v^2 + v_m^2) dx \quad (8)$$

여기서  $v_m$  은 외팔 파이프의 횡방향 운동이 포함된 이동질량의 속도로서 식 (3)과 식 (6)을 참고하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v_m = r\omega + \dot{u}_2 + \omega(x + u_1) + v \frac{\partial u_2}{\partial x} \quad (9)$$

또 이동질량의 영향에 의하여 식 (5)에 추가되어지는 외팔 파이프의 포텐셜 에너지는

$$V_{pl} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ P(x, t) \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (10)$$

와 같고, 여기서  $P(x, t)$ 는 원심력에 의한 항으로써 다음과 같다.

$$P(x, t) = m_m v t \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 (L^2 - x^2) \quad (11)$$

여기서  $ut$ 는 이동질량의 수평변위이다.

### 2.4 운동방정식

계의 운동방정식은 앞에서 구한 일과 에너지식을 Lagrange 방정식에 대입하여 유도할 수 있다. 이동질량을 가진 유체유동 회전 외팔 파이프의 무차원 운동방정식을 유도하기 위하여 사용한 주요 무차원 매개변수는 다음과 같이 정의한다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad d = \frac{q}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}},$$

$$U = uL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \quad M = \frac{m_f}{m}, \quad M_m = \frac{m_m}{mL}, \quad (12)$$

$$\Omega_m = \omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad \Omega_f = \omega L^2 \sqrt{\frac{m_f}{EI}}$$

식 (12)의 무차원 매개변수들을 이용하여 다음과 같이 행렬형태의 무차원 운동방정식을 구할 수 있다.

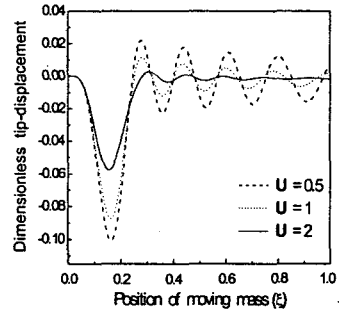
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{d} = [d_{1i} \ d_{2i}]^T$ 이다. 식 (13)의 운동방정식을 이용하여 자유진동해석에 대한 계의 고유치 문제를 해결할 수 있다.

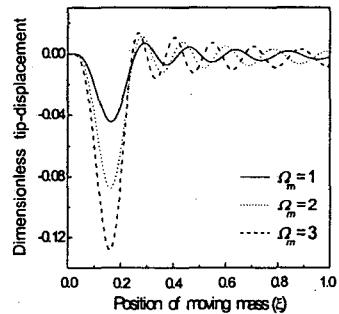
### 3. 수치해석 결과 및 고찰

앞 절에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 이송유체를 갖는 회전 외팔 파이프의 동적특성을 수치해석을 통하여 비교고찰 하였다. Fig. 2는 이동질량의 속도  $v$ 가 0.1 m/s로 일정한 경우 회전 외팔 파이프의 끝단 횡변위에 미치는 각 파라미터의 영향을 표현한 것이다. Fig. 4(a)는 유체의 속도, 그리고 (b)는 회전 각속도에 따른 외팔 파이프의 끝단 횡변위이다. Fig. 2(b)에서 파이프의 회전 각속도가 1인 경우에 비하여 회전 각속도가 2인 경우 과도상태에서 회전 외팔 파이프의 최대 처짐은 2배 정도 증가하며, 각속도가 3일 때 최대 처짐은 약 2.9배 정도 증가한다. Fig. 3과 Fig. 4은 무차원 이동질량의 크기가 0.3으로 일정한 경우에 유체의 속도와 회전 각속도에 따른 회전 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향 진동수를 각각 나타낸 것이다. 먼저, Fig. 3의 유속의 영향을 살펴보면, 외팔 파이프의 축방향 진동수는 유속과 서로 반비례적이며, 외팔 파이프의 횡방향 진동수와는 서로 비례적임을 알 수 있다. 또 Fig. 4에서 볼 수 있는 것처럼 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향 진동수는 회전 각속도와 서로 비례적인 경향을 보인다. Fig. 4(a)의 파이프의 축방향 진동수에서 과도상태에서는 회전 각속도에 관계없이 이동질량이 파이프의 후반부로 이동할수록 점점 외팔 파이프의 진동수가 증가하지만 정상상태에서는 파이프

의 진동수가 점점 감소한다. 그러나 Fig. 4(b)의 횡방향 진동수에서는 회전각속도가 비교적 큰  $\Omega_m = 3$ 에서만 위와 같은 현상이 나타날 뿐, 그보다 작은 회전 각속도에서는 전반적으로 이동질량이 파이프의 후반부로 이동할수록 외팔 파이프의 진동수는 감소하는 경향을 나타낸다.

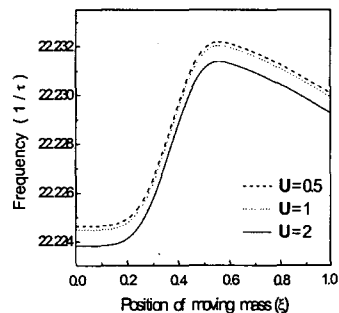


(a) Effect of fluid velocity ( $M_m=0.5, \Omega_m=2$ )

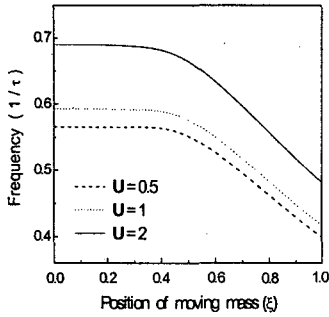


(b) Effect of angular velocity ( $M_m=0.5, U=0.5$ )

Fig. 2 Bending tip-displacement of a rotating cantilever pipe conveying fluid with a moving mass ( $v = 0.1$  m/s)

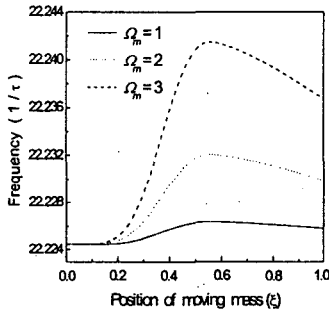


(a) Longitudinal frequency

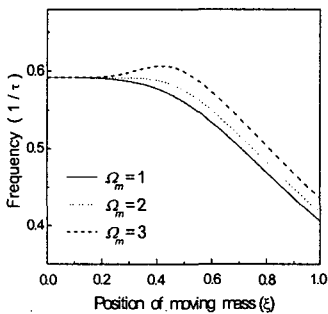


(b) Lateral frequency

Fig. 3 Frequency variation of a rotating cantilever pipe according to the fluid velocity ( $M_m = 0.3, \Omega_m = 2$ , first mode)



(a) Longitudinal frequency



(b) Lateral frequency

Fig. 4 Frequency variation of a rotating cantilever pipe according to angular velocity ( $U = 0.5, M_m = 0.3$ , first mode)

#### 4. 결론

이동질량과 유동유체를 가지는 회전 외팔 파이프의 동특성에 미치는 각 파라미터들의 영향, 즉 유속, 회전 각속도, 이동질량이 외팔 파이프의 축방향 및 횡방향의 동특성에 미치는 영향을 수치해석 하였다. 이 연구의 수치해석 예제에 적용한 파라미터들에 대하여 얻어진 연구결과를 요약하면, 회전 외팔 파이프의 끝단 횡변위에 미치는 영향은 과도상태에서는 회전 각속도의 영향이, 그리고 정상상태에서는 유체의 속도에 의한 영향이 가장 크게 나타난다. 유속과 회전 각속도가 일정한 경우 정상상태에서는 이동질량이 파이프의 후반부로 이동할수록 파이프의 진동수는 감소하는 경향을 가진다. 이러한 결과들은 이동질량과 유동유체를 가지고 회전하는 외팔 파이프의 각 설계변수들의 동적특성과 이들의 특징적 연성관계를 제시하였고, 이를 바탕으로 로봇의 매니플레이터 등의 다양한 기계장치의 변위를 제어하기 위한 연구에 기초가 될 수 있을 것으로 판단된다.

#### 참고 문헌

- (1) 윤한익, 손인수, 2002, "이동질량을 가진 유체유동 외팔 파이프의 동특성," 한국소음진동공학회논문집, 제 12 권, 제 7 호, pp. 550~556.
- (2) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," British A.R.C. Reports and Memoranda No. 766.
- (3) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," Journal of Sound and Vibration, 181(2), pp.261-278.
- (4) Yoo, H. H., Kwak, J. Y. and Chung, J., 2001 "Vibration Analysis of Rotating Pre-twisted Blades with a Concentrated Mass," Journal of Sound and Vibration, 240(5), pp.891~908.
- (5) 윤한익, 손인수, 2003, "회전하는 유체이송 외팔 파이프의 동특성 해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권, 제 1 호, pp. 26~32.
- (6) Hamdan, M. N. and Al-Bedoor, B. O., 2001, "Non-Linear Free Vibrations of a Rotating Flexible Arm," Journal of Sound and Vibration, 242(5), pp. 839~853.
- (7) Park, J. H. and Kim, J. H., 1999, "Dynamic Analysis of Rotating Curved Beam with a Tip Mass," Journal of Sound and Vibration, 228(5), pp. 1017~1034.
- (8) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever," Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1~24.