

C¹보요소를 이용한 유연매체의 기하비선형 해석

Geometric Nonlinear Analysis of Flexible Media Using C¹ Beam Element

지중근* · 홍성권** · 장용훈*** · 박노철**** · 박영필*****

Jung-Geun Jee, Sung-Kwon, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park

Key Words : Principle of Virtual Work(가상일의 원리), Geometric Nonlinearity(기하학적 비선형), Updated Newton-Raphson Method.

ABSTRACT

In the development of sheet-handling machinery, it is important to predict the static and dynamic behavior of the sheets with a high degree of reliability because the sheets are fed and stacked at such a high speed. Flexible media behaves geometric nonlinearity of large displacement and small strain. In this paper, static analysis of flexible media are performed by FEM considering geometric nonlinearity. Linear stiffness matrix and geometric nonlinear stiffness matrix based on the updated Lagrangian approach are derived using C¹ beam element, and numerical simulations are performed by Updated Newton-Raphson(UNR) method.

1. 서론

프린터, 복사기, 팩시밀리, ATM 등 유연매체를 사용하는 다양한 사무자동화 기기들이 널리 보급되고 있으며, 고속화 정밀화 추세를 보이고 있다. 이러한 기기에서 피딩(Feeding) 시스템은 중요한 역할을 담당하고 있으며, 반송시에 발생할 수 있는 체류와 잼의 예측은 피딩 기구를 설계하는데 있어서 중요한 인자라 할 수 있다. 유연매체는 대변형, 소변형률의 기하비선형 거동을 보이며, 본 연구에서는 C¹ 빔 요소를 이용하여 선형 강성 행렬과 대변형에 의한 기하비선형 행렬을 Updated Lagrangian 방법을 이용하여 유도 하였으며 Updated Newton-Raphson(UNR) 방법을 이용하여 시뮬레이션을 수행하였다.

2. 강성행렬의 유도

강성 행렬은 식(2.1)의 힘 평형 식으로부터 식(2.2)의 가상 $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ (2.1)

일의 원리(Principle of Virtual Work)를 이용하여 얻어진다.

$$\delta W^{ext} = \delta W^{int} \quad (2.2)$$

식(2.2)에서 좌변의 외력에 의한 가상일은 식(2.3)과 같이 유도된다.

$$\delta W^{ext} = \int_V \delta u^T b dV + \int_{\Gamma_t} \delta u^T t^* d\Gamma_t \quad (2.3.1)$$

$$= \int_V \delta d^T N^T b dV + \int_{\Gamma_t} \delta d^T N^T t^* d\Gamma_t \quad (2.3.2)$$

$$= \int_V \delta d^T N^T b dV + \int_{\Gamma_t} \delta d^T N^T t^* d\Gamma_t \quad (2.3.3)$$

$$= \delta d^T \left[\int_V N^T b dV + \int_{\Gamma_t} N^T t^* d\Gamma_t \right] \quad (2.3.4)$$

$$= \delta d^T f^{ext} \quad (2.3.5)$$

식(2.3.1)의 우변은 체적력에 의한 일과 외력에 의한 일을 나타낸다.

* 연세대학교 기계과 대학원
E-mail : jj7315@hanmail.net
Tel : (02) 2123-4677, Fax : (02) 353-8460

** 연세대학교 기계공학과
*** 연세대학교 기계공학부 조교수
**** 연세대학교 정보저장기기협동과정 부교수
***** 연세대학교 기계공학부 정교수

식(2.2)의 우변은 내력에 의한 가상일을 나타내며 식(2.4)과 같이 나타내어진다.

$$\delta W^{int} = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV \quad (2.41)$$

$$= \int_V \delta d^T B^T C B d dV \quad (2.42)$$

$$= \delta d^T \int_V B^T C B dV \cdot d \quad (2.43)$$

$$= \delta d^T f^{int} \quad (2.44)$$

식(2.3.5)의 외력은 식(2.5)과 같이 나타내어지고, 식(2.4.4)의 내력은 식(2.6)과 같이 나타내어진다.

$$f^{ext} = \int_V N^T b dV + \int_{r_i} N^T t^* dV \quad (2.5)$$

$$f^{int} = \int_V B^T C B dV \cdot d, \quad (2.6)$$

식(2.6)은 선형시스템의 경우 식(2.7)과 같이 강성행렬과 변위의 곱으로 나타내어지며,

$$f^{int} = K d \quad (2.7)$$

식(2.7)의 우변의 K 는 식(2.8)로부터 얻어진다.

$$K = \int_V B^T C B dV \quad (2.8)$$

기하학적 비선형(Geometric Nonlinearity) 해석의 경우에는 변형이 상대적으로 크다는 가정 하에 강성행렬을 구성하므로 변위의 2차 미분항을 무시할 수 없게 된다.

2차항을 고려한 변형률식은 식(2.9)와 같이 나타내어진다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (2.9)$$

식(2.9)에서 U 는 C' 범의 경우 식(2.10)과 같이 나타내어진다.

$$U = u - y \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

식(2.10)을 식(2.9)에 대입하여 정리하면 식(2.11)를 얻게

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \quad (2.11)$$

되며, 식(2.11)는 다시 식(2.12)와 같이 선형 변형률 항과 비선형 변형률항으로 나타내어진다.

$$\epsilon_x = \epsilon^L + \epsilon^{NL} \quad (2.12)$$

따라서 기하학적 비선형을 고려한 내력에 의한 가상일은 식(2.13)과 같이 나타내어진다.

$$\delta W^{int} = \int_V \delta \epsilon^T \sigma dV \quad (2.13.1)$$

$$= \int_V \delta \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}^T \sigma dV + \frac{1}{2} \int_V \delta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^T \sigma dV \quad (2.13.2)$$

2.1 선형강성행렬

식(2.13.2)의 첫 항을 이용하여 선형강성행렬을 유도하게 된다.

$$\int_V \delta \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}^T \sigma dV = \int_V \delta \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\}^T E \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} dV \quad (2.14.1)$$

$$= \int_V \delta d^T \begin{bmatrix} N_1' \\ -yN_3'' \\ -yN_4'' \\ N_2' \\ -yN_5'' \\ -yN_6'' \end{bmatrix} E \times [N_1' - yN_3'' - yN_4'' \quad N_2' - yN_5'' - yN_6''] ddV \quad (2.14.2)$$

$$= \delta d^T \int_V \begin{bmatrix} N_1' \\ -yN_3'' \\ -yN_4'' \\ N_2' \\ -yN_5'' \\ -yN_6'' \end{bmatrix} E \times [N_1' - yN_3'' - yN_4'' \quad N_2' - yN_5'' - yN_6''] dV \cdot d \quad (2.14.3)$$

$$= \delta d^T f^{int} \quad (2.14.4)$$

위 식에서 내력 f^{int} 는 식(2.15)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f^{int} = K_E d \quad (2.15)$$

식(2.15)의 선형 탄성행렬 K_E 는 다음과 같이 구하여진다.

$$K_E = \int_V \begin{bmatrix} N_1' \\ -yN_3'' \\ -yN_4'' \\ N_2' \\ -yN_5'' \\ -yN_6'' \end{bmatrix} E \times [N_1' - yN_3'' - yN_4'' \quad N_2' - yN_5'' - yN_6''] dV \quad (2.16)$$

식(2.16)로부터 선형강성행렬을 얻게 된다.

2.2 비선형 강성행렬

식(2.13.2)의 둘째 항을 이용하여 기하비선형 강성행렬을 유도하게 된다.

$$\frac{1}{2} \int_V \delta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^T \sigma dV \quad (2.17.1)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \left\{ \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^T \sigma dV \quad (2.17.2)$$

$$= \frac{1}{2} \int_V \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \delta \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \sigma dV \quad (2.17.3)$$

$$= \delta d^T \int_V \begin{bmatrix} N_1' \\ N_3' \\ N_4' \\ N_2' \\ N_5' \\ N_6' \end{bmatrix} \times \left[N_1' \ N_2' \ N_3' \ N_4' \ N_5' \ N_6' \right] \sigma dV \cdot d \quad (2.17.4)$$

$$= \delta d^T f^{int} \quad (2.17.5)$$

여기서 내력 f^{int} 는 식(2.18)과 같이 구하여진다.

$$f^{int} = K_G d \quad (2.18)$$

식(2.18)의 기하비선형강성행렬 K_G 는 다음과 같이 구해지게 된다.

$$K_G = \int_V \begin{bmatrix} N_1' \\ N_3' \\ N_4' \\ N_2' \\ N_5' \\ N_6' \end{bmatrix} \times \left[N_1' \ N_2' \ N_3' \ N_4' \ N_5' \ N_6' \right] \sigma dV \quad (2.19.1)$$

$$= F_x \int_x \begin{bmatrix} N_1' \\ N_3' \\ N_4' \\ N_2' \\ N_5' \\ N_6' \end{bmatrix} \left[N_1' \ N_2' \ N_3' \ N_4' \ N_5' \ N_6' \right] dx \quad (2.19.2)$$

식(2.19.2)로부터 기하비선형행렬을 얻게 된다.

식(2.16)의 K_E 와 식(2.19.2)의 K_G 를 결합하여 K_I 를 얻게 된다.

2.3 수치해석 방법

점진-반복법(Incremental Iterative Method)을 사용하여

$$K_I d\Delta = dP \quad (2.20)$$

를 풀게 되며, 여기서는 Updated Newton-Raphson(UNR) 방법을 사용하였다. 이 방법은 가해지는 힘을 미소힘으로 나누고 각각에 대해서 다시 반복법을 사용하여 변위를 구하는 방법으로 Fig.1에서 알 수 있듯이 기울기는 가해지는 힘의 단계마다 다시구해지게 되며 외력 P_i 에 대한 변위 U 는

$$U = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (2.21)$$

식(2.21)과 같이 얻어지게 된다.

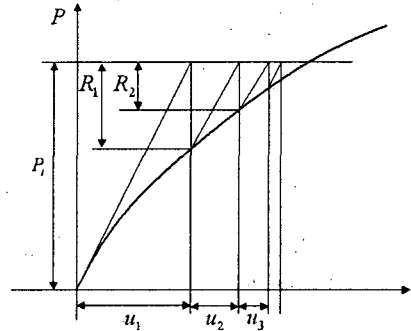


Fig.1 Updated Newton-Raphson Method

3. 결과 및 고찰

Fig. 2는 외팔보의 끝단에 y 방향으로 $P = 10EI/L^2$ 의 힘을 가하여 얻은 변형형상으로 힘을 100개의 구간으로 나누어 UNR법을 사용하여 구한 것이다.

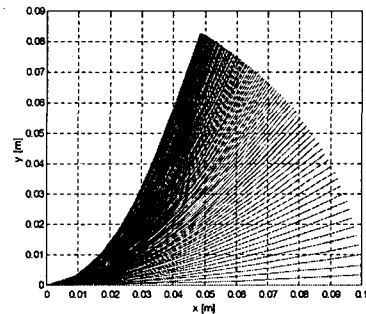


Fig. 2 Deflection Curves of Cantilever Beam with End Force

Fig. 3은 Fig. 2에서 구한 변형 형상을 처짐량과 모멘트 팔길이를 전체 보의 길이로 나누어 무차원화 하여 그린 것으로 δ 는 처짐량을, Δ 는 모멘트의

팔길이를 각각 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 기하비선형을 고려한 FEM 결과가 해석해와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

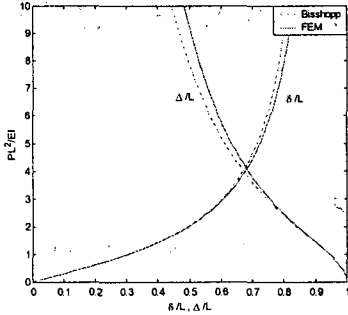


Fig. 3 Normalized Deflection Curves of Fig.2

Fig. 4는 외팔보의 끝단에 $M = 2\pi EI/L$ 의 모멘트를 가하여 구한 형상으로 Fig.2에서의 마찬가지로 모멘트를 100개의 구간으로 나누어 계산하였다.

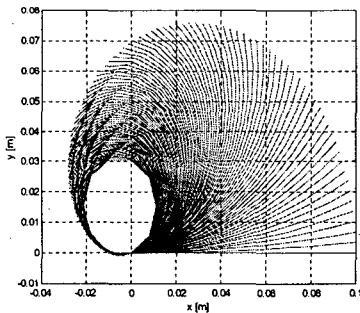


Fig. 4 Deflection Curves of Cantilever Beam with End Moment

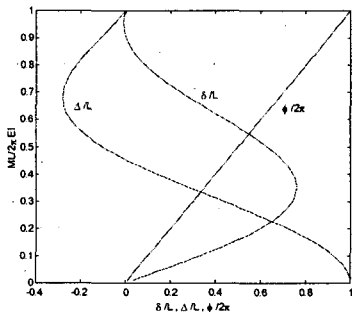


Fig. 5 Normalized Deflection Curves of Fig.4

Fig. 5는 Fig. 4에서 구한 변형 형상을 처짐량과 모멘트 팔길이를 전체 보의 길이로 나누고 끝단 각도를 2π 로 나누어 무차원화 하여 그린 것으로 끝단의 각도는 가해지는 모멘트와 비례하여 증가함을 알 수 있고 끝단에 가해지는 모멘트가 $2\pi EI/L$ 일 때 정확히 원이 됨을 알 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 C¹에 보 요소를 이용하여 기하비선형 거동에 대한 선형강성행렬과 기하비선형강성 행렬을 유도하였으며 이를 UNR방법을 이용하여 변형 형상을 예측하여 보았다. Fig. 3에서 가해지는 힘이 커지면 해석해와 차이가 커지게 되는데 이것은 FEM 해석시의 수렴판정 조건을 더 작게 주고 요소의 수를 늘림으로써 줄어들 것으로 예상된다. 또한 Fig. 5에서는 모멘트를 $2\pi EI/L$ 로 주었을 때 처짐량과 모멘트의 팔길이가 정확히 0 이됨을 알 수 있고 가해진 모멘트의 정수배에 따라서 중심원의 개수가 늘어나게 된다.

후 기

본 연구는 산업자원부 부품소재 개발사업단의 “환류식 지폐 입출금 장치 개발”(10012150) 과제를 맡은 (주)노틸러스효성의 위탁과제인 “유연 매체의 거동 해석 및 제어”를 수행하면서 얻어진 결과이며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) William McGuire, et al. 2000, Matrix Structural Analysis, John Wiley&Sons, Inc, New York.
- (2) K.E. BISSHOPP and D.C. 1944. DRUCKER. Large Deflection of Cantilever Beams. Quarterly of Applied Math., 2, 168-171.
- (3) Faris G. A. Al-Bermani and Stritawat Kitipornchai, 1990, “Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures Using Least Element/Member”, Journal of Structural Engineering, Vol. 116, No.1, pp.215~234.
- (4) Yeong-Bin Yang, and Hwa-Thong Chiou, 1988, “Rigid Body Motion Test for Nonlinear Analysis with Beam Elements”, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 9, pp.1404~1419.