

사각형 외팔보에서의 일대일 공진

One to One Resonance on the Rectangular Cantilever Beam

김명구* · 박철휘** · 조종두** · 이흥식**

Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak, Chong-Du Cho, Heung-Shik Lee

Key Words : Non-linear Coupling (비선형 연성), Planar Motion (평면운동), Non-planar Motion (비평면운동), Jump Phenomenon (도약현상), Flexible Structures (유연 구조물), Internal Resonance (내부공진), One-to-one Resonance (일대일 공진)

ABSTRACT

In this paper, the response characteristics of one to one resonance on the rectangular cantilever beam in which basic harmonic excitations are applied by nonlinear coupled differential-integral equations are studied. This equations have 3-dimensional non-linearity of nonlinear inertia and nonlinear curvature. Galerkin and multi scale methods are used for theoretical approach to one-to-one internal resonance. Nonlinear response characteristics of 1st, 2nd, 3rd modes are measured from the experiment for basic harmonic excitation. From the experimental result, geometrical terms of non-linearity display light spring effect and these terms play an important role in the response characteristics of low frequency modes. Dynamic behaviors in the out of plane are also studied.

1. 서 론

비선형 동역학들은 유연 구조물인 로봇이나 대형 우주 구조물의 동역학적인 현상을 분석하기 위하여 연구되고 있다. 모드연성이나 분기(saturation)현상과 같은 여러 가지 비선형 현상에 대한 동적 응답현상은 부분적으로 유연성을 갖는 기계시스템으로 구성된 진동요소들에서도 발생할 수 있다. 또한 큰 유연성을 갖고 있는 공간 구조물에서 잠재되어 있는 비선형 현상이 발생 가능성이 있으며 비선형 현상이 발생하였을 때, 이것을 쉽게 회피하기가 어렵다. 따라서 탄성운동을 하는 보 형태의 구조물의 비선형 현상을 이론적으로 예측을 하고 실험적으로 증명을 하여야 한다. 모순이 없는 이론적인 모델들로 유연한 구조물에서 나타날 수 있는 모든 동적현상을 이해하고 설명할 수 있을 때 안전하고 신뢰성이 있는 유연구조물의 설계와 제작이 가능하다.

Haight and King⁽¹⁾ 그리고 Tseng과 Dugundji⁽²⁾는 탄성학적인 분석에서 나온 결과를 이용하여 구조물의 응답특성을 실험적으로 증명을 시도한 연구자들이었다. 기초조화가진을

받는 외팔보의 휨-휨(flexural-flexural) 단일모드의 비선형 응답 특성에 대하여 연구를 하였다. 이 분석은 한 쌍의 미분 방정식을 기초로 하고 있으며, 이 방정식에서는 기본적으로 비틀림과 곡률에 의해 발생하는 비선형 요소를 무시하였다. 그 결과 이론과 실험사이에 약간의 상관관계만을 얻을 수 있었다. Tseng과 Dugundji는 기초부의 횡방향 기초부에 의해 발생하는 고정 끝단을 갖는 일직선 보의 비선형 진동에 대하여 연구 하였다. 비선형 특성인 단순조화, 고차운동, 그리고 분수조화 응답특성에서 실험과 이론이 잘 일치하는 결과를 얻었다. Haddow, Barr 그리고 Mook⁽³⁾는 내부 공진이 있는 2차자유도 구조물의 1차 공진에 대한 이론적, 실험적 연구를 수행하였다. 다중 시간척도법(method of multiple time scales)에 기초한 섭동 분석을 통하여 이론적 해석과 실험결과가 정성적으로 일치함을 보였다. Nayfeh⁽⁴⁾는 다중 시간척도법을 이용한 매개변수 가진(parametric excitation) 작용을 받는 끝에 집중 질량(lumped tip-mass)을 가진 외팔보의 비선형 응답을 실험과 이론적 분석을 하였다. Crespo da Silva⁽⁵⁾⁽¹⁰⁾는 주기적인 횡방향의 기초 가진에 의해 발생하는 외팔보의 동적응답 특성인 일대일 모드 연성에 대하여 이론적이고 실험적으로 연구하였다. 외팔보의 비선형 특성에서 실험결과들은 비선형 곡률과 비선형 관성효과를 고려한 한 쌍의 미분방정식에 기초로한 이론적인 예측 결과와 아주 잘 일치하는 결과를 얻었다. 본 연구는 횡방향으로

* 인하대학교 기계공학과
E-mail : mgkim21@hotmail.com
Tel: (032)860-7321, Fax: (032) 868-1716
인하대학교 기계공학과

**

기초조화가진을 받는 직사각형의 외팔보의 일대일 공진현상에서 발생하는 보의 in-plane 운동과 out of plane 운동을 비교 분석하였다. Crespo da Silva가 유도한 이론적인 결과와 정성적으로 상호 비교 분석하였다.

2. 일대일 공진에서의 빔의 비선형 현상⁽⁵⁾⁽¹⁰⁾

보의 비틀림모드가 굽힘모드의 주파수 보다 훨씬 크며 사인파에 의해서 횡방향 기초부가 가진되는 보에서 일대일 공진에 의해서 평면운동과 비평면 운동이 나타난다. 평면운동에 의해서 가진되는 보의 길이는 L, 단위 길이당 질량은 m, 굽힘강성은 D_n, D_t이다. 일정한 단면적을 가진 균질보의 비선형 운동방정식은 다음과 같이 미분-적분 방정식으로 주어진다. 이 식에서 외부의 가진력은 Q_v(s,t)=e²cos(εt²)이다.

$$\ddot{v} + \square \dot{v} + \beta_y v'' = (1-\beta) \left[w'' \int_0^s v'' ds - w' \int_0^s v' ds \right] - [(1-\beta)^2/\beta] \left[w'' \int_0^s v'' ds - w' \int_0^s v' ds \right] - \beta_y (v' v'' + w' w'') - \frac{1}{2} \left\{ w'' \int_0^s (v'' + w'') ds \right\} + \epsilon^2 \cos(\epsilon t) \quad (1a)$$

$$\ddot{w} + \square \dot{w} + w'''' = (1-\beta) \left[v'' \int_0^s w'' ds - v' \int_0^s w' ds \right] + [(1-\beta)^2/\beta] \left[v'' \int_0^s w'' ds - v' \int_0^s w' ds \right] - (w' v' v'' + w' w'') - \frac{1}{2} \left\{ v'' \int_0^s (v'' + w'') ds \right\} \quad (1b)$$

식(1a, b)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$v(0,t) = w(0,t) = v'(0,t) = w'(0,t) = 0 \\ v''(1,t) = w''(1,t) = v'''(1,t) = w'''(1,t) = 0$$

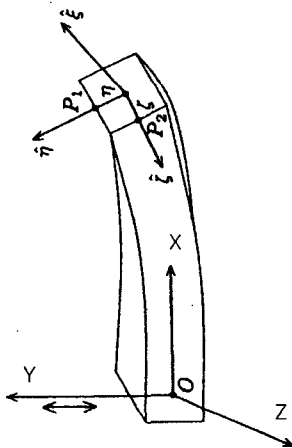


Fig. 1 Coordinate systems used in the formulation of the governing equation

방정식(1a)의 e는 보의 길이에 의해 정규화된 보의 길이에 대한 가진력의 진폭이며 t는 무차원화 된 시간변수이다. 또한 s는 L, ()' = ∂()/∂s, ()'' = ∂²()/∂s²에 의해 정규화된 보의 호의 길이를 나타낸다. 위의 식들을 유도할 때 사용된 좌표계는 관성 단위벡터(x̂, ŷ, ẑ)와 국부적인 단위벡터(ξ̂, η̂, ζ̂)을 사용하였다. 기초조화가진은 y축방향을 따라서 가진되며 v(s,t)와 w(s,t)는 보의 길이에 의해 정규화된 ŷ와 ẑ방향의 보의 중심선에서의 탄성 변화량을 나타낸다.

대칭보의 경우 Ω ≈ ω, B_y = 1 인 보에 대한 평면 굽힘모드와 비평면 굽힘모드 사이의 비선형 일대일 공진 현상을 분석하기 위하여 위의 식을 사용하였다. 여기서 B_y는 평면에서의 굽힘 강성과 비평면에서의 굽힘강성의 비이며, ω는 ω 방향의 운동의 비감쇠 고유주파수이다. 평면운동에 의한 변형변수 v(s, t)와 비평면 운동에 의한 변형변수 w(s, t)를 α에 대하여 멱급수로 전개를 한다.

$$\alpha(s, t, \epsilon) = e \alpha_1(s, t, \epsilon) + e^3 \alpha_3(s, t, \epsilon) + \dots \\ \alpha_1(s, t, \epsilon) = F(s) A_a(t) \cos[\omega t + B_a(t)] \\ t_i = e^i t \quad (i=0,1)$$

섭동매개 변수 ε로 멱급수 형태로 전개를 하여 영구항을 제거하면 다음과 같은 조건을 얻을 수 있다.

$$2 \alpha_5 \square \square_v + \epsilon^2 c_2 \omega A_w - \alpha_5 \epsilon^2 A_w A_w'' \sin \Psi - \epsilon^2 f_3 \sin \Phi = 0, \quad (2a)$$

$$2 \alpha_5 \square \square_w + \epsilon^2 c_2 \omega A_w + \alpha_5 \epsilon^2 A_w A_w'' \sin \Psi = 0, \quad (2b)$$

$$\alpha_5 A_w [-2 \epsilon^2 A_w'' (1 - \alpha_6) + \epsilon^2 A_w'' (\cos \Psi - \alpha_6)] + 2 \omega^2 \epsilon^2 A_w (\sigma_2 - \Delta_2) + \epsilon^2 \square \square \cos \Phi = 0, \quad (2c)$$

$$A_w'' [-2 \epsilon^2 \Psi' \frac{2 \omega^2}{\alpha_5} \sigma_2 + \epsilon^2 A_w'' (1 - \alpha_6) + \epsilon^2 A_w'' (\cos \Psi - \alpha_6)] = 0. \quad (2d)$$

위 식에서

$$f = \epsilon \omega^2 \int_0^1 F(s) ds \approx \omega^2 \int_0^1 F(s) ds \triangleq \epsilon^3 f_3 \quad (3a)$$

$$\alpha_3 = \int_0^1 F(s) \{ F'(s) [F'(s) F''(s)] \}' ds, \quad (3b)$$

$$\alpha_4 = \int_0^1 F(s) [F'(s) \int_1^s \int_1^s F''(s) ds ds]' ds, \quad (3c)$$

$$\alpha_5 = \omega^2 \alpha_4 / 2 - \alpha_3 / 4, \quad \alpha_6 = \alpha_3 / 2 (\alpha_5), \quad (3d, e)$$

$$\Psi = 2(B_w - B_v), \quad \Phi = \epsilon^2 \sigma_2 \omega t - B_v, \quad (3f, g)$$

$$F(s) = \cosh(rs) - \cos(rs) - [(\cosh r + \cos r) / (\sinh r + \sin r)] [\sinh(rs) - \sin(rs)]. \quad (3h)$$

고유함수 $F(s)$ 는 $F(0) = F'(0) = F''(0) = F'''(0) = 0$ 인 미분방정식 $F'''' - \tau^4 F = 0$ 을 만족시키며 τ 은 특성방정식 $1 + (\cosh \tau) \cos \tau = 0$ 에 의해서 결정된다. 매개변수 $e^2 c_2$ 와 $e^3 c_3$ 는 $C = e^2 c_2$ 와 $f = e^3 c_3$ 로 설정을 하고 식(2a-d)에 대입을 한다. 작은 구조감쇠와 $\omega = \tau^2$ 인 근방의 주파수에서 외력의 주파수가 Ω 인 경우 공진현상이 나타난다. $\varepsilon^2 \Delta_2$ 와 $\varepsilon^2 \sigma_2$ 는 식(4a,b)와 같이 정의가 되는 detuning 매개변수이다.

$$\sqrt{\beta_y} = 1 + \varepsilon^2 \Delta_2 + \dots, \quad (4a)$$

$$\Omega = \omega(1 + \varepsilon^2 \sigma_2) \quad (4b)$$

외팔보의 1st, 2nd, 3th 모드에 대한 $\alpha_3 \sim \alpha_6$ 의 수치값은 참고문헌(10)에 있다. 두 개의 평형상태의 해 $A_a = \text{constant} \approx A_{ae}(a = v, \omega)$ 는 식(2a-d)에 의해 구해진다.

$$A_{we} = 0, \quad c_2 \omega A_{we} - f_3 \sin \phi_e = 0, \quad (5a, b)$$

$$\alpha_5 A_{ve}^3 (1 - \alpha_6) + 2\omega^2 A_{ve} (\sigma_2 - \Delta_2) + f_3 \cos \phi_e = 0, \quad (5c)$$

$$c_2 \omega A_{ve} - \alpha_5 A_{ve} A_{we}^2 \sin \psi_e - f_3 \sin \phi_e = 0, \quad (6a)$$

$$A_{we} [c_2 \omega + \alpha_5 A_{ve}^2 \sin \psi_e] = 0 \quad (6b)$$

$$\alpha_5 A_{ve} [A_{ve}^2 (1 - \alpha_6) + A_{we}^2 (\cos \psi_e - \alpha_6)] + 2\omega^2 A_{ve} (\sigma_2 - \Delta_2) + f_3 \cos \phi_e = 0 \quad (6c)$$

$$A_{we}^2 \frac{2\omega^2}{\alpha_5} \sigma_2 + A_{we}^2 (1 - \alpha_6) + A_{ve}^2 (\cos \psi_e - \alpha_6) = 0 \quad (6d)$$

방정식(2a-d)에 대한 평형상태의 해는 식(1a, b)에 대한 주기적인 근사해와 일치하고 있다. 외팔보의 운동에 대한 안정성은 $x = A v, A \omega, \psi, \phi$ 인 $x = x_e + x_s(t)$ 의 평형상태의 섭동을 일으키고 있다. 방정식(2a-d)에서 선형방정식에 대한 Routh-Hurwitz안정성 조건을 이용하여 방정식의 안정성을 결정할 수 있다. 고유 주파수가 가진 주파수 Ω 근처가 아닌 진동모드에 대한 영구항의 제거조건은 $f_3 = 0$ 인 식 (2a-d)와 같으므로 이 식들은 이러한 모드의 진폭들이 시스템 내의 감쇠로 인하여 진폭이 0으로 감소함을 보여주고 있다. $f_3 \neq 0$ 인 경우, 식(5a-c)의 지배를 받는 평형상태 해에 해당하는 정상상태 운동은 평면운동 성분으로만 구성되어 있다. 즉 보는 가진 되고 있는 평면에서 평면응답을 한다. 비선형 관성과 비선형 곡률효과는 계수 α_5, α_6 과 관련된 항들에 의해서 표현된다. 외팔보의 어떤 모드가 가진 주파수로 가진 되느냐에 따라서 진폭-주파수 응답특성은 경화 스프링 특성을 가질 수도 있고 연화 스프링 특성을 가질 수도 있다. 가진 주파수가 외팔보의 1차 모드의 주파수인 경우 비선형 관성 및 곡률의 효과는 거의 사라지고 보의 응답특성은 선형응답에 가깝게 나타난다. 방정식 (6a-d)에 의해 정의되는 보의 정상상태의 운동은 비선형현상에 의해서 $e A_{ve}$ 와 $e A_{we}$ 가 발생한다. 보의 응답특성은 그림1에서 나타난 관성 y 축을 따라서 가진력이 공급되었을 때 z 축 방향의 비평면운동이 발생한다. $B_y \approx 1$ 인 보의 평면에서의 고유주파수와 비평면에서의 고유주파수가 서로 비슷하기 때문에 평면방향의 가진력

에 의해서 보에 입력되는 진동에너지가 비선형 현상에 의해 비평면 방향으로 에너지전이가 되어서 비평면 운동이 발생한다. 이러한 비선형 현상을 일반적으로 일대일 내부 공진현상이라고 한다.

3. 외팔보 비선형 변수들의 해석

실험결과와 이론적인 예측의 상호연관성을 밝히기 위하여 방정식(1a, b)의 점성감쇠계수 C 와 각각의 모드에서의 고유주파수 ω 를 계산하여야 한다. 외팔보의 감쇠계수 C 는 대수감쇠율(logarithmic decrement method)방법을 이용하여 측정하였다. 보의 각각의 모드에서의 고유주파수는 가진함수 Pseudo-random신호를 사용하였고, Time Weighting함수는 Rectangular Weighting을 선택하여 FRF방법으로 고유주파수를 측정하였다.

Table 1 Measured eigen-frequencies and calculation of the damping coefficient

Mode	ω_{meas} (Hz)	ω_{theory} (non-dimensional)	$\sqrt{\frac{D\eta}{mL^4}} = \frac{2\pi\omega_{meas}}{\omega_{theory}}$ (rad/s)	$C = e^2 c_2$
1	8.75	3.5160	15.63	0.0625
2	55.25	22.0346	15.75	0.0936
3	152.25	61.6979	15.50	0.0625

이 방법으로 보에 대한 시간 정규화계수 $\sqrt{\frac{D\eta}{mL^4}}$ 을 결정하였고 외팔보의 평면운동에 대한 세 개의 고유주파수는 다음 Table1과 같이 표현할 수 있다. 여기서 $\lambda_1 = 1.875, \lambda_2 = 4.694, \lambda_3 = 7.855$ 이다. 측정된 감쇠계수들은 여러 인자들의 영향을 받고 있다. 이 계수들은 보에 설치된 가속도계의 위치에 약간 민감한 반응을 보이고 있다. 따라서 감쇠 계수를 측정하는 동안 가속도계가 동일한 위치에 있어야 한다. 각각의 모드에서 $\Omega \approx \omega = \tau^2$ 인 경우 외팔보의 1차, 2차, 3차 모드에 대하여 $e^3 f_3$ 에 대한 기초부 강성에 대한 영향을 Table 2에 표시하였다.

Table 2 Values of $e^3 f_3^*$ for a cantilever beam

M	λ	$\int_0^1 F ds$	$\int_0^1 s F ds$	$e^3 f_3^*$	$e^3 f_3^*$ for $k_e = 350$
1	1.875	0.783	0.569	$(9.68 + \frac{43.4}{k_z})e$	$(9.68 + 0.12)e$
2	4.694	0.434	0.091	$(211 + \frac{10700}{k_z})e$	$(211 + 30.6)e$
3	7.855	0.254	0.031	$(968 + \frac{23544}{k_z})e$	$(968 + 672)e$

가진기에 대한 k_z 의 값은 제 3th모드의 평면 응답성분에 대하여 Fig. 4에 나타난 실험결과의 선형범위 내에서 구하였다. 따라서 k_z 는 $e^3 f_3$ 대신 $e^3 f_3^*$ 에 대하여 발생된 이론곡선이 Fig. 4에 나타난 실선의 “반드시 선형”인 부분에 거의 일치할 때까지 변화시켰다. 그러므로 기초부의 비틀림 스프링의 강성을 결정하기 위해서 보의 제2모드, 제3모드 응답으로부터 얻어진 실험결과를 이용하겠다.

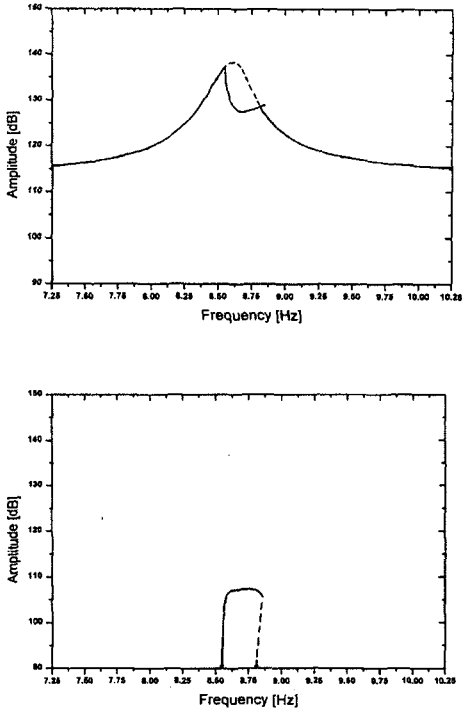


Fig. 2 The analytical amplitude frequency response of the 1st mode for $e^3 f^*=0.0179(e^*=3.61mm)$, $\epsilon^2 c_2=0.0625$, $\epsilon^2 \Delta_2=0.05$ (in-plane and out of plane)

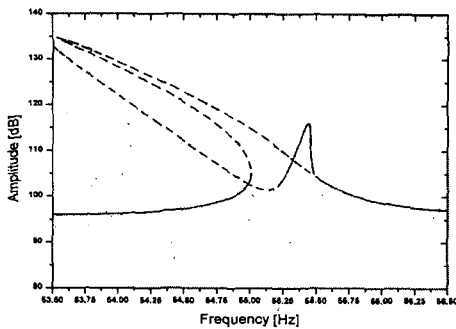


Fig. 3 The analytical amplitude frequency response of the 2nd mode for $e^3 f^*=0.0179(e^*=0.13mm)$, $\epsilon^2 c_2=0.0936$, $\epsilon^2 \Delta_2=0.05$ (in-plane and out of plane)

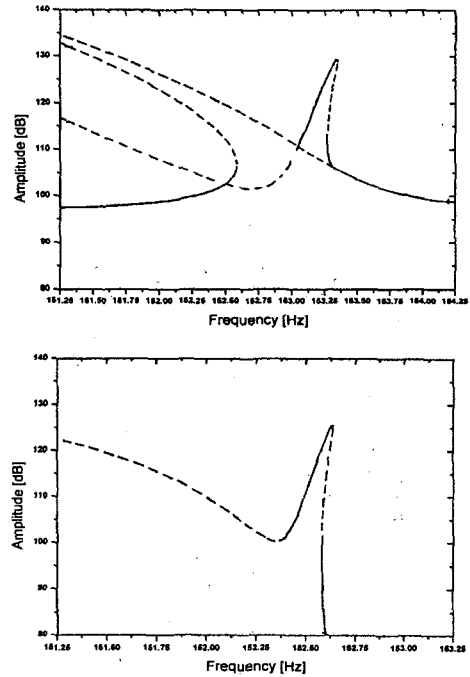


Fig. 4 The analytical amplitude frequency response of the 3th mode for $e^3 f^*=0.0179(e^*=8.04E-6mm)$, $\epsilon^2 c_2=0.0625$, $\epsilon^2 \Delta_2=0.05$ (in-plane and out of plane)

4. 비선형 실험 방법

4.1 실험장치

직사각형 외팔보는 균일한 탄성재료인 알루미늄(Al 6063)을 사용하였고, Al 6063의 물성치는 탄성계수 $E=69GPa$, 강성계수 $G=25GPa$, 포아송비 $\nu=0.3333$ 직사각형의 단위 길이

당 질량 $m=70 \times 10^{-3}$ kg/m 이고 직사각형 외팔보의 형상은 5×5 mm의 사각형이며 길이는 665mm이고 가속도계는 고정점에서 $s=125$ mm 위치에 고정되어 있다. 또한 알루미늄 합금은 연성 재료이므로 약간의 구조 감쇠를 갖고 있다. 외팔보의 가진 방법은 기초 조화가진으로 사인파를 sweeping하여 가진하였다. 실험에 사용된 측정기는 다음과 같다.

가진기의 아마추어와 외팔보를 고정시키는 지그(jig)는 경량이고 기계적 성질이 우수한 AL 2024로 제작되었다. 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족하고 보가 횡방향 진동을 받기에 적합하도록 설계되고 제작되었다. 지그의 고유진동수는 FRF방법으로 측정을 하여 지그의 고유진동수가 200Hz이내에 x,y,z방향에서 하나도 없음을 확인하였다. 보의 물성치와 경계조건을 이용하여 외팔보의 고유주파수를 이론적으로 계산을 하였다. 실험적으로 외팔보의 고유주파수를 측정하기 위하여 가진기를 사용하여 보를 가진하였다. 가진함수는 Pseudo-random을 사용하였고, Time weighting함수는 Rectangular weighting을 사용하여 외팔보의 고유주파수를 실험적으로 구하였다. 외팔보의 감쇠계수(C)는 대수감쇠율을 구하는 방법을 이용하여 감쇠계수를 측정하였다.

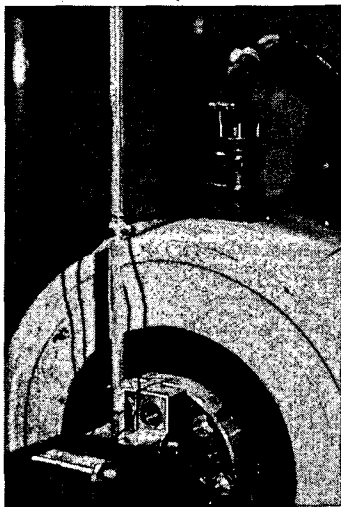


Fig. 5 Instrument for experiential device

Table 3 Comparison of the experimental and analytical values for frequency of the bending mode

Frequency order no	Analytical Values(Hz)	Experimental Values(Hz)	Damping coefficient(c)
1	9.664	8.75	0.0625
2	56.8189	55.25	0.09375
3	159.0956	152.25	0.0625

4.2 비선형 실험 방법

유연한 직사각형 보를 고정-자유(fix-free)의 경계조건을 만족시키는 상태를 갖도록 고정시켰다. 측정 모드는 직사각형 외팔보의 1st, 2nd과 3th 모드를 모두 측정하였다. 측정은 가속도계를 이용하여 측정하였고 외팔보의 응답특성을 정확하게 측정하기 위하여 외팔보의 in-plane방향 (x-axis)와 out of plane 방향 (y-axis)에 각각 B&K 4374 가속도계를 부착하였다. B&K 4374 가속도계의 무게는 각각 0.65gram정도로 매우 가벼우며 주파수 측정범위는 1-25kHz이다. 가속도계의 부착위치는 고정부에서 125mm높이에 순간 접촉체를 이용하여 보의 표면에 고정시켰다.

Charge type의 가속도계는 Charge Amp(B&K 2635)을 통해서 전압신호로 변환이 되어서 SONY DAT에 저장된다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도성분이 가진 주파수의 변화와 상관없이 일정한 크기를 유지하게 된다. 가진 주파수는 sine sweep의 형태로 주파수를 증가하거나 감소시키는 방법을 사용하였고 그 비율은 0.030Hz/s이다. 측정주파수 범위는 각각의 공진주파수를 기준으로 하여 그 폭이 3Hz가 되게 설정하였다. 따라서 가진주파수가 증가하는 경우 측정시간은 1분 40초이고 감소하는 경우도 1분 40초이다. DAT에 저장된 신호는 레벨레코더(B&K 2307)에 보내져서 전압신호의 레벨을 기록지에 기록하게 된다. 레벨레코더에서 종이의 이송속도는 1mm/sec이고 펜의 움직이는 속도는 251mm/sec이고 기록지에 기록된 값은 진동의 RMS레벨로 기록지에 표시하게 된다. 이 기록지에 표시된 그래프를 이용하여 비선형 응답특성을 해석하였다.

5. 실험결과

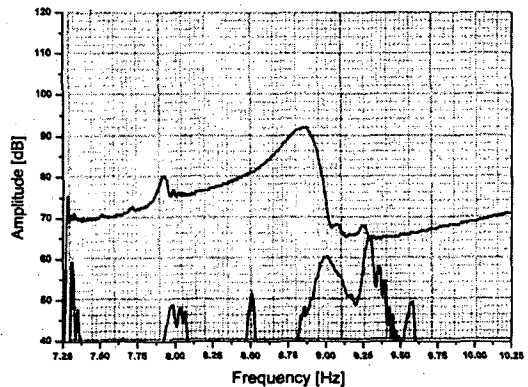


Fig. 6 Frequency response curve for forward direction on the 1st mode (in-plane and out of plane response curve)

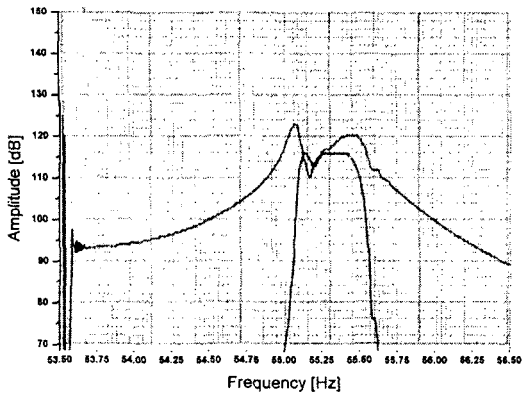


Fig. 7 Frequency response curve for forward direction on the 2nd mode (in-plane and out of plane response curve)

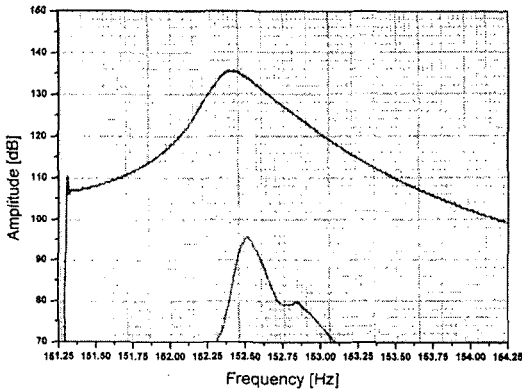


Fig. 8 Frequency response curve for forward direction on the 3rd mode (in-plane and out of plane response curve)

6. 결론 및 이론적 고찰

One to one resonance의 비선형 특성을 갖고 있는 외팔보의 응답특성을 이론적, 실험적으로 비교 분석하였다. 이론적 해석은 Crespo da Sliva가 유도한 보의 운동 방정식과 해석 방법을 따라서 해석을 하였다. 실험에서 외팔보의 1st, 2nd, 3th 모드에서 찾아낸 실험변수들을 이론식에 적용을 하여 이론적 해석을 수행하였다. 일대일 공진특성을 갖는 외팔보의 1st 모드의 이론적 실험적 특성은 정량적으로 거의 유사한 결과를 얻었다. 그러나 정성적으로는 약간의 차이를 보이고 있다. 이 차이는 계가 갖고 있는 감쇠의 영향으로 실험치에서 이론치보다 낮은 응답특성을 갖는 것으로 보인다. 1st 모드에서는 일대일 공진의 응답특성이 비선형 관성의 영향보다 비선형 스프링의 효과가 더 크게 나타나고 있음을

알 수 있다.

2nd 모드에서는 이론적, 실험적으로 거의 유사한 결과를 얻었다. 2nd 모드에서는 비선형 관성과 비선형 스프링의 효과가 복합적으로 잘 나타나고 있다. 그러므로 in-plane 운동보다 out of plane 의 운동이 다른 모드 보다 현저하게 잘 나타나고 있다. 3th 모드에서는 이론적 실험적인 특성이 거의 다르게 나타나고 있다. 응답특성이 정성적, 정량적으로 서로 다른 응답 특성을 보여 주었다. 그러므로 3th 모드에서는 비선형 스프링의 효과보다는 비선형 관성의 효과가 더 강하게 나타나고 있다. 따라서 3th 이상의 이론적 방정식에서 보의 비선형 특성에 대한 수정이 필요하다고 본다.

참고 문헌

- (1) Haight, E. C., and King, W. W., 1971, Stability of non-linear oscillations of an elastic rod, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 52, pp.899-911.
- (2) Tseng, W. Y., and Dugundji, J., 1970, Nonlinear vibrations of a beam under harmonic excitation, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.37, pp.292-297.
- (3) Haddow, A. G., and Barr, A. D. S., and Mook, D. T., 1984, Theoretical and experimental study of modal interaction in a two-degree-of-freedom structure, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.97, pp.451-473.
- (4) Zavodney, L. D., and Navfeh, A. H., 1989, The nonlinear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation : theory and experiment, *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol.24, pp.105-125.
- (5) Zaretsky, C. L., and Crespo da Silva, M. R. M., 1994, Experimental investigation of non-linear modal coupling in the response of cantilever beams, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.174, pp.145-167.
- (6) Blevins, R. D., 1979, *Formals for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold.
- (7) Broch, J. T., 1975, Non-linear Amplitude Distortion in Vibrating System, *Bruel and Kjaer*, pp.52-82.
- (10) Crespo da Silva, M. R. M., and C. C. Glynn, 1978, Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. II. Forced Motions, *J. Struct. Mech.*, Vol.6, pp.449-461.
- (11) Perngjin F. Pai and Ali H. Nayfeh, 1990, Non-Linear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitations, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 25, No, 5, pp. 455-474.