

강제진동중인 완전 원판의 혼돈운동 Chaotic Dynamics of a Forced Perfect Circular Plate

이원경* · 박해동**

Won Kyoung Lee and Hae Dong Park

Key Words : Nonlinear Vibration(비선형 진동), Asymmetric Vibration of Circular Plate(원판의 비대칭진동), Method of Multiple Scales(다중시간법), Primary Resonance(주공진), Period Doubling Bifurcation(주기배가분기), Hopf Bifurcation(합분기), Lyapunov Exponents(리아푸노프 지수), Chaotic Motion(혼돈운동), Fractal Domain of Attraction(프랙탈 흡인영역).

ABSTRACT

조화가진력이 작용하는 고정경계를 가진 완전원판의 비선형 진동에 대한 응답특성을 연구하였다. 원판의 비대칭모드의 고유진동수 근처에 가진주파수가 작용하는 주공진에서의 응답은 정상파(standing wave)뿐만 아니라 진행파(traveling wave)가 존재한다고 알려져 있다. 주공진 근처의 정상상태 응답곡선에서 최대한 5개의 안정한 응답이 존재하는 것으로 밝혀졌으며, 이들은 1개의 정상파와 4개의 진행파로 나타난다. 이 진행파중 2개는 Hopf분기에 의해 안정성을 잃은 후 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동에 이르게 된다. Lyapunov 지수를 사용하여 혼돈운동을 정량적으로 평가하였으며, 주평면의 개념을 이용하여 이 혼돈운동의 흡인영역이 Fractal임을 확인하였다.

1. 서론

모드상호작용을 고려한 원판의 비선형 강제진동에 대한 연구는 대칭진동에 대한 연구와 비대칭진동에 대한 연구로 나눌 수 있다. 대칭진동에 대한 연구에서는 정상상태응답이 대칭모드들의 중첩이므로 정상파성분(standing wave component)들의 중첩으로 나타난다[1-3]. 비대칭진동에 대한 연구에서는 정상상태응답에서 진행파성분(traveling wave component)이 나타날 수 있다.

완전원판의 비대칭진동응답을 해석한 Sridhar[4] 등은 다중모드 상호작용을 포함하는 일반적인 가해조건(solvability condition)을 유도하였다. 그들의 가해조건은 모든 비대칭모드와 대칭모드의 상호작용을 포함하는 것이다. 최근, Yeo와 Lee[5]는 Sridhar 등의 가해조건에서 오류를 발견하고 수정하였다. 그리고 내부공진이 없는 경우(Nayfeh와 Vakakis[6]는 이러한 경우를 일대일 내부공진이라 하였다.) 비대칭 진동 주공진 응답을,

조사하여 Sridhar [4]등의 결과와 차이가 있음을 확인하였다. Lee 등[7, 8]은 두 개의 비대칭모드를 포함하는 내부공진 조건을 가지는 경우, 주공진응답의 모드상호작용을 조사하였다.

본 연구에서는 강제진동중인 원판의 비대칭진동응답을 연구하기 위해 Yeo와 Lee[5]의 다중모드 상호작용에 의한 자율 상미분 방정식에 대하여 계의 이탈변수(detuning parameter)에 대한 응답의 안전성을 파악하고 응답곡선과 계의 이탈변수의 수직기울기(vertical tangency, $\partial a/\partial \mu = \infty$)가 발생하는 위치에서 강제진동중인 고정경계조건을 갖는 비대칭 원판의 혼돈운동을 연구하였다.

2. 운동방정식

Fig. 1의 고정경계조건을 가진 얇은 원판의 횡변형이 두께에 비해 상당히 작다고 가정하면 횡진동을 나타내는 무차원화된 운동방정식은 von Karman 방정식의 동적상사로부터 다음과 같이 표현된다[9].

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \nabla^4 w = \varepsilon(L(w, F) - 2c \frac{\partial w}{\partial t} + p^*(r, \theta, t)), \quad (1a)$$

* 영남대학교 공과대학 기계공학부

E-mail : wklee@yu.ac.kr

Tel. : (663) 810-2455, Fax : (663) 810-4627

** 알엠에스테크놀로지(주)

$$\nabla^4 F = Eh \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (1b)$$

여기서,

$$L(w, F) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$\nabla^4 \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2$$

ϵ 은 작은 매개변수, ν 는 포아송비(Poisson's ratio), c 는 감쇠계수, h 는 원판의 두께(thickness), $p^*(r, \theta, t)$ 는 가진함수, w 는 중간평면의 변형, F 는 면내 관성(in-plane inertia)을 무시할 경우 면내 평형조건을 만족하는 힘 함수(force function)이다.

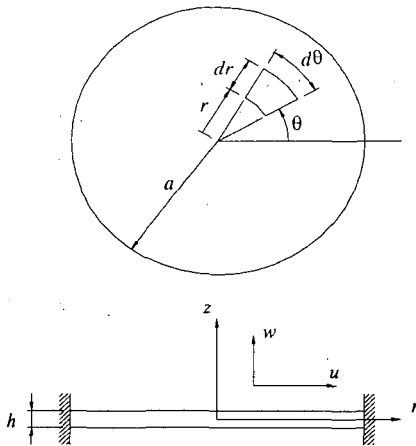


Fig. 1 A schematic diagram of a clamped circular plate

경계조건은 모든 t 와 θ 에서

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0 \quad (2a,b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r^2} - \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{2+\nu}{r^2} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{3+\nu}{r^3} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3b)$$

그리고 $r=0$ 에서 해가 유한하다는 조건이 필요하다.

식 (1)에서 (3)의 비선형 편미분 방정식의 근사해를 다중시간법(method of multiple scale)을 적용하여 가해조건(solubility condition)을 구한 후 비대칭 1차 모드(절경과 경계를 포함한 절원이 각각 하나인 경우)인 w_{11} (21.2604) 주

공간 근처에서의 응답특성을 알아보기로 한다.

가진진동수(λ)가 주공진에 가까운 이탈변수(detuning parameter) $\sigma(\lambda = w_{11} + \epsilon\sigma)$ 를 도입하면 다음과 같은 자율상미분 방정식(autonomous ordinary differential equation)을 얻을 수 있다[5].

$$a'_{11} = -c_{11} a_{11} + \frac{P_{11}}{2w_{11}} \sin \mu_{11}^a \quad (4a)$$

$$b'_{11} = -c_{11} b_{11} + \frac{P_{11}}{2w_{11}} \sin \mu_{11}^b \quad (4b)$$

$$a_{11} \mu_{11}^a{}' = \sigma a_{11} + \frac{\gamma_{1111}}{4w_{11}} a_{11} (a_{11}^2 + 2b_{11}^2) + \frac{P_{11}}{2w_{11}} \cos \mu_{11}^a \quad (4c)$$

$$b_{11} \mu_{11}^b{}' = \sigma b_{11} + \frac{\gamma_{1111}}{4w_{11}} b_{11} (b_{11}^2 + 2a_{11}^2) + \frac{P_{11}}{2w_{11}} \cos \mu_{11}^b \quad (4d)$$

정상상태 응답은 식 (4)의 평형해($a'_{11} = b'_{11} = \mu_{11}^a{}' = \mu_{11}^b{}' = 0$)로부터 구해지며 평판의 응답은

$$w = w_0 + O(\epsilon)$$

여기서

$$w_0 = \phi_{11}(r) \{ a_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^a + \theta + \tau_{11}) + b_{11} \cos(\lambda t - \mu_{11}^b - \theta - \tau_{11}) \} \quad (5)$$

식 (5)의 근사해는 위상속도가 λ 이며 진폭이 $a_{11} \phi_{11}$ 과 $b_{11} \phi_{11}$ 인 두 진행파의 중첩을 나타내고 있다. 이 두 파는 시간이 경과함에 따라 각각 시계방향과 반시계방향으로 진행하는 파이다.

3. 응답과 그 흡인영역

비대칭 모드의 주공진 근처에서의 응답특성을 알아보기 위해 매개변수를 다음과 같이 정하였다.

$$\{\nu, \epsilon, \epsilon c, \epsilon P_{11}\} = \{1/3, 0.001067, 0.01, 4\}$$

이 값을 사용하여 이탈변수 $\hat{\sigma} = \epsilon\sigma$ 에 대한 진폭 a_{11} 과 b_{11} 을 Fig. 2에 나타내었다. SS1, SS2, US1, US2는 $a_{11} = b_{11}$ 인 정상파의 응답이며, ST1, UT1, UT2는 $a_{11} \neq b_{11}$ 인 진행파의 응답으로 회전방향을 결정하는 진폭의 크기는 초기조건에 따라 결정되어진다. 실선은 안정한 응답을, 점선은 불안정한 응답을 나타낸다. 정상파에 해당하는 응답은 US1이 불안정하다는 점을 제외하면 Duffing 진동계의 응답과 일치하고 있다.

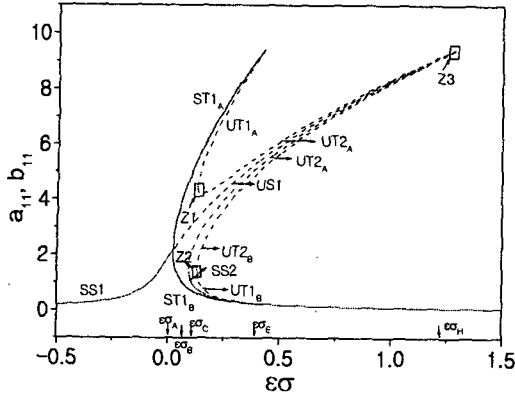


Fig.2 Variations of the amplitudes with detuning parameter $\epsilon\sigma$. —, stable ; - - - -, unstable.

Fig. 3은 Fig. 2의 응답곡선을 확대하였다. 불안정한 2개의 진행파의 응답곡선 UT2는 수직기울기가 일어나는 점에서는 안정한 해가 존재하는 것을 볼 수 있으며, 이러한 안정한 해는 이탈변수가 변화함에 따라 Hopf분기에 의해 불안정한 해로 변화되고 있다.

Fig. 4는 Fig. 3의 $\epsilon\sigma_D=0.13264$ 에서 안정한 해가 불안정한 해로 변화함에 따라 Hopf분기 근처에서 자율계인 식 (4)의 운동의 특성을 알아보기 위해 4차원 상태공간의 궤적을 2차원 평면에 투영하였다. Fig. 4의 (a)는 안정한 해인 고정점(fixed point)이며, (b)는 Hopf 분기에 의해 등장한, 주기가 1인 주기해를 보여준다. 이탈변수가 증가함에 따라 Fig. 4의 (c)는 주기 2의 궤적이 나타나며, (d)는 주기 4, (e)는 주기 8로 나타나며, 이탈변수 증가에 따라 주기 배가운동이 나타나서 (f)와 같이 주기가 ∞ 인 혼돈운동이 나타나고 있다.

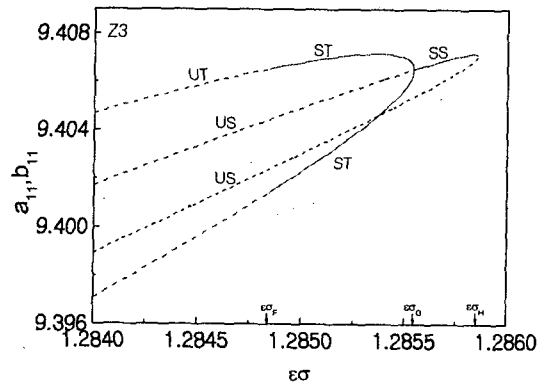
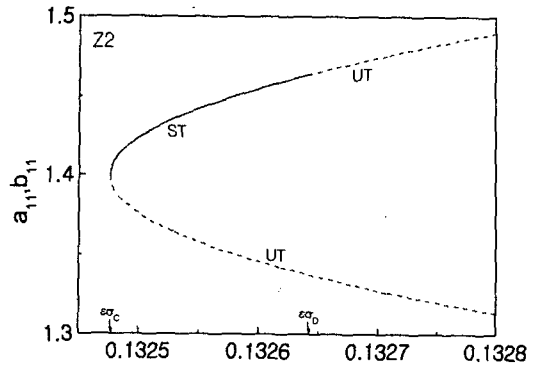
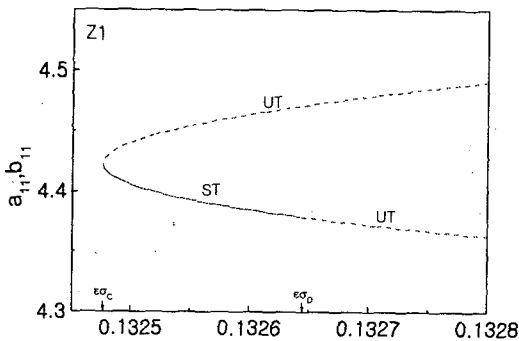


Fig. 3 Variations of the amplitudes with detuning parameter $\epsilon\sigma$, —, stable ; - - - -, unstable. Enlargements of the Z1, Z2, Z3 in Fig. 2(a).

Fig. 5는 Fig. 4의 안정한 해가 불안정한 영역으로 변화한 영역에서 이탈변수가 증가함에 따라 주기배가운동에 대한 특성을 알아보기 위해 4차원 공간상의 시간이력 궤적이 2차원 Poincare'평면을 통과하는 Poincare' map[10, 11]을 나타내었다. 이 탈변수 $0.13264 < \epsilon\sigma < 0.1327375$ 영역에서는 식 (4)의 자율상미분 방정식에서는 주기 P-1인 해가 존재하며, 이탈변수 $0.132737 < \epsilon\sigma < 0.132762$ 에서는 주기 P-2인 해가 존재하여 이탈변수가 증가하면 주기배가운동을 거쳐 혼돈운동에 도달함을 보여준다.

Fig. 6에는 Fig.5의 주기배가혼동을 거쳐 혼돈운동에 이르는 과정을 정량적인 수치로 나타내는 Lyapunov지수[10, 11]로 나타내었다. 이탈변수 $\epsilon\sigma < 0.13264$ 에서는 Lyapunov지수가 0 미만으로 나타나고 있으며, $\epsilon\sigma > 0.1327711$ 에서는 0보다 큰 지수를 보이고 있으며, Fig. 4 (f)와 Fig. 5에서 주

기배가분기를 거쳐 혼돈운동이 발생한 영역으로 나타나고 있어 Lyapunov지수 0보다 크면 혼돈운동으로 판단할 수가 있다. 이탈변수 $0.13264 < \epsilon\sigma < 0.1327711$ 에서는 주기배가 운동이 일어나는 영역으로 Lyapunov지수가 $-0.02 \sim 0.02$ 로 변동하여 나타나고 있다.

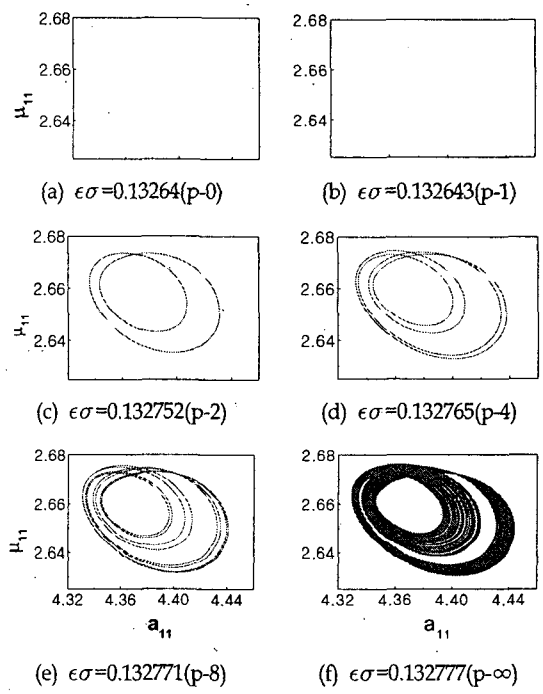


Fig. 4 Phase plots for unstable solutions in a period-doubling sequence.

혼돈운동이 발생한 이탈변수 $\epsilon\sigma=0.13278$ 에서는 Table 1과 같이 안정한 하나의 정상파와 2개의 진행파 및 혼돈운동으로 흡인되는 2개의 진행파로 총 5개의 흡인영역이 존재하게 된다. 5개의 끌개(attractor)에 대한 흡인영역을 구하기 위해 4차원상의 3개점을 지나는 주평면[12, 13]은 Fig. 7과 같다.

다섯 개의 끌개 즉 하나의 정상파(SS2), 두 개의 진행파(ST1-1, ST1-2) 및 두 개의 혼돈운동(UT2-1, UT2-2)으로 흡인되는 초기조건들의 집합을 나타내는 흡인영역이 Fig. 8에 담겨있다. 이 그림에서 혼돈운동 중의 하나로 흡인되는 영역(UT2-1으로 표시된)을 자세히 관찰하기 위해 확대한 것이 Fig. 9이다. 그 후 순차적으로 확대한 그림이 Fig. 10과 Fig. 11에 나타나 있다. 이 결과로부터 혼돈운동으로 흡인되는 영역이 프랙탈임을 알 수 있다.

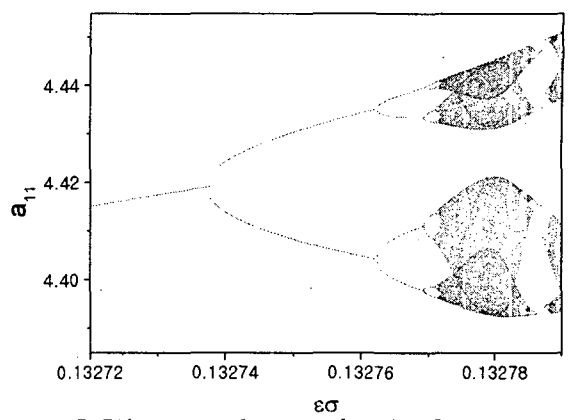


Fig. 5 Bifurcation diagram for the Poincaré map with detuning parameter $\epsilon\sigma$.

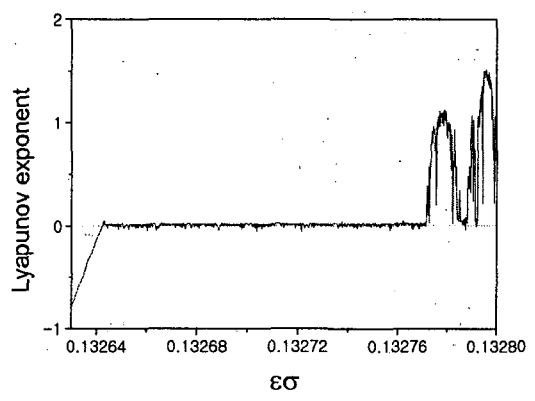


Fig. 6 Lyapunov exponent with detuning parameter $\epsilon\sigma$.

Table 1 Fixed points for detuning parameter. ($\epsilon\sigma=0.13278$)

	a_{11}	b_{11}	μ_{11}^a	μ_{11}^b	remark
① ST1-1	5.4406	0.6029	0.6167	0.0641	
UT1-1	4.4887	1.3159	2.6442	0.1403	
② UT2-1	4.3648	1.4869	2.6591	0.1587	$x_{2(1)}$
US1	3.3118	3.3118	0.3598	0.3598	
US2	2.5965	2.5965	2.8620	2.8620	
③ UT2-2	1.4869	4.3648	0.1587	2.6591	$x_{2(2)}$
UT2-2	1.3159	4.4887	0.1403	2.6442	
④ SS2	0.7529	0.7529	3.0615	3.0615	x_1
⑤ ST1-2	0.6029	5.4406	0.0641	0.6167	

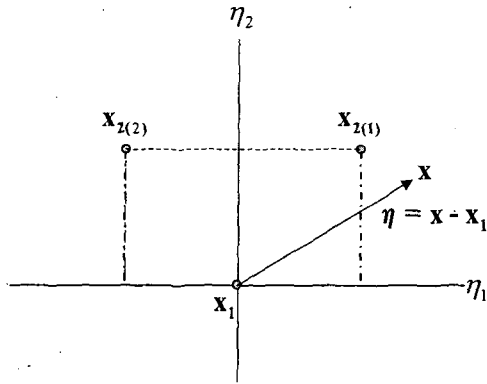


Fig. 7 New Cartesian co-ordinates, η_1 and η_2 , on the principal plane.

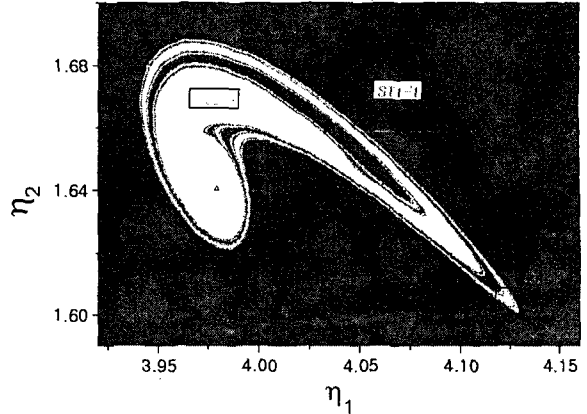


Fig. 10 The Domains of attraction in the principal plane for detuning parameter. Enlargement of Z5 in Fig. 9.

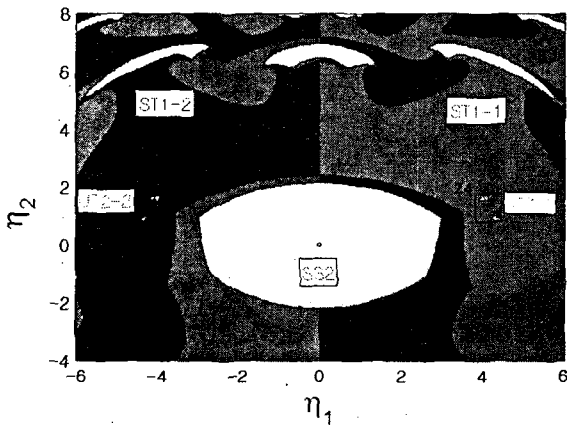


Fig. 8 The Domains of attraction in the principal plane for detuning parameter $\epsilon\sigma = 0.13278$. \circ , The stable fixed point for SS2; ∇ the unstable fixed point for UT2-2; Δ , the unstable fixed point for UT2-1.

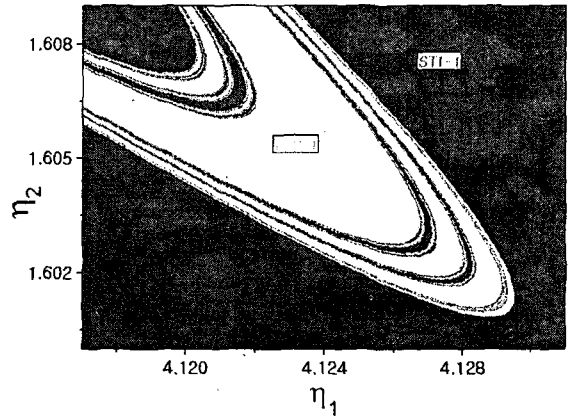


Fig. 11 The Domains of attraction in the principal plane for detuning parameter. Enlargement of Z6 in Fig. 10.

참고 문헌

- (1) Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1975, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part I: Symmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, pp. 359-373.
- (2) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*, New York : John Wiley & Sons.
- (3) W. K. Lee and C. H. Kim, 1995, "Combination Resonances of a Circular Plate with Three-Mode Interaction", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, No. 4, pp. 1015-1022.
- (4) Sridhar, S., Mook, D. T. and Nayfeh, A. H., 1978, "Non-linear Resonances in the Forced Responses of Plates, Part II: Asymmetric Responses of Circular Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, pp. 159-170.

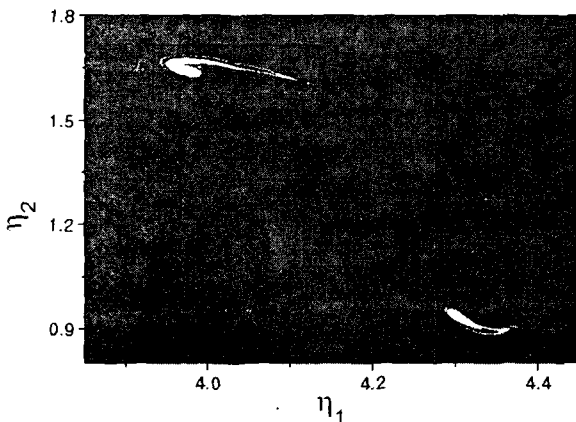


Fig. 9 The Domains of attraction in the principal plane for detuning parameter. Enlargement of Z4 in Fig. 8.

- (5) Yeo, M. H. and Lee, W. K., 2002, "Corrected Solvability Conditions for Non-linear Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, pp. 653-665.
- (6) Nayfeh, T. A. and Vakakis, A. F., 1994, Subharmonic traveling waves in a geometrically non-linear circular plate, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 29, 233-245.
- (7) Lee, W. K. and Yeo, M. H., 2003, "Non-linear Interactions in Asymmetric Vibrations of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 263, pp. 1017-1030.
- (8) W. K. Lee, M. H. Yeo and S. B. Samoilenko, 2003, "The Effect of the Number of Nodal Diameters on Non-linear Interactions in Two Asymmetric Vibration Modes of a Circular Plate", *Journal of Sound and Vibration*, 268, pp. 1013-1023.
- (9) Efstathiades, G. J., 1971, "A New Approach to the Large-deflection Vibrations of Imperfect Circular Disks Using Galerkin's Procedure", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, pp. 231-253.
- (10) W. K. Lee and H. D. Park, 1997 "Chaotic Dynamics of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Nonlinear Dynamics*, Vol. 14, No. 3, pp. 211-229.
- (11) W. K. Lee and H. D. Park, 1999, "Second-Order Approximation for Chaotic Responses of a Harmonically Excited Spring-Pendulum System", *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 34, No. 4, pp. 749-757.
- (12) Lee, W. K., 1988, "A Global Analysis of a Forced Spring-Pendulum System", Ph.D. dissertation, University of California, Berkeley.
- (13) Lee, W. K. and C. S. Hsu, 1994, "A Global Analysis of an Harmonically Excited Spring-Pendulum System with Internal Resonance", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 171, pp. 335-359.