

# 강체벽과 충돌하는 한단이 고정된 외팔보의 진동 Dynamic Contact of a Cantilever Beam with Rigid Wall Condition

박남규\*·장영기\*\*·김재익\*\*·김규태\*\*

Nam-Gyu Park, Young-Ki Jang, Jae-Ik Kim and Kyu-Tae Kim

Key Words : Dynamic Contact(접촉), Gap(간극), Cantilever Beam(외팔보), Control Rod(제어봉)

## ABSTRACT

Dynamic contact of a cantilever beam with gap at the end is discussed. The gap in a structure induces dynamic contact, and the contact problem is always accompanied by inequality constraints which mean that the solution of the structure with contact condition should satisfy variational inequality. Inequality, but, can be reduced to equality condition considering convex penalty function. In this paper, formulation of a beam with contact is derived using quasi-convex penalty function. General coordinate solution which is needed to increase computational efficiency is applied. Nonlinear behavior of a beam with rigid and elastic contact condition is discussed.

### 1. 서론

기계부품의 대부분은 기어 혹은 체인의 동력전달과 같이 물리적 접촉에 의해 에너지를 교환한다. 따라서 접촉은 구조물의 기능을 완수하기 위한 중요한 변수가 될 수 있으나 구조물 상호간의 접촉으로 원치않는 진동 또는 소음을 유발하는 원인이 되기도 한다. 접촉을 수반하지 않는 선형 구조물의 지배방정식은 최소에너지보존법칙을 만족하는 등식(equality)으로 표현되나, 접촉이 수반되면 미지의 접촉력으로 인해 부등식 조건으로 표현된다. 또한 접촉은 마찰력을 수반하는 경우가 많이 있으며 이때의 마찰력 역시 알 수 없으므로 접촉 문제의 풀이는 상대적으로 난해하다.

이론적인 어려움을 해소하고자 Hertz[1]는 마찰이 없는 타원접촉의 정적(static) 해를 구하여 접촉문제의 공학적 접근을 시도하였다. 이후 접촉에 대한 많은 연구가 이루어졌으며, Martin[2], Duffour[3]는 마찰을 수반하는 동적 접촉문제에 대한 해석을 제시하였다. 특히 Timoshenko[4]는 국부적인 Hertzian 접촉을 가정하여 오일러 보(Euler beam)에 가해지는 충격력을 구하였다.

본 연구는 핵연료안내관과 제어봉 사이의 동적 접촉에 대하여 논하였다. 평상시 원자로의 제어봉은 핵연료 집합체의 안내관 상단쪽에 삽입되어 있고, 냉각수의 난동(random motion)에 의해 안내관과 끊임없이 접촉하여 마모에 의한 안내관 손상이 발생할 수 있다. 이러한 동적접촉(chattering)

은 릴레이(relay)와 같은 부품에서도 볼 수 있으며, Fathi[5]는 보의 끝단이 탄성스프링과 접촉하는 문제의 해를 제시하였다. Lo[6]는 Duhamel 적분식을 이용한 보의 끝단에 작용하는 접촉력을 계산하였으며 실험적 결과와 비교하였다.

본 연구의 대상인 제어봉은 한단이 고정되고 다른 한단은 양쪽 간극이 존재하여 강체벽과 마찰 없이 충돌하는 문제로 단순화 하였다. 접촉문제에서 정의되는 부등식의 해를 구하기 위해 벌칙함수를 도입하여 등식화 하였다. 해석의 효율성을 위해 한단이 고정된 보의 모드해석을 통해 끝단의 거동을 모드좌표(generalized coordinate)상에서 구하여 물리좌표로 변환하였고, 초기조건과 입력하중 조건에 따른 거동을 예측하였다.

### 2. 제어봉과 안내관 구조물

#### 2.1 원자로 구조물 소개

제어봉(control rod)은 스테인레스스틸 계열의 재질(Inconel)로 제작되며 원자로의 출력을 조절하는 중요한 원자로 구조물이며, Fig.1 과 같다. 그림의 경우 4 개의 제어봉이 스파이더구조물에 연결되어 한 개의 제어봉 집합체를 구성하며 이 집합체는 CEDM(Control Element Drive Mechanism)에 연결되어 상하의 움직임이 제어된다.

개별적인 제어봉들은 붕소화합물(B<sub>4</sub>C)로 제작된 여러개의 펠렛을 내장하고 있고, 핵반응을 주관하는 중성자는 제어봉의 위치에 따라 펠렛에 흡수되는 비율이 달라지며 이러한 원리로 원자로의 반응을 제어할 수 있다.

한편 제어봉이 삽입되는 핵연료집합체의 안내

\* 한전원자력연료(주) 핵연료설계처  
E-mail : nkpark@knfc.co.kr  
Tel : (042) 867-1197, Fax : (042) 863-4430

\*\* 한전원자력연료(주) 핵연료설계처

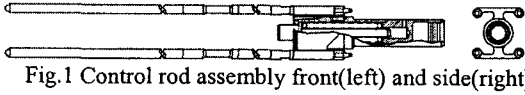


Fig.1 Control rod assembly front(left) and side(right)

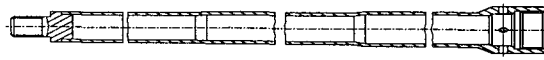


Fig.2 Guide tube in fuel assembly

관은 Fig.2 와 같이 각각의 제어봉이 삽입 될 수 있는 충분한 안지름을 확보하도록 설계되었다. 정상 운전의 경우 제어봉은 안내관의 상단부에 위치하여 있으나, 정지 시 자유낙하에 의해 완전히 삽입된다. 제어봉이 안내관 상단에 위치할 때, 두 구조물간에는 간극이 존재하므로 냉각수의 운동상태에 따라 제어봉이 안내관 내벽과 충돌한다.

## 2.2 단순화된 제어봉 구조물

본 연구에서 다루고자하는 제어봉과 안내관의 단순화된 모델은 Fig.3 과 같다. 제어봉의 한쪽은 CEDM 에 연결되어 고정되므로 한단이 고정된 상태를 가정하였다. 다른 끝은 안내관 상단에 위치하므로 안내관을 강체로 모사하여 끝단과 강체벽 사이에 간극을 갖도록 하였다. 강체벽은 무한대의 강성을 갖는 스프링으로 모사 하였다. 강체와 끝단 사이의 간격은 4mm 이다.

실제의 경우 마찰이 수반되나 마찰력의 효과는 배제하였다. 또한 엄밀히 안내관을 강체벽이라고 할 수 없으나 제어봉에 비해 상대적으로 움직임의 제약이 있으며, 수치계산의 효율성을 위해 강체벽으로 가정하였다.

## 3. 변분부등식의 근사해

### 3.1 근사 운동방정식

마찰이 없는 선형 구조물에 접촉이 존재하는 경우, 해( $u$ )는 다음의 부등식을 만족 시켜야한다.

$$\int_{\Omega} \int \sigma_{ij}(v_{i,j} - u_{i,j}) d\Omega - \int_{\Omega} \int \rho \dot{u}_i (\dot{v}_i - \dot{u}_i) d\Omega \geq \int_{\Gamma} t_i (v_i - u_i) dS, \forall v \in K \quad (1)$$

여기서  $K$  는 접촉조건을 만족시키는 모든 후보해의 부분 집합이다. 부등식(1)의 첫번째항과 두째항은 내부에너지와 운동에너지를 의미한다. 마지막 항은 외력이 주어진 경우의 외부에너지를 의미한다. 미지의 접촉력을 알 수 있다면 식(1)은 등식으로 변환이 가능하다.

Fig.3 과 같은 구조물에 대해, 식(1)은 회전이 없는 보의 이론을 적용하여 다음 식(2)와 같이 쓸 수 있다.

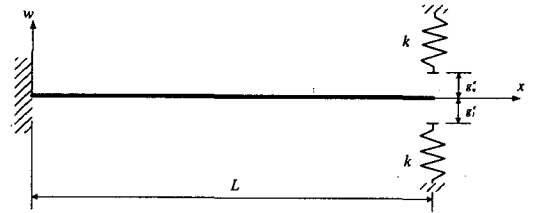


Fig.3 Simplified control rod with gap condition

$$\int_{\Omega} \int EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{w} - w) dx - \int_{\Omega} \int \rho A \dot{w} (\dot{\bar{w}} - \dot{w}) dx \geq \int_{\Omega} \int p(x,t) (\bar{w} - w) dx, \forall \bar{w} \in K \quad (2)$$

여기서  $w$  는 횡방향의 움직임을 의미하며,  $p$  는 제어봉의 축방향으로 주어진 외력이다. 또한 후보함수  $\bar{w}$  는 다음의 조건을 만족하는 Hilbert 공간의 함수이다.

$$K = \{ \bar{w} \in H^2(\Omega) \mid \bar{w} = 0, \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0 \text{ at } x = 0 \quad (3)$$

$$\text{and } g_i^c \leq \bar{w} \leq g_i^c \text{ at } x = L \}$$

만일 접촉력이 알려져 있다면, 식(2)는 등식으로 변환 될 수 있다. 또, 정의된 문제를 다른 관점에서 해석할 수 있다. 즉 접촉하는 경우 강체스프링은 제어봉의 구조물이 되며 이때 강체스프링이 일을 할 수 있다고 가정하면 식(2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} \int EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\bar{w} - w) dx - \int_{\Omega} \int \rho A \dot{w} (\dot{\bar{w}} - \dot{w}) dx + \Phi(\bar{w}) - \Phi(w) \geq \int_{\Omega} \int p(x,t) (\bar{w} - w) dx, \forall \bar{w} \in K \quad (4)$$

단 위의 식에서 강체스프링에 의한 에너지 포텐셜  $\Phi: H_0^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup 0$  는 다음의 조건을 만족하여야 한다.

$$\Phi(\bar{w}) \geq \Phi(w) \quad (5)$$

그러나 미분가능한 포텐셜  $\Phi$  를 정의 할 수 있다면 식(4)는 또다시 다음의 등식으로 변환됨을 알 수 있다.

$$\int_{\Omega} \int EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w dx - \int_{\Omega} \int \rho \dot{w} A \delta \dot{w} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta w(x_L) = \int_{\Omega} \int p(x,t) \delta w dx \quad (6)$$

단면의 기하학적 특성이 동일하다고 가정하면 식(6)으로부터 다음과 같은 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\rho A \ddot{w} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta(x-L) = p(x,t) \quad (7)$$

$\Phi$  는 미분가능하여야 하므로 다음과 같은 오목 함수(quasi-convex function)를 생각할 수 있다.

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}(w(L) - g_i^c)^2, & w(L) \leq g_i^c \\ 0, & g_i^c < w(L) < g_u^c \\ \frac{1}{2\varepsilon}(w(L) - g_u^c)^2, & w(L) \geq g_u^c \end{cases} \quad (8)$$

여기서  $\varepsilon$  은 강체스프링을 근사화 할 수 있는 작은 값이다. Fig.4 에 위에서 정의한 함수를 도시하였다. 완전 강체인 경우 Fig.4 의 점선과 같은 조건을 만족하여야 하지만 이 경우 미분 불가능하므로 해를 찾기가 어려우며, 실선과 같이 정의하면 근사적인 해를 구할 수 있다.

### 3.2 모드해석에 의한 근사해

접촉이 없는 외팔보의 고유치문제의 특성방정식(characteristic equation)은 다음과 같다.

$$\cos(\beta L)\cosh(\beta L) + 1 = 0 \quad (9)$$

여기서  $\beta$  는  $\frac{\omega^2 \rho A}{EI}$  이며, 위의 식을 만족하는 고

유값(eigenvalue)을 구하고, 질량에 대해 정규화된 고유함수(eigenfunction)를 구하여 이를  $y(x)$  라고 하면 제어봉의 운동은 다음과 같다.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(x) q_i(t) \quad (10)$$

위의 식(10)을 식(7)에 대입하고 한 고유함수를 곱하여 전체길이에 대해 적분하면 고유공간좌표에 대하여 다음과 같은 무한개의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{q}_m(t) + \omega_m^2 q_m(t) = \int_0^L y_m p(x, t) dx - \int_0^L y_m j \left( \sum_{i=1}^{\infty} y_i(L) q_i(t) \right) dx, \quad m=1, \dots, \infty \quad (11)$$

여기서  $j$  는  $\Phi$  의 미분을 뜻하며, 등호 오른쪽 첫번째 항은 작용하는 외력에 기인하며 두번째 항은 접촉조건에 의해 파생되었다. 또한  $\omega_m$  은  $m$  번째의 고유진동수(circular natural frequency)를 의미한다.

초기조건은 상미분 방정식과 동일한 유도과정을 거쳐 나타낼 수 있다. 즉 고유좌표에서의 초기 변위는 다음과 같고

$$q_m(0) = \int_0^L \rho A y_m w(x, 0) dx, \quad m=1, \dots, \infty \quad (12)$$

초기속도는 다음 식과 같다.

$$\dot{q}_m(0) = \int_0^L \rho A y_m \dot{w}(x, 0) dx, \quad m=1, \dots, \infty \quad (13)$$

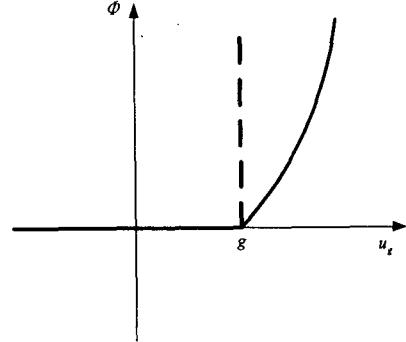


Fig.4 A penalty functional which satisfies rigid wall (dotted) and resilient wall (solid)

따라서 식(11)~(13)으로부터 고유좌표에서의 해를 얻을 수 있으며 다시 식(10)의 관계로부터 제어봉의 운동을 구할 수 있다.

## 4. 수치해석

### 4.1 자유진동

외력이 없이 초기조건이 주어진 경우의 제어봉의 운동을 관측하기 위해 다음의 조건을 가정하였다.

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= 0 \\ \dot{w}(x, 0) &= x \end{aligned} \quad (14)$$

즉 위의 조건은 평형상태에서 순간적인 충격에 의한 초기속도를 가정한 조건이며 고정단으로부터 끝단으로 갈수록 속도가 증가하는 모양이다.

식(11)~(13)에서 유한개의 고유좌표를 고려하였으며,  $\varepsilon$  의 크기에 따른 운동방정식의 해를 구하였다. Fig.5 는 20 개의 모드를 고려하고  $\varepsilon = 10^{-8}$  인 경우는 실선으로,  $\varepsilon = 10^{-6}$  인 경우는 점선으로,  $\varepsilon = 10^{-4}$  인 경우 일점쇄선으로 도시하였다. 또한 시간중분은 20 번째 고유진동수인 433Hz 까지의 영향을 고려하기 위해 0.001 초로 하여 미분방정식을 계산하였다.  $\varepsilon = 10^{-4}$  인 경우는 강체벽이 있는 조건을 충분히 모사할 수 없음을 알 수 있다. 식(10)에서 유추할 수 있듯이 고려되는 모드의 수가 너무 작아도 문제이지만, 고려되는 모드의 수가 증가할수록 중분시간은 감소되어야하므로 수치해석상의 문제가 발생할 수 있다.

Fig.6 은 제어봉의 움직임을 1/100 초 단위로 6/100 초까지 도시한 그림이며, 제어봉의 끝단이 충돌하면서 충격의 영향으로 제어봉의 파형이 좌측으로 이동하는 모양이다.

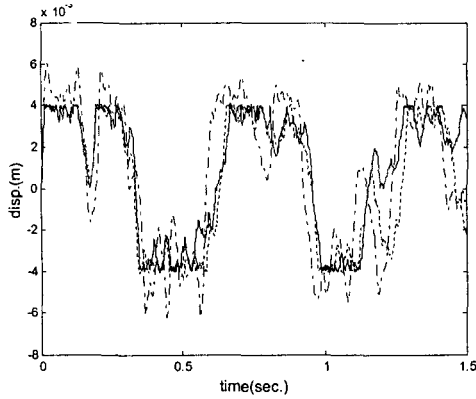


Fig.5 Motion at the end with respect to  $\varepsilon$  (solid :  $10^{-8}$ , dot :  $10^{-6}$ , dash dot :  $10^{-4}$ )

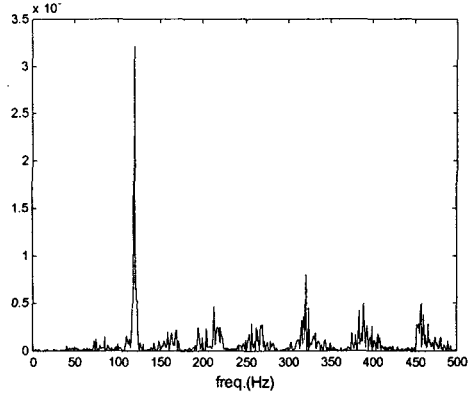


Fig.7 Auto power spectrum (velocity magnitude)

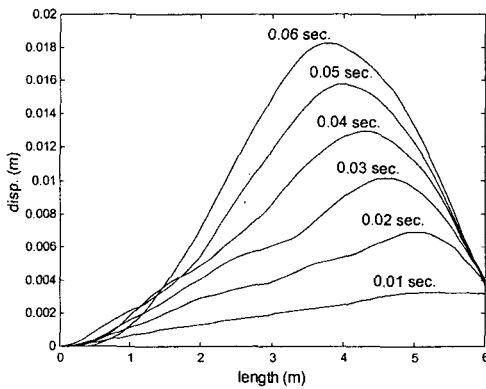


Fig.6 Motion of the beam at each time

## 4.2 강제진동

제어봉의 중간부분에서 단일 조화함수로 가진이 주어진 경우의 응답을 예측하였다. Fig.7 은 40Hz 주파수 성분의 싸인파를 입력으로 하였을 때의 자기스펙트럼(auto power spectrum)이다. 충돌이 없는 일반적인 구조물의 경우 가진주파수 성분이 주도적으로 나타나지만, 강제 외력에 충돌하는 경우 가진의 하모닉성분(super harmonic)들이 출현함을 볼 수 있다. 즉 양쪽 강체벽에 충돌하는 것은 또 다른 외력의 작용으로 볼 수 있으며 일련의 충격으로 인해 가진 성분의 배수가 되는 주파수로 가진이 됨을 알 수 있다.

## 5. 결론

제어봉은 원자로의 출력을 조정하는 중요한 구조물이며, 핵연료 집합체의 안내관을 통해 삽입된다. 정상 시 제어봉은 안내관 상부에 끝단이 삽입

되어 있고 원자로 내의 유동으로 안내관과의 충돌이 불가피하다. 최악의 경우, 이런 연속적인 충돌에 의한 마모로 부품의 훼손이 발생하여 구조물로서의 기능을 할 수 없는 경우도 발생할 수 있다.

본 논문에서는 제어봉 구조물과 안내관과의 충돌을 이론적으로 설명하고자 벌칙함수를 도입하여 충돌 현상을 모사할 수 있었다. 수치예제를 통해서 볼 수 있듯이, 충돌은 가진 성분 이외의 다른 주파수 성분을 파생시키는 비선형성을 관측할 수 있었다. 따라서 간극의 정도와 가진크기에 따라 제어봉의 운동이 변화될 것으로 판단되며, 향후 연구에서는 가진원에 따른 제어봉의 진동저감설계에 대한 연구를 계획 중이다.

## 후기

이 연구는 과학기술부의 원자력연구개발사업의 일환으로 수행되었습니다.

## 참고 문헌

- (1) Johnson, K. L., 1985, Contact Mechanics, Cambridge Univ. Press.
- (2) Martins, J. A. C. etc., 1983, "A Numerical Analysis of Class of Problems in Elastodynamics with Friction", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.40, pp.327-360.
- (3) Duffour, P., etc., 2004, "Instability of Systems with a Frictional Point Contact. Part 1: Basic Modelling", J. Sound and Vibration, Vol.271, pp365-390.
- (4) Timoshenko, S., 1937, Vibration Problems in Engineering, Van Nostrand.
- (5) Fathi, A., etc., 1994, "Improved Approximations For a Beam Impacting a Stop", J. Sound and Vibration, Vol.170(3), pp365-375.
- (6) Lo, C., C., "A Cantilever Beam Chattering Against a Stop", Vol.69(2), pp.245-255