

# 공기저항이 고려된 Dynamic Elastica 이론을 통한 유연매체의 거동해석 Analysis of Flexible Media by Dynamic Elastica Theory with Aerodynamic Force

홍성권\* · 지중근\*\* · 장용훈\*\*\* · 박노철\*\*\*\* · 박영필\*\*\*\*\*

Sung-Kwon Hong, Jung-Geun Jee, Yong-Hoon Jang, No-Cheol Park and Young-Pil Park

Key Words : Drag Force(공기저항력), Elastica Theory, Parametric Cubic Curve, FDM(Finite Difference Method)

## ABSTRACT

In many machines handling lightweight and flexible media, such as automated teller machines and printers, the media must transit an open space. It is important to predict the static and dynamic behavior of the sheets with a high degree of reliability. The nonlinear theory of the dynamic elastica has often been used to a nonlinear dynamic deflection model. In this paper, the governing equation is derived and simulated by the finite difference method. The analysis has to include aerodynamic effect for more exact behavior analysis, because the flexible media can be deformed drastically by a little force. Therefore aerodynamic force must be applied to the governing equation. Different results were obtained with and without aerodynamic effect and the resulted show that after contacting circular guide, the directions of flexible media of two cases are different.

## 1. 서론

복사기, 팩시밀리, 프린터, 카메라, 환류식 지폐 입출금기 등에는 매체 전송 시스템이 적용된다. 이러한 기기들의 소형화, 고속화에 따라서 매체의 정확한 거동해석이 필요하고 최적의 설계조건을 찾는 것이 피딩 시스템 설계에 있어 중요한 인자가 되고 있다. 본 논문에서는 유연매체가 좁은 채널로부터 빠져나와 가이드와 충돌이 발생하는 경우 Dynamic Elastica 이론[1]을 통하여 거동을 해석해 보고자 한다. 종이는 매우 유연하기 때문에 작은 힘에도 큰 변형을 일으키게 된다. 종이가 공기중에서 움직일때 그 움직임을 방해하는 항력이 발생하게 되는데, 이 효과를 고려하지 않으면 정확한 거동을 파악 할수 없다. 따라서 공기 저항력을

Dynamic Elastica 이론에 적용하여 좀더 정확한 종이의 거동해석을 수행하고자 한다.

## 2. 매체의 모델링

### 2.1. Dynamic Elastica Model

Fig. 1은 유연매체가 채널로부터 빠져 나올 때의 형상을 나타낸 그림이다.  $g$ 는 중력가속도를 나타내고  $f_x, f_y$ 는 질점에 작용하는 관성력이다.  $F_N, F_T$ 는 매체가 가이드와 충돌할 때 가이드에서 받는 수직방향과 접선방향의 반력을 나타내고,  $\alpha$ 는 채널 출구의 각도를 나타낸다.  $\phi$ 는 매체 절점이  $x$ 축과 이루는 각도이다.  $x', y'$ 축은 전체 지배좌표를 나타내고,  $x, y$ 는 종이의 진행방향에 따른 국부좌표를 나타낸다. 비선형 Elastica 이론[2]을 이용하여 매체를 평판이라 가정하고 굽힘 강성  $D$ 를 정의하여 지배방정식을 세우면 식 (2.1.1) 과 같다.

\* 연세대학교 기계공학과  
E-mail : h11010@yonsei.ac.kr  
Tel: (02) 2123-4677, Fax: (02) 353-8460

\*\* 연세대학교 기계공학과

\*\*\* 연세대학교 기계공학부 조교수

\*\*\*\* 연세대학교 정보저장기기협동과정 부교수

\*\*\*\*\* 연세대학교 기계공학부 정교수

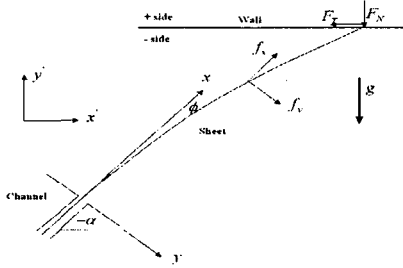


Fig. 1. Geometry of Feeding System

$$\begin{aligned}
 D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} &= mg(L-s) (\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\
 &\quad - m \int_s^L \ddot{x} \sin \phi d\bar{s} + m \int_s^L \ddot{y} \cos \phi d\bar{s} \\
 &\quad + \sin \phi \int_s^L \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s} \\
 &\quad - \cos \phi \int_s^L \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} \delta(\bar{s} - s_K) d\bar{s}
 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

변형 포텐셜을 정의하면[3] 식 (2.1.2), (2.1.3)과 같다.

$$u = \int_s^L x d\bar{s} \quad (2.1.2)$$

$$v = \int_s^L y d\bar{s} \quad (2.1.3)$$

식 (2.1.2), (2.1.3)을 시간에 관하여 두 번 미분하면 식 (2.1.4), (2.1.5)와 같이 된다.

$$\ddot{u} = \int_s^L \ddot{x} d\bar{s} \quad (2.1.4)$$

$$\ddot{v} = \int_s^L \ddot{y} d\bar{s} \quad (2.1.5)$$

(2.1.4), (2.1.5)식을 (2.1.1)식에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} &= -m \ddot{u} \sin \phi + m \ddot{v} \cos \phi \\
 &\quad + mg(L-s) (\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\
 &\quad + \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} H(\bar{s} - s_K) \\
 &\quad - \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} H(\bar{s} - s_K)
 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

식 (2.1.6)에서  $H$ 는 Heaviside 함수[4]을 나타낸다.

$$H(s - s_K) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < s_K \\ \frac{1}{2} & \text{if } s = s_K \\ 1 & \text{if } s > s_K \end{cases}$$

채널 밖에서의 매체의 절점의 위치를  $s$ 에 관하여 두 번 편미분 하면 다음의 식이 얻어진다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -\cos \phi \quad (2.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = -\sin \phi \quad (2.1.8)$$

식 (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8)의 2차 편미분 방정식의 해는 각각의 시간에 대한 매체의 변형형상을 결정할 수 있다. 미분 방정식의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi(c) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial s}(c) = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial s}(c) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s}(L) = K_0 \quad u(L) = 0 \quad v(L) = 0$$

$K_0$ 는 매체의 곡률을 나타낸다.

## 2.2. 공기의 저항력을 고려한 Dynamic Elastica Model

유체 내에서 물체가 움직일 때 그 움직임을 방해하는 공기 저항력이 발생하게 된다. 공기 저항력은 상대적인 운동방향에 평행하게 물체에 작용하는 힘의 성분이다. 항력계수  $C_D$ 는 다음과 같이 정의된다.

[5]

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho_a V^2 A_k} \quad (2.1.9)$$

식 (2.1.9)에서  $F_D$ 는 항력을 나타내며,  $\rho_a$ 는 공기의 밀도,  $V$ 는 매체가 움직이는 속도 그리고  $A_k$ 는 항력이 작용하는 면적을 나타낸다. 유체내에서 평판이 움직일때의 항력계수는 1.0~2.0 사이의 값을 가지게 된다. 따라서 항력계수  $C_D$ 를 1.0이라 가정하고 그에 따른 항력  $F_D$ 를 지배방정식에 적용하였다.

Dynamic Elastica 이론에서는 중력과 관성력을 D'Alembert's 원리에 의하여 매체에 작용하는 힘으로 가정하여 적용하였다. 여기에 항력  $F_D$ 를 포함하여 다음과 같은 표시하였다.

$$f_x = mg \sin \alpha - m \ddot{x} - \frac{1}{2} \rho_a \dot{x}^2 A_k \quad (2.1.10)$$

$$f_y = mg \cos \alpha - m \ddot{y} - \frac{1}{2} \rho_a \dot{y}^2 A_k \quad (2.1.11)$$

식 (2.1.10), (2.1.11)에 변형 포텐셜을 적용하고, 지배방정식에 대입하여 정리하면 (2.1.12)과 같은 지배방정식으로 유도된다. 식 (2.1.7), (2.1.8), (2.1.12)식에 위의 경계조건들을 대입하여 매체의 거동을 해석하게 된다.

$$\begin{aligned}
D \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = & -m \ddot{u} \sin \phi + m \dot{v} \cos \phi \\
& + mg(L-s) (\sin \phi \sin \alpha - \cos \phi \cos \alpha) \\
& + \sin \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{X_K} H(\bar{s} - s_K) \\
& - \cos \phi \sum_{K=1}^{K_{\max}} F_{Y_K} H(\bar{s} - s_K) \\
& - \frac{1}{2} \rho_a A_k \dot{u}^2 \sin \phi + \frac{1}{2} \rho_a A_k \dot{v}^2 \sin \phi
\end{aligned} \quad (2.1.12)$$

### 2.3. 유한차분 모델

지배방정식을 유한 차분한 결과는 다음의 식과 같다.

$$\begin{aligned}
u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j} \sin \phi_{i,j}^* \\
= \Delta s^2 (-\cos \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*)
\end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned}
v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j} - \Delta s^2 \phi_{i,j} \cos \phi_{i,j}^* \\
= \Delta s^2 (-\sin \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*)
\end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned}
\phi_{i-1,j} - \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha \cos \phi_{i,j}^* \\
+ \cos \alpha \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} - 2\phi_{i,j} \\
+ \frac{\Delta s^2}{D} m (\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \ddot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} \\
+ \phi_{i,j} + \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m (\sin \phi_{i,j}^* u_{i,j} - \cos \phi_{i,j}^* v_{i,j}) \\
= \frac{\Delta s^2}{D} mg(L-s) (\sin \alpha (\sin \phi_{i,j}^* - \phi_{i,j}^* \cos \phi_{i,j}^*) \\
- \cos \alpha (\cos \phi_{i,j}^* + \phi_{i,j}^* \sin \phi_{i,j}^*)) \\
+ \frac{\Delta s^2}{D} m (\ddot{u}^* \cos \phi_{i,j}^* + \ddot{v}^* \sin \phi_{i,j}^*) \phi_{i,j} + \\
+ \frac{\Delta s^2}{D \Delta t^2} m [ (2u_{i,j-1} - u_{i,j-2}) \sin \phi_{i,j}^* \\
- (2v_{i,j-1} - v_{i,j-2}) \cos \phi_{i,j}^* ] \\
- \frac{\Delta s^2}{2D} \rho_a A_k (\dot{u}_{i,j-1}^2 \sin \phi_{i,j}^* - \dot{v}_{i,j-1}^2 \cos \phi_{i,j}^*)
\end{aligned} \quad (2.1.15)$$

식 (2.1.13), (2.1.14), (2.1.15)을 다음과 같이 행렬 형태로 정리한다.

$$Az = b \quad (2.1.16)$$

(2.1.13), (2.1.14), (2.1.15)의 유한 차분되어진 식에서 우변은  $b$ , 좌변에서 미지수  $u, v$ 와  $\phi$ 는  $z$ , 상수항은  $A$ 로 표현되어진다.

### 3. 결과

Fig. 2는 초기속도 80mm/s 일때 항력을 고려하였을때와 고려하지 않았을 때를 나타낸다. 항력이 작용하면 매체가 그 영향으로 인하여 조금 뒤로 치는 것을 볼 수 있다.

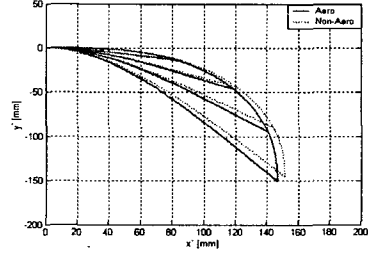


Fig. 2. Deflection Shapes and End Orbit for V = 80mm/s between Aerodynamic Effect and Non-Aerodynamic Effect

Fig. 3은 초기속도 80mm/s일때 시간이 지남에 따른 끝단의 속도를 나타낸다. 항력을 작용하지 않았을때보다 항력을 작용하였을때 끝단의 속도가 느려지는 것을 볼 수 있다.

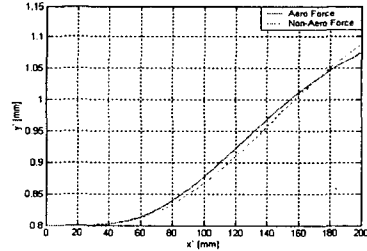


Fig. 3. Tip Speed of

Aerodynamic Effect vs. Non-Aerodynamic Effect

Fig. 4. 는 매체가 평평한 가이드와 접촉했을 때 변형하는 형상을 나타낸다. 시간이 지남에 따라 종이의 변형형상이 더욱 커지는 것을 볼 수 있다. 여기서 바닥면의 선형가이드는 파라메트릭 큐빅커브에 의해서 정의 되었다. [6],[7]

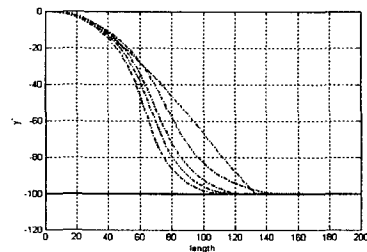


Fig. 4. Deflection Shapes for V = 80mm/s to contact linear guide

Fig. 5. 는 항력을 고려하였을 때 고려하지 않았을 때 원형 가이드와 접촉하게 되는 형상을 나타낸다. 같은 초기속도 80mm/s 에서 항력을 고려하지 않았을 때는 매체가 가이드를 타고 위로 올라가게 되지만 항력을 고려하였을 때는 가이드를 타고 내려오는 것을 볼 수 있다. 그러므로 적합한 가이드 설계를 위해서는 공기저항을 고려한 정확한 거동해석을 수행 해야 하는 것을 알 수 있다.

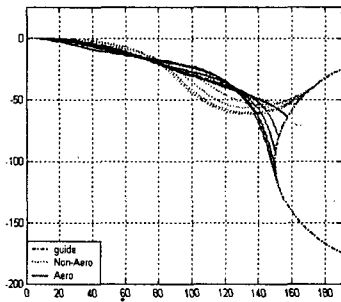


Fig. 5. Deflection Shapes for  $V = 80\text{mm/s}$  to contact circular guide

#### 4. 결론

Dynamic Elastica 이론을 적용하여 종이 가이드에 충돌하는 경우에 대한 지배방정식을 공기저항을 고려하여 유도해 보았고, 유연매체가 접촉하는 가이드를 파라메트릭 큐빅 커브[6],[7] 로 정의하였다. 그리고 지배방정식을 유한 차분하여 시뮬레이션을 통해 매체의 거동을 예측해 보았다. 종이 유연하기 때문에 공기 저항력을 고려하지 않았을 때와

다른 거동을 보이는 것을 볼 수 있었다. 또한 가이드와의 접촉이 발생할 때 정확한 거동방향을 예측하기 위해서는 공기저항을 고려해야만 한다는 것을 알 수 있었다.

#### 후 기

본 연구는 산업자원부 부품소재 개발사업단의 “환류식 지폐 입출금 장치 개발”(10012150) 과제를 맡은 (주)노틸러스효성의 위탁과제인 “유연 매체의 거동 해석 및 제어”를 수행하면서 얻어진 결과이며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참 고 문 헌

- (1) J. Stolte, R. C Benson, 1992, "Dynamic Deflection of Paper Emerging from a Channel", *Journal of Vibration and Acoustics*. pp. 187~193.
- (2) Frisch-Fay, R. 1962. "Flexible Bars", Butterworth and Co., Ltd., Washington
- (3) Mansfield, L. Simmonds, J.G, 1987, "The Reverse Spaghetti Problem : Drooping Motion of an Elastica Issuing from a Horizontal Guide.", *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 54, pp 147~150.
- (4) Bender, C.M and Orszag, S.A, 1978, "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers." McGraw-Hill, Inc.
- (5) Robert W.fox, Alan T. McDonald, 2000, "Introduction to Fluid Mechanics.", Wiley
- (6) Mortenson, M.E, 1985, "Geometry Modeling", John Wiley & Sons, Inc., New York
- (7) 홍성권, 지중근, 장용훈, 박노철, 박영필, 2005, "Dynamic Elastica에 의한 유연매체의 거동해석", *한국소음진동공학회지*, 제 15 권, 제 2 호, pp. 206~212