

직사각형 외팔보의 혼돈현상에 대한 실험

An Experiment Study on the Chaos Phenomenon for a Rectangular Cantilever Beam

김명구* · 박철희** · 조종두** · 박창호**

Myoung-Gu Kim, Chul Hui Pak, Chong-Du Cho and Chang-Hao Piao

Key Words : Base Harmonic Excitation(기초조화 가진), Super Harmonic Motion(고차조화 운동), Subharmonic Motion(분수조화 운동), Delay Coordinate(지연좌표계), Toroidal Space(완환체 공간), Phase Space(위상공간), Pink Noise(핑크잡음), Chaos(혼돈), Warping Term(휨항), Attractor(끌개)

ABSTRACT

The slender rectangular cantilever beam has very interesting to study dynamic behaviors of the harmonic base excitation of a cantilever beam shows many nonlinear dynamics due to instability, energy transfer and mode coupling. Nonlinear phenomenon shows superharmonic, subharmonic, super-subharmonic and chaotic motions of the cantilever beam. Experimental observation and verification of these phenomenon carry much importance for the theoretical study as well as in it self. In the experimental cantilever beam, the chaotic motions of the beam appear as a pink-noise signal in FFT analysis and as a torus structure in the oscilloscope analyzed to eventually give information of chaotic motions of the cantilever beam.

1. 서 론

길고 가는 보의 동적이 거동은 매우 큰 변형운동과 복잡한 운동의 형태를 보여주고 있다. 이러한 동적 거동은 헬리콥터의 회전날개 우주선의 안테나, 대형 우주구조물, 유연성을 가진 거대구조물에서 매우 잘 나타나고 있다. 선형 이론에서 보의 운동상태는 두 개의 주평면을 기준으로 하여 각각의 운동이 독립적으로 운동을 한다. 따라서 주평면의 강제운동은 항상 그 평면 내에서 안정한 운동을 한다. 그러나 진동의 진폭이 커지면 보의 비선형현상이 발생하여 선형진동에서 나타나지 않았던 비선형현상들이 나타나기 시작한다. 보의 전단변형, 뒤틀림, 회전관성, 중력 등의 요소들이 운동에 중요한 영향을 미치게 되며, 이 요소들이 보의 비선형현상들을 발생시킨다.

축방향 조화가진을 받는 가는 막대의 비선형현상은 Haight and King⁽⁵⁾에 의해 연구되었다. 그들은 비선형현상에 의해 발생하는 비평면 운동에 대하여 평면응답 곡선 내에서 불안정한 영역이 존재함을 밝혀냈다. 실험연구를 통해서 비평면 운동은 정상상태의 선회운동이라는 결론을 내렸

다. 또한 감쇠가 평면운동에서의 불안정한 현상을 감소시킬 수 없다고 하였다. Crespo da Silva⁽⁶⁾는 동일한 문제의 운동방정식에서 비선형 곡선항을 포함시켜서 운동방정식을 유도하였다. 일부 가진주파수에서 보의 평면과 비평면 운동이 존재함을 발견하였다. Nayfeh⁽¹⁾⁽⁴⁾는 보의 신장과 휨방향 전단, 회전관성, 그리고 재료의 비선형성에 대한 영향을 연구하였다. 모드연성이 있을 때와 없을 때의 1차와 2차의 공진현상을 분석하고 주기가 두배가 되는 분기와 혼돈의 발생을 증명하였다. Crespo da Silva 와 Glynn⁽¹¹⁾는 고차 모드에서 비선형성으로 인하여 발생할 수 있는 모드 가능한 영향을 포함시킨 회전하는 보의 운동에 대한 미분 방정식을 유도하였다. 그리고 이 비선형항들이 헬리콥터의 회전날개의 운동에 미치는 영향을 조사하였다. 길고 얇은 직사각형 외팔보는 운동시 관성항, 중력항, 감쇠항, 휨항(warping term)등의 비선형항을 갖는다. 외부가진력의 작은 경우 보의 선형운동을 하고 있지만 외부가진력이 어느 정점에 도달하면 비선형성을 갖는 요소도들에 의해서 보의 운동이 변화하게 된다. 비선형계에서만 나타나는 고차조화 운동, 분수조화운동, 고차-분수조화운동, 혼돈현상등이 나타난다. 위 현상들을 분석함으로써 계의 비선형 요소들을 분석하고, 이 현상들이 물리적으로 어떤 특성을 갖고 있는가에 대한 실험적 연구가 필요하다. 본 연구에서는 길고 얇은 직사각형의 보를 사용하여 실험적인 연구를 통하여 보의

* 인하대학교 기계공학과
E-mail : mgkim21@hotmail.com
Tel : (032)860-7321, Fax : (032)868-1716

** 인하대학교 기계공학과

비선형현상을 연구하였다. 얇은 직사각형 외팔보를 횡방향으로 기초조화가진을 시켜서 보가 선형운동을 거쳐서 비선형운동으로 가는 과정을 규명하였고, 외팔보의 혼돈현상을 분석하였다.

2. 비선형 실험 이론

2.1 지연좌표 (Delay Coordinates)^{(2),(9)}

비선형 실험에서 실험대상을 지배하는 모든 실험변수들을 항상 측정할 수는 없다. 그러므로 일반적으로 하나의 성분 혹은 그 이상의 몇 개의 성분들만 측정이 가능하다. 이와 같은 실험적 한계를 극복하기 위해서 지연좌표의 개념을 사용한다. 실험장치에서 시간변화에 따른 state vector의 scalar 함수만 측정할 수 있다고 가정을 하면

$$g(t) = G[\vec{x}(t)] \quad (1)$$

비선형계에서 끌개(attractor)의 기하학적인 면에 대한 위상공간 정보나 단면(surface section)상의 프랙탈 구조(fractal structure)의 구조를 해석하는데 지연 좌표를 사용할 수 있다. 이 이론은 1980년 Taken, Norman Packard에 의해 나비어-스토크스 방정식에서 strange attractor를 유도하는데 사용이 되었다. 지연좌표계는 다음과 같이 유도된다.

$$\vec{y} = y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$$

$$y^{(1)}(t) = g[t]$$

$$y^{(2)}(t) = g[t - z]$$

$$y^{(3)}(t) = g[t - z] \quad (2)$$

z 는 어떤 고정된 시간구간이다, 즉 실험에서 지연시간 Δt 이며, Δt 가 길면 길수록 신호간의 상관계수가 작아진다. 따라서 Δt 가 길수록 좋다. $G[t]$ 가 변화하는 특정시간이 선택 되면 특정시간 t_0 에서 \vec{x} 가 주어진다. 일반적으로

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = F[\vec{x}(t)] \quad (3)$$

(3)의 적분에 의해서 $\vec{x}(t_0 - mz)$ 를 얻을 수 있다. \vec{x} 는 N -dimensional vector이며, $m=(M-1)$ 이다. $\vec{x}(t_0 - mz)$ 는 $\vec{x}(t_0)$ 에 의해 유일하게 나타나며 방정식 $\vec{x}(t)$ 의 함수들은 $\vec{y}(t)$ 로 생각할 수 있다.

$$\vec{y} = \vec{H}(\vec{x}) \quad (4)$$

\vec{y} 공간내에서 surface of section 을 만드는 것을 상상할 수 있다. 지연시간을 길게 하면 위상공간 내에서 \vec{x} 의 surface of section 을 만들 수 있다. 단일 시간에 대한 연속적인 시간에 따른 변화량으로부터 끌개를 위상수학적으로 재형성화가 가능하다.

2.2 조화가진^{(7),(9)}

만일 system의 가진주파수(Ω)가 응답주파수(ω)와 다

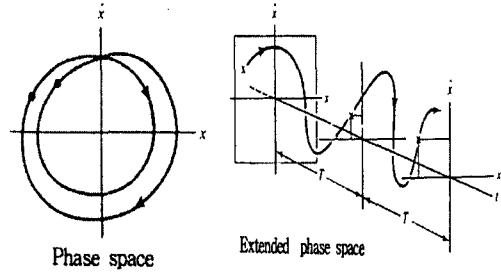


Fig. 1 Phase space and extended phase space

음과 같은 관계를 갖는다면 가진주파수와 응답주파수와와 상관관계를 해석할 수 있다.

$$\omega = m\Omega \quad \text{고차조화운동}$$

$$\omega = \frac{1}{n}\Omega \quad \text{분수조화운동}$$

$$\omega = \frac{m}{n}\Omega \quad \text{고차-분수조화운동}$$

여기서 m, n 은 정수이며 $m \neq 1, n \neq 1$ 이다. 시계열 분석을 위상공간의 형태로 바꾸면, 위상 공간 내에서 non-autonomous periodic orbit의 표현으로 나타난다. 위상 공간내에서의 점은 외부가진 주파수에 대한 particular phase을 나타낸다. 한점에서 다른 점은 가진주파수 $T = 2\pi/\Omega$ 를 갖는 하나의 주기운동이다. 이 운동은 계의 주기가 $T_s = 2\pi/\Omega_s$ 를 갖는 주기운동이다. 계의 주기 $T_s = 2\pi/\Omega_s$ 는 분수조화운동의 경우 $\omega = 1/2\Omega$ 와 $\omega = 1/3\Omega$ 의 관계를 갖게 된다.

이 관계를 분명히 하기 위하여 시간변수 $x_3 = t$ 를 갖는 확장된 위상공간내에서 계의 운동을 표현하는 것이 유용하다. 위상 공간 내에서 계의 운동을 표현하는 것이 계의 고차, 분수, 고차-분수 조화운동을 해석하기가 편리하기 때문이다. 이 공간상에서 계의 방정식은 autonomous 하며, 각각의 궤적들은 서로 교차하지 않는다. 그러므로 그림에 나타난 분수조화운동은 교차하지 않고, 시간 t 를 따라서 궤적내에서 늘어나면서 확장이 된다.

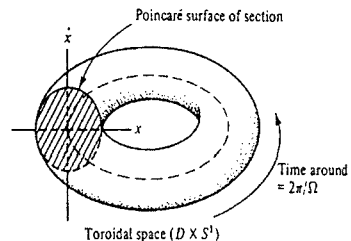


Fig. 2 Toroidal space

이것은 두 개가 좌표평면 (x, \dot{x}) 내에서 이 궤적들의 교차를 생각한다면 이 위상공간내에서 Poincare' map을 얻을 수 있다. 고차조화, 분수조화, 고차-분수조화 운동 ($\omega = (m/n)\Omega$)을 연구하는데 가장 유용한 방법은 Poincare' map을 이용하는 것이다. 이 map은 시간축을 따라서 가진주기 T로 transverse planes을 절단하여 나타낼 수 있다. 가진 주기는 각각의 면에서 반복되며 이것은 하나의 uniqueness property에서 나타난다. 불리한 점은 넓은 위상공간내에서 많은 운동을 표현하는 수많은 면들을 갖는다는 점이다. 그 면들 중의 임의의 하나의 면을 선택하면 그 면은 stroboscopic record을 하는 매우 짧은 가진주기 T를 갖는 하나의 면이며, 이 면위에 Poincare' map을 형성시킬 수 있다. 또 다른 하나의 표현은 (x, \dot{x}) 공간의 boaded region을 갖는다. 두 개의 면을 함께 연결하면 solid torus region $(D \times S^1)$ 의 공간을 형성한다. torus의 중심은 시간축을 갖는 3차원 형상이 된다. torus 해석의 유리한 점은 궤적들을 연속적으로 절단할 수 있는 단 하나의 횡단면이 있다는 것이다. 이 toroidal region은 실제의 위상공간은 아니지만 계의 분석에는 매우 유용하다. 그러므로 terminology of phase space 내에서 고차조화, 분수조화, 고차-분수조화운동은 하나의 폐곡선의 형태로 나타난다.

3. 비선형 실험

3.1 비선형 실험^{(10),(11)}

외팔보 구조를 갖는 구조에서 기초부의 가진 주파수를 보의 고유주파수와 일치시키면 구조물의 응답진폭은 무한대로 증가하는 특성을 보인다. 그러나 비선형계에서는 단일 주파수 가진 시, 보의 응답진폭이 무한대로 증가하는 것이 아니라 보의 비선형 항에 의해서 여러 가지 비선형 응답현상들이 나타나고 있다. 얇은 직사각형 보의 가진진폭이 작은 경우 선형진동의 특성을 보이지만 점점 가진진폭을 증가시키면 어느 순간 선형계에서 무시됐던 요소들이 비선형계에서는 중요한 인자들로 작용을 하여 새로운 형태의 보의 응답특성이 나타나기 시작한다. 이 새로운 형태의 운동양상은 비선형계에서 입력에너지가 증가함에 따라 특정 모드의 안정성이 변화하고 새로운 형태의 안정성을 갖는 운동모드로 전환이 일어난다. 가진주파수 영역에 있던 과잉의 진동에너지가 에너지 전이현상에 의해 다른 모드로 에너지가전이 되면서 비선형만의 독특한 현상들이 나타난다. 에너지 전이 현상이 고차조화운동, 분수조화운동, 고차-분수조화운동, 혼돈 현상들을 만들어 낸다. 그러므로 비선형계에서 계의 과잉의 가진에너지는 순간 순간마다 최대 에너지 발산형태를 갖는 다른 모드로 에너지 전이현상이 일어나는 것을 볼 수 있다.

3.2 실험장치



Fig.3 Instrument for experiment

실험에 사용한 얇은 직사각형 외팔보는 탄성재료인 알루미늄 합금을 사용하였고, 물성치는 탄성계수 $E=72GPa$, 강성계수 $G=27GPa$, 포아송비 0.3333, 밀도 $\rho=2800kg/m^3$ 질량 $M=256.2g$ 이다. 보의 형상은 직사각형이며 길이는 950mm, 폭은 25mm, 두께는 4mm이며, 길이가 두께와 폭에 비하여 매우 길다. 또한 알루미늄 합금은 연성재료이므로 약간의 구조적 감쇠를 갖고 있다. 보의 가진 방법은 기초조화 가진인 sinusoidal excitation 으로 가진을 하였다. 실험에 사용된 계측장비는 다음과 같다.

- Dual channel signal analyzer (FFT B&K 2035)
- Charge amplifier (B&K 2635), 2EA
- Accelerometer (B&K 4374), 2EA
- Accelerometer (B&K 4321)
- Shaker (B&K 4812)
- Power amplifier(B&K 2707)
- Phase shifter 2EA
- Oscilloscope (HITACH VC-6145),2EA
- Plotter (Hewlett Packard, Color pro)

보를 고정시키는 지그(jig)는 가볍고, 기계적 성질이 우수한 알루미늄 합금(AL2024)를 사용하였으며 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족하며, 보가 횡방향 가진력을 받기에 적합하도록 설계되었다. 3축 가속도계를 이용하여 지그의 공진주파수를 분석하였다. 지그와 얇은 직사각형 보의 상호 간섭현상을 피하기 위하여 지그의 공진주파수에서 $\pm 10Hz$ 에내의 주파수 대역에서의 진동 모드의 해석을 피하였다. 보의 고유주파수는 보를 랜덤가진(random excitation)을 시켜서 보의 굽힘모드 비틀림모드, 횡모드의 주파수를 실험적으로 구하였다. 실험적으로 구한 보의 고유주파수를 기초로 하여, 각각 모든 주파수의 고유주파수를 기초조화가진을 시켜서 비선형현상이 일어나는 모드를 찾아서 분석하였다. 선정된 모드는 3차의 횡모드로 주파수는 412Hz이다. 횡

모드에서 발생된 비선형 응답특성은 FFT와 oscilloscope을 사용하여 분석하였다. FFT 에서는 자유진동항의 크기와 피크들의 하모닉분석을 할 수 있다. FFT 상에서 고차조화성 분과 분수조화성분이 단일피크로 나타남을 볼 수 있다. FFT에서 비선형분석을 하는 경우 FRF(frequency response function)으로 분석하지 않고 Auto spectrum 분석만을 수행한다. 그 이유는 비선형계에서는 입력과 출력과의 상관관계가 적기 때문이다. Oscilloscope은 가진 주파수가 일정할 경우, 가진력을 증가시키면서 분석하는 방법과 가진력을 일정하게 하고 주파수가 변화하는 형태의 비선형 현상을 모두 분석할수 있다. Oscilloscope 분석은 비선형 현상의 정성적 분석은 쉬우나 정량적인 분석은 힘들다. Oscilloscope 는 실시간 분석으로 시계열 분석(time history analysis)과 위상 지연기를 이용한 지연좌표 분석(delay coordinate analysis), x-y 의 리셔쥬(lissajous)도형을 이용한 궤적과 trous 분석이 가능하다. 또한 oscilloscope은 FFT보다 혼돈상태에서 보의 운동양상을 보다 쉽게 분석할 수 있는 자료를 준다.

4. 실험 결과

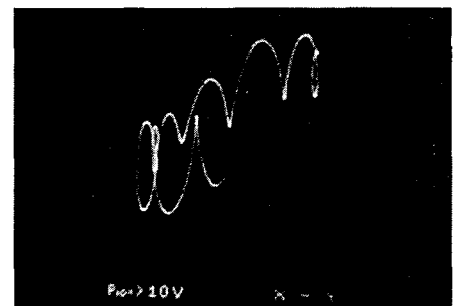
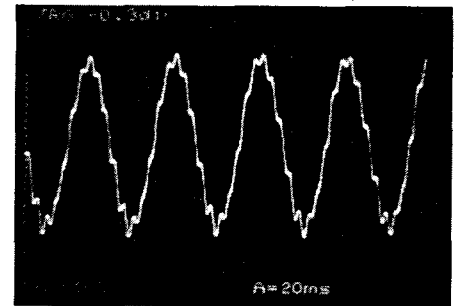
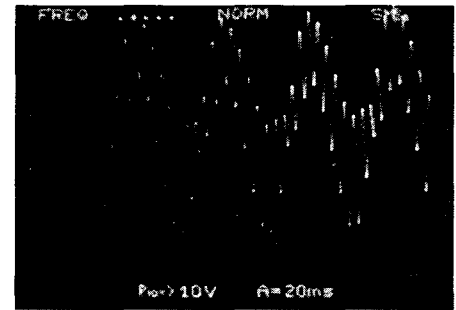
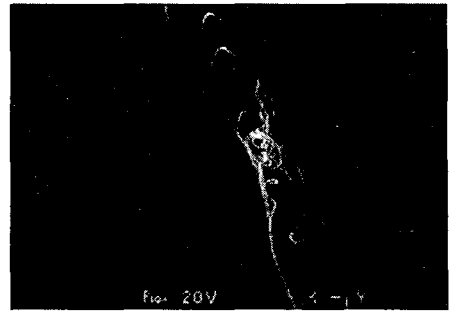
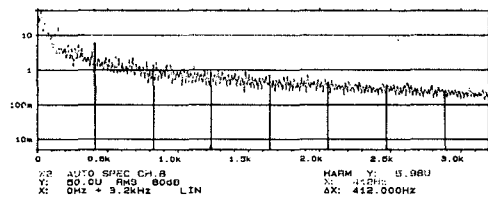
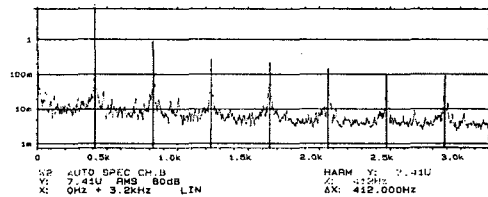
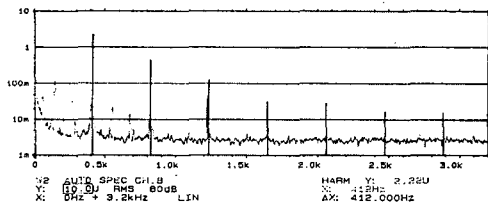




Fig.11 Torus in chaos motion at 4th mode(II)

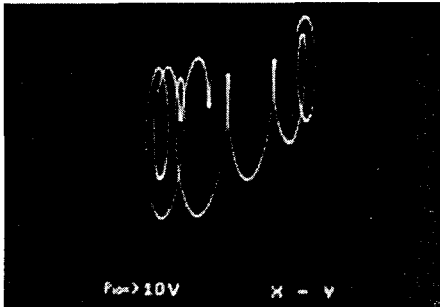


Fig.12 Torus in chaos motion at 4th mode(III)

5. 결론

얇은 직사각형 외팔보의 고유주파수 중 x축 방향의 모드인 횡모드가 4차(412Hz)를 선택하여 기초조화가진 실험을 하였다. 4차 모드의 주파수에서 가진진폭을 증가시키면 보 어느 순간 불안정한 영역에 도달하게 되며 보의 운동양상이 선형에서 비선형으로 변환이 되면서 최대 에너지 발산상태로 보의 운동형태가 변화한다. 이 때 보 속에 있는 비선형항들이 중요한 역할을 하고 있다. 실험결과 보의 운동양상이 선형운동에서 비선형 운동인 고차조화운동 → 고차-분수조화운동 → 혼돈상태로 진행됨을 볼 수 있다. 혼돈현상을 FFT 분석기로 보면 전 주파수 영역에서 진폭이 균일하게 증가하는 핑크잡음(pink noise)의 형태를 갖는다는 것을 알 수 있다. 그러므로 FFT 분석기로 혼돈현상만을 잡아서 분석하는 것은 의미가 없고 선형진동에서 비선형 진동으로 진행시키면서 전 과정을 분석하는 것이 중요하다. FFT 분석기로는 정량적인 분석은 가능하지만 비선형 운동을 명확하게 기술할 수는 없다. Oscilloscope를 사용하면 시계열 분석과 위상변환기를 이용한 지연좌표 분석을 할 수 있다. Torus 분석을 통해서 고차조화운동, 분수조화운동, 고차-분수조화운동, 혼돈형태를 분석하였다. 혼돈의 형태는 FFT에

서는 핑크잡음의 형태로 계의 특성을 분석할 수는 없지만 torus 구조에서는 어떤 규칙성을 가짐을 알 수 있다. Torus 구조에서 혼돈의 형태는 고차-분수조화운동의 형태를 갖고 있으며 일정한 영역을 갖고 변화하는 모습을 보여주고 있다.

참 고 문 헌

- (1) Pai, P. F and Nayfeh, A. H, 1990, "Nonlinear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral base Excitation", *int. J. Nonlinear Mechanics*, Vol. 25, No. 5, pp. 455-474.
- (2) Cusumano, J. P., 1990, "Low-dimensional, Chaotic nonplanar motions of the Elastica", Ph. D. Thesis, Cornell University, New York.
- (3) Nayfeh, S. H and Nayfeh, A. H., 1992, "Energy Transfer from High to Low Frequency Modes in Flexible Structures", *ASME Journal*, Vol. 144, pp. 89-98
- (4) Nayfeh, A. H and Pai, P. F., 1989, "Nonlinear Non-Planar Parametric Responses of an inextensional Beam", *Int. J. Nonlinear Mechanics*, Vol. 24, No. 2, pp. 139-158.
- (5) Haigh, E. C and King, W. W., 1972, "Stability of Nonlinear Oscillations of an Elastic Rod", *J. Acoust. Mech.* 6., pp. 899-911.
- (6) M. R. M. Crespo da Silva and C. C. Glynn., 1978, "Nonlinear Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beam-I. Equations of Motion", *J. Struct. Mech.* 6., pp. 437-448.
- (7) Abraham, R. H. and Shaw, C. D., 1992, "dynamics. The Geometry of behavior", 2nd Ed. Addison-Wesley
- (8) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for natural Frequency and Mode shape", Van Nostrand Reinhold.
- (9) Nicholas B. Tuffillaro, Tyler Abbott, and Jeremiah Reilly, 1992, "An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos", Addison-Wesley Publishing Company..
- (10) 정구충, 임재훈, 최연선. 2004. "부가질량을 갖는 구속 외팔송수관의 비선형 동특성", 한국소음진동공학회는문집, 제14권, 제7호, pp. 561-568.
- (11) Crespo da Silva, M. R. M., and C. C. Glynn, 1978, "Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. II. Forced Motions", *J. Struct. Mech.*, Vol.6, pp.449-461.