

크랙을 가진 회전 외팔보의 동특성해석

Dynamic Behavior of Rotating Cantilever Beam with Crack

손인수* · 윤한익†

In-Soo Son and Han-Ik Yoon

Key Words : Open Crack (개구형 크랙), Rotating Cantilever Beam (회전 외팔보), Dynamic Behavior(동특성), Flexible Matrix (유연행렬)

ABSTRACT

In this paper, we studied about the dynamic behavior of a cracked rotating cantilever beam. The influences of a rotating angular velocity, the crack depth and the crack position on the dynamic behavior of a cracked cantilever beam have been studied by the numerical method. The cracked cantilever beam is modeled by the Euler-Bernoulli beam theory. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations. The lateral tip-displacement and the axial tip-deflection of a rotating cantilever beam is more sensitive to the rotating angular velocity than the depth and position of crack. Totally, as the crack depth is increased, the natural frequency of a rotating cantilever beam is decreased in the first and second mode of vibration.

1. 서론

크랙과 같은 결함을 갖는 구조물은 그 크랙 위치에서 강성저하가 발생하며, 동일한 하중이 작용하더라도 구조물의 자체 탄성에 의한 변형에너지 외에 크랙에 의해서 추가로 변형에너지가 존재하게 된다. 이러한 여러 가지 이유로 인하여 크랙은 구조물의 동적특성에 큰 영향을 미친다. 또 일반적으로 회전하는 외팔보의 동특성은 회전하지 않는 외팔보의 동특성과는 매우 다른 현상을 보인다.⁽¹⁾ 이러한 회전운동은 회전구조물의 강성변화 및 고유진동 특성변화를 유발한다. 따라서 이러한 진동특성 변화를 예측하는 것은 로봇 팔이나 로봇 매니퓰레이터 등의 끝점제어 등 여러 분야에서 필요하며, 응용이 가능하다. 특히 회전 구조물에 계의 동특성에 큰 영향을 미치는 크랙이 존재하는 경우 크랙과 회전운동의 영향으로 인하여 그 계의 동적특성은 큰 변화를 일으킬 것이다. 따라서 크랙과 회전요소에 의한 연성관계가 전체 계의 동적특성에 미치는 영향을 연구하고 예측하는 것은 중요한 일이라 할 수 있다. 회전하는 외팔보의 진동해석에 관한 연구는 Yoo⁽²⁾ 등은 복합변형변수를 이용한 다양한 회전 구조물의 진동특성에 관한 연구를 수행하여 복합변형변수를 이용한 회전 구조물의 동적 모델링의 타당성을 규명하

였다. Panussis⁽³⁾ 등은 회전하는 유체튜브의 면외 및 면내방향의 진동특성에 미치는 회전각속도와 유체의 영향에 대한 연구를 수행하여 계의 안정성 판단에 대한 근거를 제시하였다. 최근 들어 유체유동 회전 외팔 파이프로의 동특성 해석⁽⁴⁾과 이동질량을 가지고 회전하는 유연한 암(arm)의 진동수 평가와 이동질량의 원심력이 유연 매니퓰레이터의 동적응답에 미치는 영향을 수치해석을 통하여 연구하였다.⁽⁵⁾ 크랙을 가지는 보 형태 구조물의 해석은 오일러-베르누이 보 및 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙이 전체 구조물의 동특성에 미치는 영향에 대한 많은 연구가 발표되어지고 있다. 이 연구에서는 회전하는 외팔보에 크랙형태의 결함이 존재하는 경우에 크랙과 회전운동의 연성관계가 외팔보의 동특성에 미치는 영향을 수치해석 하였다. 수치해석을 통하여 외팔보의 끝단의 종진동 및 횡진동 변위와 외팔보의 고유진동수에 미치는 크랙의 크기와 위치, 그리고 회전 각속도의 영향을 비교 고찰하였다.

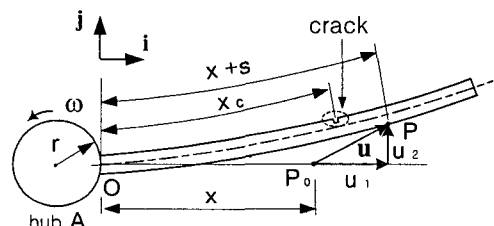


Fig. 1 Schematic diagram of a rotating cantilever beam with a crack

† 정희원, 동의대학교 기계공학부
E-mail : hiyoon@deu.ac.kr
Tel : (051) 830-1645, Fax : (051) 830-2232

* 정희원, 동의대학교 산업기술개발 연구소

2. 시스템 모델링

Fig. 1은 이 연구에서 해석 예제로 사용한 반경 r 의 축에 고정되어 회전운동을 하는 크랙을 가진 유연 외팔보를 나타낸 것이다. 이때 보의 단면은 사각형이다. Fig. 1에서 x 는 외팔보의 고정점 O 로부터 변형 전 임의의 질점 P_0 까지의 거리를 나타내며, s 는 변형 전 임의의 질점 P_0 에서 변형 후의 질점 P 까지 변형할 때 외팔보가 인장된 길이를 나타낸다. 또 x_c 는 크랙의 위치를 의미한다. 외팔보의 회전운동 중에 생기는 축방향 및 횡방향의 탄성변형은 가정 모드법(assumed mode method)을 이용하여 근사화 할 수 있다. 그리고 각 가정모드함수 $\phi_{1i}(x)$, $\phi_{2i}(x)$ 는 크랙이 존재하는 위치를 기준으로 각각 구분되어 유도되어 질 수 있다. (4) 또, 외팔보의 축방향 및 굽힘방향 경계조건 및 크랙위치에서의 연속조건은 각각 다음과 같다.

$$\phi_{1i}(0) = 0, \quad \frac{d\phi_{1i}(L)}{dx} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{d\phi_{1i}(x_c)}{dx} = \frac{d\phi_{1i}(x_c)}{dx} \quad (2)$$

$$\phi_{2i}(0) = 0, \quad \frac{d\phi_{2i}(0)}{dx} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2\phi_{2i}(L)}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\phi_{2i}(L)}{dx^3} = 0$$

$$\phi_{1i}(x_c) = \phi_{2i}(x_c), \quad \frac{d^2\phi_{1i}(x_c)}{dx^2} = \frac{d^2\phi_{2i}(x_c)}{dx^2}, \quad (4)$$

$$\frac{d^3\phi_{1i}(x_c)}{dx^3} = \frac{d^3\phi_{2i}(x_c)}{dx^3}$$

또 크랙 위치에서의 회전 및 병진스프링 상수가 포함된 연속조건은 횡방향 및 축방향의 연성효과를 고려하여 다음 식으로 표현할 수 있다.⁽⁶⁾

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{15} \\ k_{51} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12}(x_c) - \phi_{11}(x_c) \\ \frac{d\phi_{22}(x_c)}{dx} - \frac{d\phi_{11}(x_c)}{dx} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서 축방향 힘 P 와 굽힘 모멘트 M 은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA \frac{d\phi_{12}(x_c)}{dx} \\ EI \frac{d^2\phi_{22}(x_c)}{dx^2} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

여기서 EI 는 외팔보의 굽힘 강성계수이다.

2.1 크랙에 의한 탄성 변형에너지

같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 더 발생하게 된다. Castigliano의 정리를 이용하여 단면이 사각형인 보의 제 I 파괴모드에 대한 축방향 힘과 굽힘 모멘트에 대한 유연행렬을 구하면 각각 다음과 같다.

$$C_{11} = \frac{2\pi h}{A} \frac{(1-\nu^2)}{E} \int_0^H \bar{a} [F_1(\bar{a})]^2 d\bar{a} \quad (7)$$

$$C_{15} = C_{51} = \frac{\pi h^2}{I} \frac{(1-\nu^2)}{E} \int_0^H \bar{a} F_1(\bar{a}) F_2(\bar{a}) d\bar{a} \quad (8)$$

$$C_{55} = \frac{6\pi h}{I} \frac{(1-\nu^2)}{E} \int_0^H \bar{a} [F_2(\bar{a})]^2 d\bar{a} \quad (9)$$

여기서 $I = bh^3/12$ 이다. 또 C_{15} 와 C_{51} 은 각 힘의 방향에 대한 연성효과를 표현한 것이다. 강성행렬은 식 (7)~(8)의 유연행렬을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{15} \\ k_{51} & k_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{15} \\ C_{51} & C_{55} \end{bmatrix}^{-1} \quad (10)$$

따라서 회전 및 병진스프링 상수 K_R 과 K_T 는 각각 다음 식으로 계산되어 진다.

$$K_T = \frac{C_{55}}{C_{11}C_{55} - C_{15}C_{51}}, \quad (11)$$

$$K_R = \frac{C_{11}}{C_{11}C_{55} - C_{15}C_{51}}$$

여기서 C_{15} 와 C_{51} 의 연성효과는 전체 시스템의 동특성에 극히 미소한 영향을 미치기 때문⁽⁶⁾에 이 연구에서는 각 방향에서의 연성효과를 무시하였다.

2.2 크랙을 가진 외팔보의 에너지식

변형에 따른 외팔보의 임의의 질점 P 의 속도는 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{P/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} + \mathbf{u}) \quad (12)$$

여기서 \mathbf{v}_O 와 $\mathbf{v}_{P/A}$ 는 각각 O 점의 속도와 P 점의 A 점에 대한 상대속도를 나타내며, $\boldsymbol{\omega}$ 는 고정축의 회전 각속도 벡터를 나타내고 있다. 식 (12)의 속도를 이용하여 외팔보의 운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T_p = \frac{1}{2} m \left[\int_0^{x_c} \mathbf{v}_{P1} \mathbf{v}_{P1} dx + \int_{x_c}^L \mathbf{v}_{P2} \mathbf{v}_{P2} dx \right] \quad (13)$$

여기서 외팔보의 임의의 질점의 속도 \mathbf{v}_{P1} 과 \mathbf{v}_{P2} 는 크랙위

치를 기준으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} v_{F1} &= (\dot{u}_{1(1)} - \omega u_{2(1)}) \mathbf{i} + (r\omega + \dot{u}_{2(1)} + \omega(x + u_{1(1)})) \mathbf{j} \\ (0 \leq x \leq x_c), \\ v_{F2} &= (\dot{u}_{1(2)} - \omega u_{2(2)}) \mathbf{i} + (r\omega + \dot{u}_{2(2)} + \omega(x + u_{1(2)})) \mathbf{j} \\ (x_c \leq x \leq L) \end{aligned} \quad (14)$$

회전 외팔보의 포텐셜 에너지를 크랙의 영향을 고려하여 구하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_{\mu} &= \frac{1}{2} EA \left[\int_0^{x_c} \left(\frac{\partial s_{(1)}}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{x_c}^L \left(\frac{\partial s_{(2)}}{\partial x} \right)^2 dx \right] \\ &+ \frac{1}{2} EI \left[\int_0^{x_c} \left(\frac{\partial^2 u_{2(1)}}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_{x_c}^L \left(\frac{\partial^2 u_{2(2)}}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] \\ &+ K_R \left(\Delta \frac{du_2}{dx} \Big|_{x=x_c} \right)^2 + K_T (\Delta u_1 \Big|_{x=x_c})^2 \end{aligned} \quad (15)$$

식 (15)의 마지막 두 항은 각각 다음과 같다.

$$\Delta \frac{du_2}{dx} \Big|_{x=x_c} = \frac{du_{2(2)}}{dx} \Big|_{x_2=0} - \frac{du_{2(1)}}{dx} \Big|_{x_1=x_c} \quad (16)$$

$$\Delta u_1 \Big|_{x=x_c} = u_{1(2)} \Big|_{x_2=0} - u_{1(1)} \Big|_{x_1=x_c}$$

2.3 운동방정식

계의 운동방정식은 앞에서 구한 크랙을 가진 회전 외팔보의 에너지식들을 Lagrange 방정식에 대입하여 유도할 수 있으며 구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 사용한 무차원 매개변수는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \quad d_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \\ \xi_c &= \frac{x_c}{L}, \quad K_R^* = \frac{K_R L}{EI}, \quad K_T^* = \frac{K_T L^3}{EI}, \quad (17) \\ \Omega_m &= \omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}, \quad H = \frac{a_c}{h} \end{aligned}$$

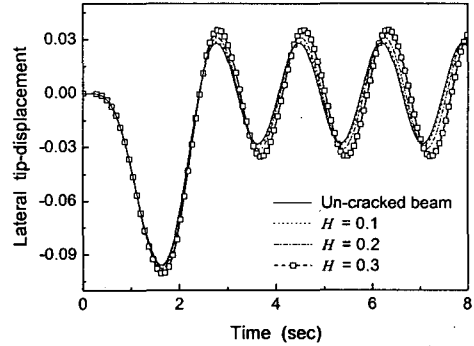
식 (17)의 무차원 매개변수들을 사용한 축방향 및 횡방향의 무차원 운동방정식은 행렬을 이용하여 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{P} \quad (18)$$

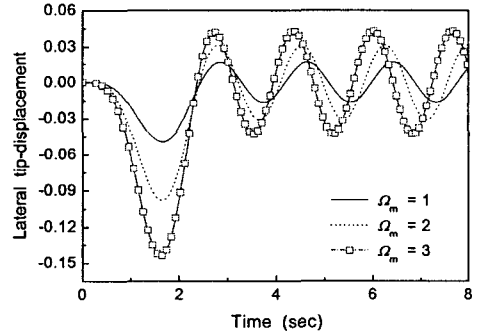
여기서 (\cdot) 는 무차원화된 시간 τ 에 대한 미분을 나타내며, 행렬 \mathbf{M} , \mathbf{C} , 그리고 \mathbf{K} 는 각각 크랙을 가진 회전 외팔보의 질량행렬, 감쇠행렬, 그리고 강성행렬을 각각 나타내고 있다. 또 $\mathbf{d} = [d_{1i}, d_{2i}]^T$ 이다. 식 (18)의 운동방정식은 자유통해석에 대해 고유치 문제를 해결할 수 있다.

3. 수치해석 결과 및 고찰

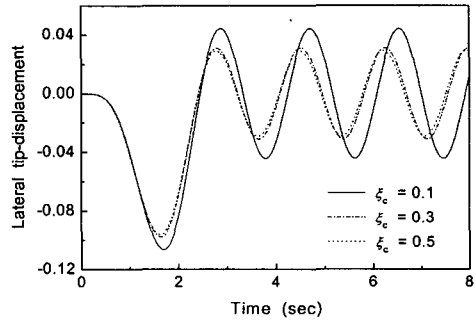
앞 절에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 크랙을 가진 회전 외팔보의 동적특성을 수치해석하였다. Fig. 2는 회전 외팔보가 크랙을 가진 경우에 외팔보의 끝단 횡변위를 각 파라미터의 영향에 따라 표현한 것이다. Fig. 2 (a)는 크랙의 깊이, (b)는 회전 각속도, 그리고 (c)는 크랙의 위치에



(a) Effect of crack depth ($\Omega_m = 2, \xi_c = 0.3$)



(b) Effect of angular velocity ($H = 0.2, \xi_c = 0.3$)



(c) Effect of crack position ($\Omega_m = 2, H = 0.2$)

Fig. 2 Dimensionless lateral tip-displacement of a rotating cantilever beam with a crack

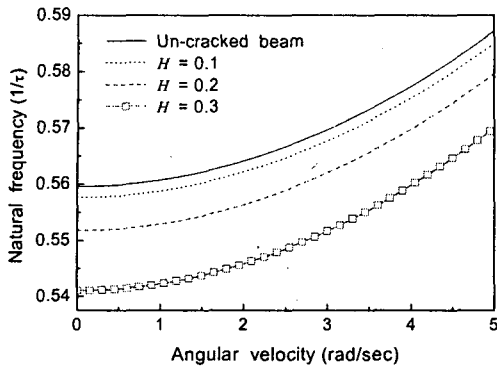


Fig. 3 Lateral natural frequency of a rotating cantilever beam according to the crack depth ($\Omega_m = 2, \xi_c = 0.3$)

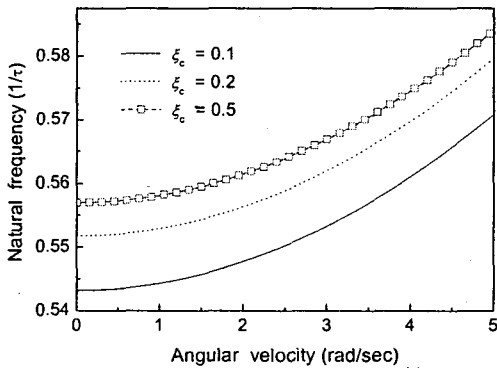


Fig. 4 Lateral natural frequency of a rotating cantilever beam according to the crack position ($\Omega_m = 2, H = 0.2$)

다른 외팔보의 끝단 횡변위를 각각 도시하였다. Fig. 2 (a)에서 크랙의 크기가 0.1 일 때에 비하여 크랙의 크기가 0.3 인 경우 과도상태에서 외팔보의 최대 처짐은 약 4 % 정도 증가하였다. 또 Fig. 2 (c)의 크랙의 위치에 의한 외팔보의 끝단 횡변위를 살펴보면, 회전하지 않는 외팔보와 마찬가지로 크랙의 위치가 고정단에서부터 가까울수록 끝단 횡변위는 더 커진다는 것을 알 수 있다. Fig. 3과 Fig. 4는 회전 외팔보의 횡진동 고유진동수에 미치는 크랙의 위치와 크기, 그리고 회전 각속도의 영향을 표현한 것이다. 전반적으로 회전 각속도는 외팔보의 횡진동 고유진동수에 서로 비례적이며, 크랙의 크기와 외팔보의 횡진동 고유진동수는 반비례적인 경향을 가진다. Fig. 3에서 회전 각속도가 1 rad/s 인 경우 크랙의 크기가 각각 0.1에서 0.3으로 증가할 때 회전 외팔보의 고유진동수는 약 3.46 % 정도 감소하며, 회전 각속도가 5 rad/s 일 때는 약 2.91 % 정도의 고유진동수 감소를 보인다. 즉, 미소하지만 회전 각속도가 증가할수록 외팔보의

횡진동 고유진동수에 미치는 크랙의 영향이 감소한다는 것을 판단할 수 있다. Fig. 4에서는 크랙의 위치가 0.1 일 때 회전 외팔보의 횡진동 고유진동수가 가장 작은 값을 가진다.

4. 결론

크랙을 가지는 회전 외팔보의 동특성에 미치는 각 파라미터들의 영향, 즉 크랙의 크기, 크랙의 위치, 그리고 외팔보의 회전 각속도가 외팔보의 끝단의 종진동 및 횡진동 변위와 외팔보의 고유진동수에 미치는 영향을 수치해석 하였다. 이 연구의 수치해석 예제에 적용한 파라미터들에 대하여 얻어진 연구결과는 다음과 같다.

- (1) 크랙을 가진 회전 외팔보의 끝단 종진동 및 횡진동 변위에 미치는 영향은 크랙에 의한 영향에 비하여 회전 각속도의 영향이 더 크다.
- (2) 외팔보의 회전 각속도가 증가할수록 회전 외팔보의 횡진동 고유진동수에 미치는 크랙의 영향이 감소한다.
- (3) 회전하지 않는 외팔보에서는 외팔보의 변위에 미치는 크랙의 크기에 대한 영향이 크랙의 위치에 대한 영향보다 크게 나타나지만, 회전하는 외팔보에서의 보의 변위에 미치는 영향은 크랙의 크기에 의한 영향보다 크랙의 위치에 의한 영향이 더 크다.

참고 문헌

- (1) Rao, J. S. 1996, Rotor Dynamics (3th ed.), New Age.
- (2) Yoo, H., Ryan, R. and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," Journal of Sound and Vibration, 181(2), pp.261-278.
- (3) Panussis, D. A. and Dimarogonas, A. D., 2000, "Linear In-Plane And Out-of-Plane Lateral Vibrations of a Horizontally Rotating Fluid-Tube Cantilever," Journal of Fluids and Structures, Vol. 14, pp. 1~24.
- (4) 윤한익, 손인수, 2003, "회전하는 유체이송 외팔 파이프의 동특성 해석," 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권, 제 1 호, pp. 26~32.
- (5) Fung, E. H. K. and Yau, D. T. W., 2001, "Vibration Frequencies of a Rotating Flexible Arm Carrying a Moving Mass," Journal of Sound and Vibration, 241(5), pp. 857~878.
- (6) Dado, M. H. F. and Abuzeid, O., 2003, "Coupled transverse and axial vibratory behaviour of cracked beam with end mass and rotary inertia," Journal of Sound and Vibration, Vol. 261, pp. 675~696.