

## 집중질량을 갖는 후판의 진동해석

### Vibration Analysis of Rectangular Thick Plate with Concentrated Mass

○ 김일중\*

Kim, Il Jung

**Key Words :** Concentrated Mass, Pasternak foundaion, winkler foundation parameter, shear foundation parameter, thick plate

#### ABSTRACT

This paper is for the vibration analysis of thick plate with concentrated mass on a inhomogeneous pasternak foundation. The thick rectangular plate resting on a inhomogeneous pasternak foundation is isotropic, homogeneous and composite with linearly elastic material. In order to analyze plate which is supported on inhomogeneous pasternak foundation, the value of winkler foundation parameter(WFP) of centural and border zone of plate are chosen as  $Kw1$  and  $Kw2$  respectively. The value of  $Kw1$  and  $Kw2$  can be changed as 0, 10,  $10^2$ ,  $10^3$  and the value of SFP(shear foundation parameter) also be changed 0, 5, 10, 15 respectively. Finally, In this paper, vibration of rectangular plate on the inhomogeneous pasternak foundation, natural frequency of this plate with Concentrated Mass are calculated

#### 기호설명

- $2\bar{a} \times 2\bar{b}$  : 전체판의 크기
- $D$  : 판의 휨강성
- $E$  : 탄성계수
- $G$  : 전단탄성계수
- $k_w$  : Winkler 지반강성
- $k_g$  : 전단지반강성
- $M_c$  : 판의 요소질량
- $SFP$  : 전단지반계수
- $WFP$  : Winkler지반계수
- $\rho$  : 단위 체적당 질량
- $\nu$  : 포아송비
- $w$  : 수직처짐
- $\theta_x$  :  $x$ 방향 회전각
- $\theta_y$  :  $y$ 방향 회전각
- $\omega$  : 판의 고유진동수

#### 1. 서론

구조 부재중 판(plate) 요소는 건축, 토목, 항공, 기계, 선박등 공학 전반적인 분야에서 활용되고 있다. 이러한 판 부재의 고유진동수는 판으로 조합된 구조 부재의 내력에 큰 영향을 미치게 된다. 특히 구조물 주변의 발파, 향타, 폭발, 차량이동, 지진 등 주변 환경 요인에 의한 동적 영향이 주변 구조물에 영향을 미치게 된다. 이러한 지반매질을 통한 동적응답 전달과정을 지반-구조물 상호 작용이라 한다. 지반-구조물 상호작용이 주로 일어나는 대표적인 예로는 철도 궤도, bridge deck, 온통 기초 등을 들 수 있다. 또한 산업화로 인한 진동기기들로 인해 판구조물은 지속적인 진동의 영향을 받는다. 지반에 지지된 기초와 같은 판 요소는 지반 진동문제를 해결하기 위해 판에 작용하는 진동특성에 대한 연구가 필요하다.

본 연구는 집중 질량을 갖는 구조물의 거동 특성에 대해 판의 진동해석을 하여 Mat 기초와 슬라브 등과 같은 구조물의 설계 시 집중질량에 대한 효과를 파악하고 효율적인 설계를 위한 기초자료 를 얻는데 그 목적이 있다.

판의 자유진동해석을 위해 가상일의 원리를 적용하였으며,

\* 책임저자, 정회원, 전북과학대학 건축토목계열 조교수  
전화: 063-530-9273; Fax: 063-537-0226  
E-mail: platepro@jbsc.ac.kr

후판의 해석을 위해 Mindlin판 이론을 적용하고, 유한요소해석을 위해 8절점 Serendipity 요소계를 이용하여 집중질량의 크기 변화에 따른 고유진동수를 파악하였다. 판을 지지하는 지반은 Pasternak 지반 모형을 사용하였다.

## 2. 유한요소해석에 의한 판의 진동

가상일의 원리[ $\delta(T_e - U_e) = 0$ ] 의해 판의 진동해석을 위한 방정식을 얻을 수 있다.

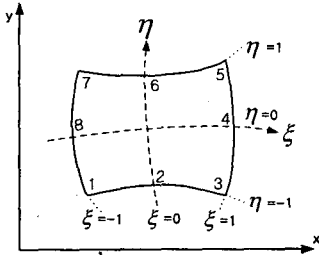


Fig. 1 8-nodes element on Two-Dimensional

본 해석을 위해 8절점 아이소파라메트릭 요소를 사용하였으며 요소내의 임의 점 좌표  $x, y$ 를 절점 좌표로 표시하면 다음과 같다.

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad (1a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad (1b)$$

처짐 및 회전각은 다음과 같다.

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i w_i \quad (2a)$$

$$\theta_x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{x_i} \quad (2b)$$

$$\theta_y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i \theta_{y_i} \quad (2c)$$

판 요소에 대한 변형에너지( $U_e$ ), 판과 집중질량에 의한 운동에너지( $T_e$ )와 외력( $W_e$ )에 의한 일에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\delta U_e = \{w_e\}^T [K_e] \{w_e\} + \{w_e\}^T [K_f] \{w_e\} \quad (3a)$$

$$\delta T_e = \{\dot{w}_e\}^T [m_e] \{\dot{w}_e\} + \{\dot{w}_e\}^T [m_p] \{\dot{w}_e\} \quad (3b)$$

$$\delta W_e = \{w_e\}^T [K_G] \{w_e\} \quad (3c)$$

판 요소의 운동 에너지( $T_e$ )와 변형 에너지( $U_e$ )를 전체 판 요소에 대한 것으로 조합하고 가상일의 원리에 의해 얻어진 방정식을 이용하여 다음과 같은 집중질량을 갖는 판의 고유치 방정식을 얻었다.

$$[K_E] - \omega_e^2 [M] = 0 \quad (4)$$

여기서,

$$[K_E] = [K_e] + [K_f] : \text{판의 전체 요소 강성 행렬}$$

$$[M] = [m_e] + [m_p]$$

: 집중질량을 갖는 판의 전체 질량 행렬

$\omega_e$  : 판의 원 진동수

(4)식의 고유치방정식에서 집중질량을 갖는 판의 진동수를 구할 수 있다.

## 3. 집중 질량을 갖는 판의 진동해석

유한요소해석을 위해 정방형 판을 대칭성을 고려하여 1/4 부분을 5×5로 요소 분할하여 해석하여 진동수를 구하였다. 해석의 신뢰성을 검증하기 위해 기존해에 대해 Pasternak 지반 위에 놓인 판의 고유진동수를 비교 검증하였으며 그 결과는 Table 1에 나타났다. 이와 같이 유한요소해석의 신뢰성을 검증한 후 탄성지반 위에 놓인 후판의 질량변화와 비균질 지반 강성변화에 따른 판의 진동수를 구하였다.

본 연구를 위한 해석 조건은 다음과 같다.

탄성계수( $E$ ) :  $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

단위체적당질량( $\rho$ ) :  $7.981413 \times 10^{-6} \text{ kgf/cm}^3$

포아송비( $\nu$ ) : 0.3

판 두께( $h$ ) : 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 15.0 cm

판의 크기( $a \times b$ ) :  $1.0 \times 1.0 \text{ m}$

지반강성 변화위치( $u_1, v_1$ ) : 0.3 m

WFP ( $Kw1, Kw2$ ) : 0, 10,  $10^2, 10^3$

SFP ( $K_G$ ) : 0, 5, 10, 15

집중질량비 ( $m_c / m$ ) : 1.0, 4.0

판의 지지상태 : 4변 단순지지(S-S-S-S),

4변 고정지지(C-C-C-C)

여기서,

$m_c$  : 판에 작용하는 집중질량의 크기

$m$  : 해석을 위한 판의 질량의 크기

SFP : 전단지반 파라미터

WFP : Winkler 지반 파라미터

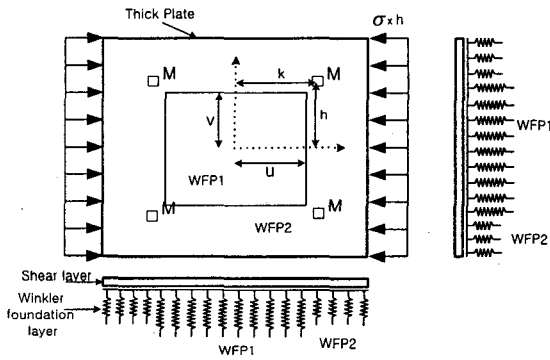
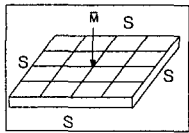
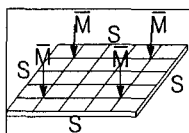


Fig. 2 Plate Modelling on Pasternak Foundation



Mass : center



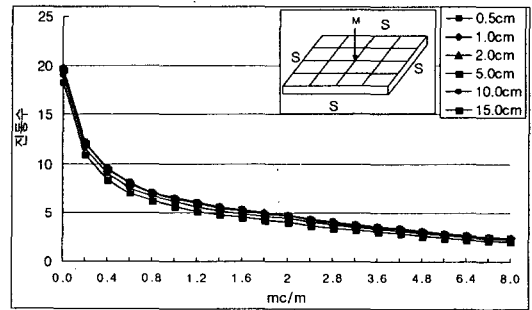
Mass :  $u=v=0.3m$

Fig. 3. The types of plates with Concentrated Mass

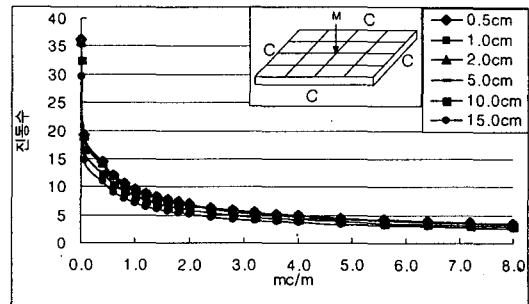
Table 1.은 Winkler 지반강성과 전단지반 강성을 고려한 고유진동수를 참고문헌[5]와 비교하였으며 최대 0.22%이하의 적은 오차를 보였다.

Table 1. Natural frequency various foundation parameters ( $\omega \bar{a}^2 \sqrt{\rho/D}$ ,  $t=20cm$ , S-S-S-S)

SFP	WFP	Ref[4]	This study	Errors
0	0	17.4486	17.4345	0.08
	10	17.7208	17.7071	0.08
	$10^2$	20.0042	19.9952	0.05
	$10^3$	35.5028	35.5161	-0.04
10	$10^4$	98.5331	98.7452	-0.22
	0	22.2117	22.1956	0.07
	10	22.4261	22.4104	0.07
	$10^2$	24.2698	24.2580	0.05
	$10^3$	38.0638	38.0741	-0.03
	$10^4$	99.4473	99.6619	-0.22

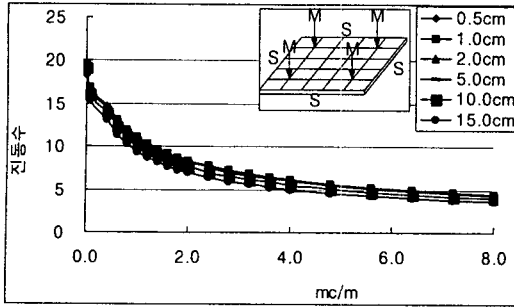


(a) S-S-S-S

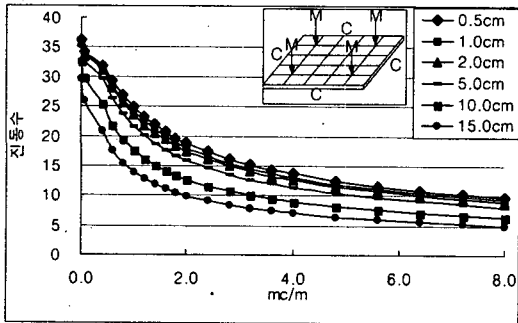


(b) C-C-C-C

Fig. 4 Frequency of plate with concentrated mass (Concentrated Mass Position : Center)



(a) S-S-S-S



(b) C-C-C-C

Fig. 5 Frequency of plate with concentrated mass  
(Concentrated Mass Position :  $u=v=0.3m$ )

Fig.4는 질량의 크기 변화에 대한 진동수를 나타낸 것이고, Fig.5는  $u, v = 30cm$  위치 4군데에 집중 질량을 갖는 경우의 집중 질량 변화에 따른 진동수의 변화를 나타낸 것이다.

#### 4. 결론

본 연구는 집중 질량을 갖는 판의 고유진동수를 구하기 위해 지지 강성, 질량크기와 위치, 지지단의 조건 등을 변화시켜가며 진동수를 구하였다. 그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 집중질량에 의한 판의 진동수는 질량의 크기가 커질수록 진동의 변화에 급격한 감소를 보였다.
2. 집중질량은 질량의 크기에 의한 진동수 변화 보다 작용하는 위치에 따라 많은 변화가 발생하였으며, 특히 중앙에 집중질량을 갖는 경우가 진동수를 크게 감소시키는 경향이

있었다.

3.  $U, V=0.3$  위치에 작용하는 고정지지의 경우 질량이 작아짐에 따라 진동수 변화가 적었으며 일정 질량 크기 이상에서 급격한 진동수 감소가 생긴 뒤 일정한 값으로 수렴함을 알 수 있다.

#### 참고 문헌

1. D. Young, "Vibration of rectangular plates by the Rayleigh-Ritz method" J. appl. Mech.17, pp.448-453, 1950
2. G. B. Warburton, "The vibration of rectangular plates", Proc. Institute of Mechanical Engineers, pp.371-384, 1953
3. A.W.Leissa, "Vibration of plates". NASA SP-160, 1969
4. P. A. A Laura, R. H. Gutierrez, "Vibration of Plates Elastically Supported on a Non-Homogeneous Foundation", Journal of Sound Vibration, Vol.95, No.4, pp.531~536, 1984
5. K. N.saha, R. C. Kar, P. K Datta, "Dynamic Stability of a Rectangular Plate on Non-homogeneous Winkler Foundation", JCS, Vol.63, pp.1213-1222, 1997
6. M. Celik, A. Saygun, "A method for the analysis of plates on a two-parameter foundation", computer and structure, vol.36, 1999, pp.2891-2915
7. 이용수 외, "탄성스프링으로 지지된 보강판의 좌굴 및 진동해석에 관한 연구", 한국전산구조공학회 학술발표 논문집, 제 12권 2집 통권 제 23호, pp 35-42, 1999.54.
8. 백승목, "탄성스프링으로 지지된 정면내응력을 받는 보강판의 좌굴 및 진동해석", 석사학위논문, 원광대, 1999
9. R. F. S. Hearmon, "The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or supported edges", J. appl. Mech. Trans. ASME, 1959, pp.537-540.
10. 이용수 외, "정면내응력을 받는 유공후판의 진동해석", 한국소음진동공학회 춘계학술발표대회논문집, pp797-801, 2003. 11.14