

# 탄성기초 위에 놓인 크랙 외팔보의 동특성에 미치는 이동질량의 영향

## The Effect of Moving Mass on Dynamic Behavior of Cracked Cantilever Beam on Elastic Foundations

안성진\* · 손인수\*\* · 윤한익†

Sung-Jin Ahn, In-Soo Son and Han-Ik Yoon

Key Words : Moving Mass(이동질량), Elastic Foundations(탄성기초), Open Crack(개구형 크랙), Flexibility Matrix(유연행렬)

### ABSTRACT

In this paper the effect of moving mass on dynamic behavior of cracked cantilever beam on elastic foundations is presented. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the equation of motion can be constructed by using the Lagrange's equation. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting two undamaged beam segments. That is, the crack is modelled as a rotational spring. This flexibility matrix defines the relationship between the displacements and forces across the crack section and is derived by applying fundamental fracture mechanics theory. The crack is assumed to be in the first mode of fracture. As the depth of the crack is increased, the tip displacement of the cantilever beam is increased. When the crack depth is constant the frequency of a cracked beam is proportional to the spring stiffness.

### 1. 서론

구조손상의 하나인 크랙은 발생과 성장과정을 거치면서 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시키며, 이동질량과 이동하중은 그 가속도의 영향에 의하여 보의 동특성에 큰 영향을 미친다.<sup>(1)</sup> 따라서 이동질량을 가진 외팔보에 크랙형태의 결함이 발생하게 되면 이동질량과 크랙의 연성관계에 의하여 외팔보의 동특성에 큰 영향을 미칠 것으로 생각된다. 더욱이 탄성기초 위에 놓인 크랙을 가진 외팔보는 이동질량이 존재하는 경우 시스템의 동특성 변화에 크게 미칠 것으로 판단된다. 그러므로 이동질량과 크랙을 가지는 탄성기초 위에 놓인 외팔보의 크랙의 위치 및 크기, 이동질량의 크기변화와 탄성기초의 강성변화에 따른 동특성을 파악하는 것도 중요한 문제이다.

크랙이 구조물의 동적특성에 미치는 영향을 연구하기 위하여 초기에는 구조물에서 단지 크랙이 존재하는 부분의 강성을 줄이는 방법이 시도되었고, 최근에는 유연행렬을 이용하여 크랙에 의해 부가되는 에너지를 고려하는 해석방법

을 사용하고 있다.<sup>(2,3)</sup> 또 최근 많은 연구자들은 보 형태 구조물의 동적특성에 미치는 크랙의 영향에 대하여 연구<sup>(4,5)</sup>하였고, Lee<sup>(6)</sup>는 티모센코 보 및 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 외팔보에 이동질량이 존재하는 경우, 이동질량 보 형태 구조물의 동적 응답에 미치는 영향을 수치해석하였다. 최근의 탄성기초에 관한 연구를 살펴보면, 탄성기초 위에 놓인 변화곡률 수평 곡선보 자유진동 해석<sup>(7)</sup>, 탄성기초 위에 놓인 티모센코 보의 진동수에 관한 연구<sup>(8)</sup> 등이 있으며, Lee<sup>(9)</sup>는 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 탄성스프링으로 지지된 외팔보의 동적응답을 연구하였다.

이 연구에서는 교량이나 지반에 의해 지지된 구조물과 같이 탄성기초 위에 놓인 외팔보 형태의 구조물에 이동질량과 크랙과 같은 형태의 결함을 갖는 경우를 고려하여 크랙과 이동질량의 존재가 계의 동특성에 미치는 영향을 수치해석 하였다. 특히, 크랙, 이동질량, 그리고 탄성기초의 강성의 연성관계가 외팔보의 동특성에 미치는 영향을 수치해석하였다. 즉, 이들 인자들의 연성효과를 해석하여 크랙과 이동질량을 가지는 탄성기초위에 놓인 외팔보의 진동을 제어할 수 있는 특성들을 연구하여 계의 설계 변수들을 제시하였다. 또 크랙의 영향으로 인한 계의 동특성 변화를 관찰하여 구조물의 안전 진단 및 사고예방에 기여할 수 있을 것이다.

† 동의대학교 기계공학부  
E-mail : hiyoon@deu.ac.kr  
Tel : (051) 890-1645, Fax : (051) 890-2232

\* 동의대학교 대학원 기계공학과

\*\* 동의대학교 산업기술개발연구소

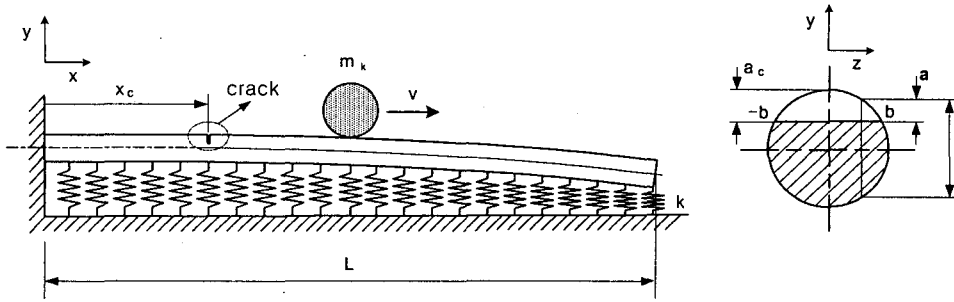


Fig. 1 Geometry of the cracked cantilever beam with a moving mass

## 2. 시스템 모델링

Fig. 1은 크랙과 일정한 속도로 이동하는 질량을 가지며, 보의 고정단으로부터 병진탄성스프링들에 의하여 지지된 외팔보를 나타내고 있다. 여기서  $m_k$ 는 외팔보 위를 이동하는 이동질량,  $v$ 는 이동질량의 속도, 그리고  $L$ 은 외팔보의 전체 길이를 나타낸다. 또  $a_c$ ,  $h$ , 그리고  $2b$ 는 각각 크랙의 깊이와 크랙이 존재하는 외팔보 단면의 지름, 그리고 크랙의 길이를 표현하고 있다.  $x_c$ 는 크랙이 존재하는 위치를 나타내며,  $k$ 는 스프링상수 값이다.

### 2.1 외팔보, 이동질량 및 탄성지지의 에너지

외팔보의 횡변위  $y(x, t)$ 는 이동질량이 없는 경우, 경계 조건을 만족시키는 고유함수  $\phi_i(x)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

여기서  $q_i(t)$ 는 일반화 좌표,  $\mu$ 는 일반화 좌표수이다. 크랙을 가진 탄성스프링으로 지지된 외팔보의 포텐셜 에너지를 오일러-베르누이 보 이론을 적용하여 구하면 다음과 같다.

$$V_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \left[ EI \int_0^{L_j} \{\phi_{ij}''(x) q_i(t)\}^2 dx \right] + \frac{1}{2} K_R (\Delta y'_c)^2 + \frac{1}{2} k \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^{L_j} [\phi_{ij}(x) q_i(t)]^2 dx \quad (2)$$

여기서  $K_R$ 은 크랙으로 인하여 부가되는 회전스프링 상수를 의미하며,  $j$ 는 크랙을 가진 외팔보의 분할구간의 수이다. 외팔보의 운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T_c = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^{L_j} \{\phi_{ij}(x) \dot{q}_i(t)\}^2 dx \quad (3)$$

여기서  $m$ 은 외팔보의 단위길이당 질량이다. 또 이동질량의 운동에너지는 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$T_m = \frac{1}{2} \left[ m_k \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ v^2 \sum_{j=1}^{\mu} q_i^2(t) \phi_{ij}^2[f_k(t)] + 2v \sum_{j=1}^{\mu} q_i(t) \dot{q}_j(t) \phi_{ij}[f_k(t)] \phi_{jj}[f_k(t)] + \sum_{j=1}^{\mu} \dot{q}_j^2(t) \phi_{jj}^2[f_k(t)] \right\} + v^2 m_k \right] \quad (4)$$

여기서  $f(t)$ 는 이동질량의 수평변위를 나타낸다.

### 2.2 크랙에 의한 탄성변형에너지 식

선형 탄성구간에서 크랙으로 인한 부가적인 변형에너지는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유전형질의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가 에너지만큼 추가적인 변형이 더 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙 부분의 유전형질을 크랙에 의한 부가변위를 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$C_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j} \left[ \int_{-b}^b \int_0^{a_c} J(\alpha) d\alpha dz \right] \quad (5)$$

여기서  $P_i$ 는  $i$ 방향으로의 일반화된 힘으로  $i=1, 2, \dots, 6$ 이고,  $J(\alpha)$ 는 변형률 에너지 밀도함수로서 다음과 같다.

$$J(\alpha) = \frac{1}{E^*} \left[ \left( \sum_{i=1}^6 K_{ii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{iii} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^6 K_{iiii} \right)^2 \right] \quad (6)$$

여기서  $E^*$ 은 평면변형에 대하여  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$ 로 표현된다. 또  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , 그리고  $K_{III}$ 는 제 1 파괴모드(개구형), 제 2 파괴모드(면내전단형), 그리고 제 3모드(면외 전단형)의 응력집중계수를 각각 의미한다. 제 1 파괴모드인 굽힘모드에 대해서 변형을 에너지 밀도함수를 구하면 다음과 같이 간단히 표현 할 수 있다.

$$J(\alpha) = \frac{1}{E^*} (K_{IM} + K_{IP})^2 \quad (7)$$

실측 원형단면인 경우 식 (7)의  $K_{IM}$ 와  $K_{IP}$ 는 각각 다음과 같다.

$$K_{IP} = \frac{V}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{\pi \alpha} F_I\left(\frac{\alpha}{h}\right) \quad (8)$$

$$K_{IM} = \frac{4M}{\pi R^4} \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{\pi \alpha} F_{II}\left(\frac{\alpha}{h}\right)$$

여기서  $V$ ,  $M$ 은 각각 힘과 모멘트이고,  $\nu$ 는 Poisson의 비를 나타내며,  $F_I(\alpha/h)$ 와  $F_{II}(\alpha/h)$ 는 다음과 같다.

$$F_I\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \left(\frac{1}{\zeta} \tan \zeta\right)^{1/2} \frac{[0.753 + 2.02\left(\frac{\alpha}{h}\right) + 0.199(1 - \sin \zeta)^3]}{\cos \zeta}$$

$$F_{II}\left(\frac{\alpha}{h}\right) = \left(\frac{1}{\zeta} \tan \zeta\right)^{1/2} \frac{[0.923 + 0.199(1 - \sin \zeta)^4]}{\cos \zeta} \quad (9)$$

여기서  $\zeta = \frac{\pi \alpha}{2h}$ 이다. 따라서 식 (7)~(9)을 식 (5)에 대입하면 유연행렬(6×6)을 얻을 수 있으며, 해석에 필요한 회전 스프링 상수는 이 행렬의 역수를 취함으로써 구할 수 있다.

### 2.3 계의 운동방정식

계의 운동방정식은 앞의 에너지식을 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left[ \left\{ \sum_{j=1}^2 m \int_0^{L_j} \phi_{ij}^2(x) dx + \sum_{k=1}^2 m_k \phi_{ij}^2(x_k) \right\} \ddot{q}_i(t) \right. \\ & + \left\{ \sum_{k=1}^2 m_k \frac{d}{dt} (\phi_{ij}^2(x_k)) \right\} \dot{q}_i(t) \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^2 EI \int_0^{L_j} (\phi_{ij}''(x))^2 dx + \sum_{k=1}^2 \left\{ v m_k \frac{d}{dt} (\phi_{ij}'(x_k)) \phi_{ij}'(x_k) \right. \right. \\ & \left. \left. - m_k v^2 (\phi_{ij}'(x_k))^2 + v m_k \frac{d}{dt} (\phi_{ij}'(x_k)) \phi_{ij}'(x_k) \right\} \right. \\ & \left. + K_R [\phi_{2i}(x) - \phi_{1i}(x)]^2 + \sum_{j=1}^2 k \int_0^{L_j} \phi_{ij}^2(x) dx \right\} q_i(t) \Big] = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

구해진 계의 운동방정식을 무차원화하기 위하여 다음과 같은 무차원 매개변수를 정의하였다.

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \xi_j = \frac{L_j}{L} \quad (j=1,2), \quad \bar{x}_k = \frac{x_k}{L},$$

$$\xi_c = \frac{x_c}{L}, \quad d = \frac{a}{L}, \quad \beta = \frac{m_k L}{\sqrt{mEI}} \bar{v},$$

$$\tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \gamma = \frac{m_k L^3}{EI} \bar{v}^2,$$

$$M_k = \frac{m_k}{mL}, \quad K_R^* = \frac{K_R L}{EI}, \quad K^* = \frac{kL^3}{EI} \quad (11)$$

여기서  $\bar{v}$ 는  $v/L$ 이다. 식 (11)의 무차원 매개변수를 이용하여 계의 무차원화된 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k \left[ \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_0^{\xi_j} \phi_{ij}^2(\xi) d\xi + M_k \phi_{ij}^2(\bar{x}_k) \right\} \ddot{d}_i(\tau) \right. \\ & + \left\{ M_k \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}^2(\bar{x}_k)] \right\} \dot{d}_i(\tau) \\ & + \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_0^{\xi_j} [\phi_{ij}''(\xi)]^2 d\xi + \sum_{k=1}^2 \left\{ \beta \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}'(\bar{x}_k)] \phi_{ij}'(\bar{x}_k) \right. \right. \\ & \left. \left. - \gamma [\phi_{ij}'(\bar{x}_k)]^2 + \beta \frac{d}{d\tau} [\phi_{ij}'(\bar{x}_k)] \phi_{ij}'(\bar{x}_k) \right\} \right. \\ & \left. + K_R^* [\phi_{2i}(\xi_2=0) - \phi_{1i}(\xi_1=\xi_c)]^2 \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 K^* \int_0^{\xi_j} \phi_{ij}^2(\xi) d\xi \right\} d_i(\tau) \Big] = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

여기서  $(\cdot)$ 는 무차원화된 시간  $\tau$ 에 대한 미분을 나타내고,  $(\cdot)$ '는 무차원 축방향 좌표인  $\xi$ 에 대한 미분을 표현한 것이다. 식 (12)의 무차원화된 운동방정식을 자유진동에 대하여 행렬형태로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (13)$$

식 (13)은 고유치 문제를 해결하기 위하여 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\mathbf{M}^* \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\tau} + \mathbf{K}^* \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0} \quad (14)$$

여기서 식 (14)의 각 항은 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{d\{\mathbf{d}\}}{d\tau} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서  $I$ 는 단위행렬을 의미한다. 식(14)~(16)을 이용하여 구해진 고유치는 복소수 형태의 값을 가지며 이 값의 허수 부분로부터 계의 고유진동수를 구할 수 있다.

### 3. 수치해석 결과 및 고찰

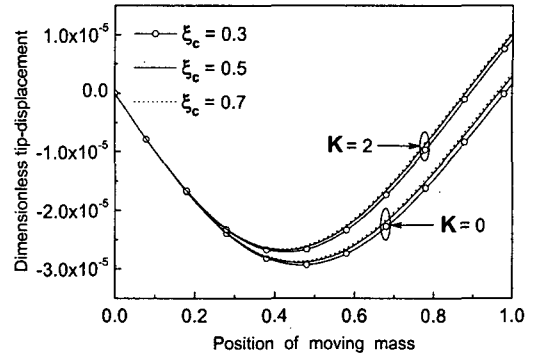
이 연구에서는 이론해석에서 유도된 무차원 운동방정식을 이용하여 이동질량과 크랙의 존재 유무 및 크랙의 크기, 탄성기초가 외팔보에 미치는 동특성을 수치해석을 통해 비교, 고찰하였다. 수치해석은 4차의 Runge-Kutta 법으로 수행하였다. 수치해석에 있어서 제 1차 모드의 횡변위가 제 2차 또는 그 이상의 상위 모드의 횡변위에 비하여 전반적으로 대단히 크기 때문에 이 연구에서는 제 1차 모드의 횡변위와 진동수에 대해서 고찰하였다. 수치해석 예제에 사용한 외팔보의 파라미터는 Table 1에 나타내었다.

Fig. 2는 크랙의 위치, 크기 및 스프링상수 값의 변화에 따른 외팔보의 끝단 횡변위를 표현한 것이다. 무차원화된 이동질량의 크기는 0.3이다. Fig. 2(a)는 크랙의 크기가 0.2일 때, 크랙의 위치변화에 따른 외팔보의 끝단 횡변위 변화를 나타낸 것이다. 크랙의 위치가 외팔보의 끝단으로 갈수록 횡변위는 감소하며, 탄성기초 위에 놓일 때가 그렇지 않을 때보다 외팔보의 횡변위는 감소한다. Fig. 2(b)는 크랙의 위치가 0.3인 지점에 존재할 때, 크랙의 크기변화에 대한 외팔보의 끝단 횡변위를 나타낸 것이다. 전반적으로 크랙의 크기가 증가할수록 외팔보의 횡변위는 증가함을 알 수 있다. Fig. 2(c)는 스프링상수 값의 변화에 따른 외팔보의 횡변위를 나타낸 것이다. 스프링상수 값과 횡변위는 서로 반비례적이며, 스프링상수 값이 증가함에 따라 외팔보의 최대 횡변위가 발생하는 이동질량의 위치가 고정단 쪽으로 이동되어진다.

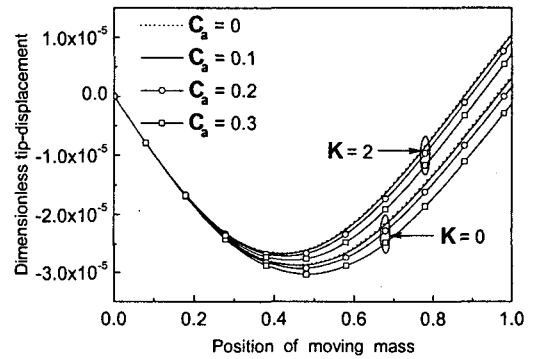
Fig. 3은 크랙의 크기와 위치의 변화에 따른 외팔보의 진동수를 표현한 것이다. 무차원화된 이동질량의 크기는 0.3이다. Fig. 3(a)는 크랙의 크기가 0.2일 때, 크랙의 위치에 따른 외팔보의 진동수변화를 나타낸 것이다. 외팔보의 진동수는 이동질량의 위치가 외팔보의 고정단으로부터 멀

Table 1 Specifications of the cracked cantilever beam

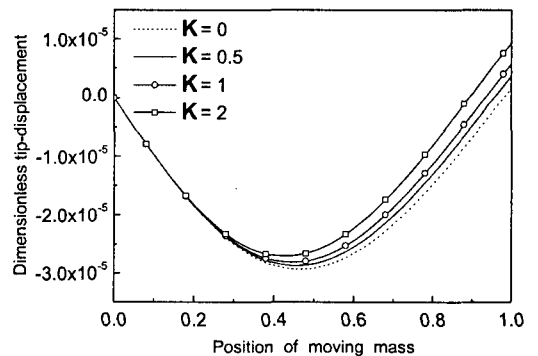
Property	Data
Total length of beam ( $L$ )	1.0 (m)
Radius of beam ( $R$ )	0.04 (m)
Young's modulus ( $E$ )	$2.0 \times 10^{11}$ (N/m <sup>2</sup> )
Density ( $\rho$ )	7860 (kg/m <sup>3</sup> )
Poisson ratio ( $\nu$ )	0.3



(a) Effect of crack position ( $C_a = 0.2$ )

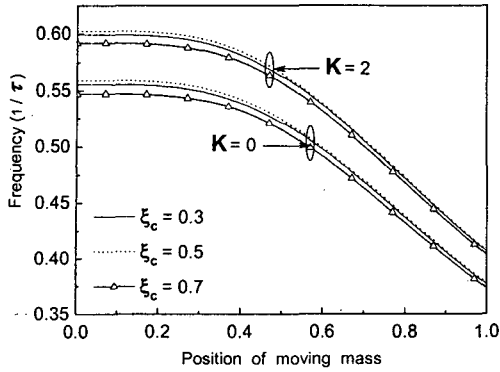


(b) Effect of crack depth ( $\xi_c = 0.3$ )

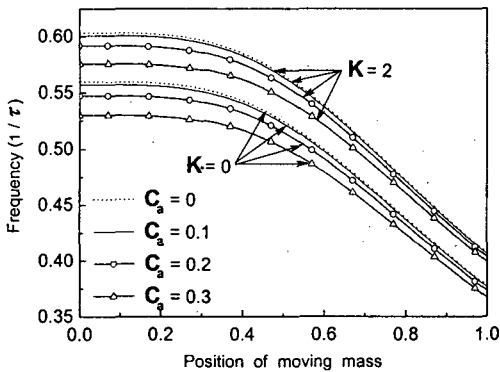


(c) Effect of spring stiffness ( $\xi_c = 0.3, C_a = 0.2$ )

Fig. 2 Tip displacement of the cracked cantilever beam with moving mass on elastic foundation ( $M_k = 0.3$ )



(a) Effect of crack position ( $C_a = 0.2$ )



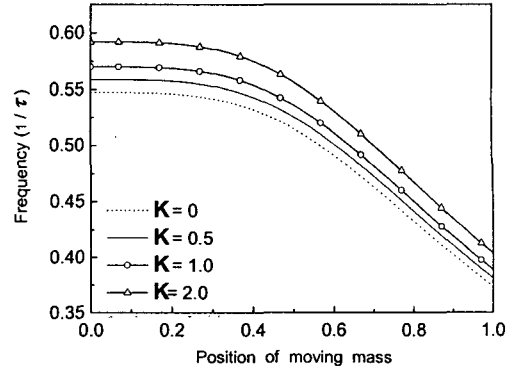
(b) Effect of crack depth ( $\xi_c = 0.3$ )

**Fig. 3** Frequency of the cracked cantilever beam with moving mass on elastic foundation (first mode  $M_k = 0.3$ )

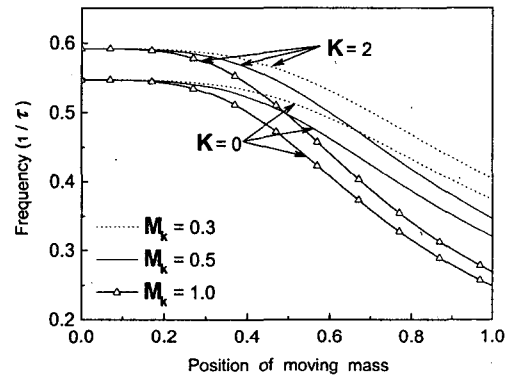
어질수록 감소하며, 탄성지지에 관계없이 크랙의 위치가 고정단으로부터 멀어질수록 외팔보의 진동수는 감소하는 경향을 보인다. Fig. 3(b)는 크랙의 위치가 외팔보의 0.3에 존재할 때, 크랙의 크기에 따른 외팔보의 진동수 변화를 나타낸 것이다. 탄성기초 위에 놓여 있지 않고 크랙의 크기가 커질수록 외팔보의 진동수는 감소함을 알 수 있다.

Fig. 4는 크랙의 위치가 보의 0.3 지점에 존재하고 크랙의 크기가 0.2일 때 스프링상수 값의 변화에 따른 외팔보의 진동수 변화를 표현한 것이다. 무차원화된 이동질량의 크기는 0.3이다. 전반적으로 외팔보의 진동수와 스프링 상수의 값은 서로 비례적이며, 이동질량의 위치와 관계없이 외팔보의 진동수는 같은 증가율로 증가함을 알 수 있다.

Fig. 5은 크랙의 크기가 0.2이며, 크랙의 위치가 외팔보의 0.3인 지점에 존재할 때, 이동질량의 크기변화에 따른 진동수 변화를 나타낸 것이다. 스프링상수 값에 관계없이 이동질량의 크기와 외팔보의 진동수는 서로 반비례적인 경



**Fig. 4** Frequency of the cracked cantilever beam according to the spring stiffness (first mode,  $\xi_c = 0.3$ ,  $C_a = 0.2$ ,  $M_k = 0.3$ )



**Fig. 5** Frequency of the cracked cantilever beam according to a moving mass (first mode,  $\xi_c = 0.3$ ,  $C_a = 0.2$ )

향을 보인다.

Table 2는 이 연구에서 사용한 수치해석방법으로 계산한 결과와 다른 연구결과들에서 구한 크랙 외팔보의 고유진동수비를 비교한 것이다. 크랙의 위치는 0.2와 0.4인 위치에 존재할 때이며, 이동질량의 영향은 고려되지 않은 것이다. 결과비교를 위해 사용한 각 파라미터는 참고문헌(10)의 값을 적용하였으며, 외팔보의 단면형상을 사각으로 하여 수치해석을 수행하였다. 해석에 사용된 파라미터는 다음과 같다.

$$L = 0.2 \text{ m}, \quad b = 0.0078 \text{ m}, \quad d = 0.025 \text{ m}, \\ \rho = 7860 \text{ kg/m}^3 \quad E = 2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

여기서  $b$ 와  $d$ 는 각각 사각 단면 보의 가로와 높이의 길이를 나타낸다.

**Table 2** Comparison of present result and others for natural frequency ratio of cracked cantilever beam

	crack position	crack depth			
		0.2	0.25	0.4	0.6
present result	0.2	0.99276	0.98803	0.96633	0.82523
	0.4	0.99707	0.99512	0.98530	0.91074
Kisa & Brandon (2000)	0.2	0.9837	-	0.9612	0.8122
	0.4	0.9933	-	0.9709	0.9091
Shen (1990)	0.2	-	0.9817	0.9520	0.8213

#### 4. 결 론

탄성기초위에 놓인 크랙 외팔보의 동특성에 미치는 크랙, 그리고 이동질량의 영향을 수치해석 하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

크랙의 위치가 외팔보의 끝단으로 갈수록 횡변위는 감소하며, 탄성기초 위에 놓일 때가 그렇지 않을 때보다 외팔보의 횡변위는 감소한다. 크랙 크기의 증가는 외팔보의 횡변위와 비례하며, 탄성기초의 스프링상수 값의 증가는 외팔보의 횡변위와 반비례한다. 크랙을 가진 외팔보의 진동수는 이동질량의 위치가 외팔보의 고정부로부터 멀어질수록 감소하며, 크랙의 위치가 보의 고정단으로부터 멀어질수록 외팔보의 진동수는 더 증가하는 경향을 보인다. 탄성기초의 스프링 상수와 외팔보의 진동수는 서로 비례적이며, 탄성지지가 존재하지 않는 경우 크랙 및 이동질량의 크기에 따른 외팔보의 진동수 변화와 탄성지지가 존재할 때의 외팔보의 진동수 변화는 항상 같은 비율로 변화한다는 것을 알 수 있다.

#### 참 고 문 헌

(1) Suzuki, S. I., 1997, "Dynamic Behaviour of a Finite Beam Subjected to Travelling Loads with Acceleration," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 55, No. 1, pp. 65~70.

(2) Ruotolo, R., Surace, C., Crespo, P. and Storer, D., 1996, "Harmonic Analysis of The Vibrations of a Cantilevered Beam With a Closing Crack," *Computers & Structures*, Vol. 61, No. 6, pp. 1057~1074.

(3) Ghondros, T. G., Dimarogonas, A. D. and Yao, J., 1998, "A Continuous Cracked Beam Vibration Theory," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215, No. 1, pp. 17~34.

(4) Bannios, Y., Douka, E. and Trochidis, A., 2002, "Crack Identification in Beam Structures Using Mechanical Impedance," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 2, pp. 287~297.

(5) Yoon, H. I., Chio, C. S. and Son, I. S., 2003, "Dynamic Behavior of Simply Supported Fluid Flow Pipe with Crack," *Transaction of KSNVE*, Vol. 13, No. 7, pp. 562~569.

(6) Lee, H. P., 1996, "Dynamic Response of a Beam with a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 191, No. 2, pp. 289~294.

(7) 이병규, 박광규, 오상진, 진태기, 2000, "Pasternak 지반 위에 놓인 변화곡률 수평 곡선보의 자유진동," *한국소음진동 공학회 창립10주년기념 소음진동학술대회는문집*, pp. 706~711.

(8) Mously, M. El., 1999, "Fundamental Frequencies of Timoshenko Beams Mounted on Pasternak Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 228, No. 2, pp. 452~457.

(9) Lee, H. P., 1996, "Effects of Damping on the Dynamic Stability of a Rod with an Intermediate Spring Support Subjected to Follower Forces," *Computers & Structures*, Vol. 60, No. 1, pp. 31~39.

(10) Kisa, M. and Brandon, J., 2000, "The Effects of Closure of Cracks on the Dynamics of a Cracked Cantilever Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 238, No. 1, pp.1~18.

(11) Shen, M. H. H. and Pierre, C., 1990, "Natural Modes of Bernoulli-Euler beams with Symmetric Cracks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, pp.115~134.