

진동파워흐름해석의 주파수 평균해석에 대한 연구

Research on Frequency Average Analysis of Vibrational Power Flow Analysis

이재민*·홍석윤**·박영호***

Jea-Min Lee, Suk-Yoon Hong and Young-Ho Park

Key Words : PFA(파워흐름해석법), PPFEM(파워흐름유한요소법), Frequency Averaged Response(주파수 평균응답)

ABSTRACT

Power Flow Analysis (PFA) is developed for the effective predictions of frequency-averaged vibrational response in medium-to-high frequency ranges. In PFA, the power coefficients of semi-infinite structure and far-field energy density are used to predict the vibrational responses of structures. Generally, at high frequencies, PFA can predict narrow-band frequency-averaged vibrational responses of built-up structures. However, in low- to medium frequency ranges, the dynamic responses obtained by PFA represent broad-band frequency-averaged vibrational energy densities. For the prediction of vibrational response variance in Power Flow Finite Element Method (PPFEM), the variances of input power and joint element matrix describing structural coupling relationship are derived. Finally, for the validity of developed formulation, numerical examples for two co-planer plates are performed and the vibrational response variance of the structure are compared with the results of classical and PPFEM solutions.

1. 서론

기존의 소음진동해석은 주로 변위해법에 기반을 둔 유한요소법(FEM), 경계요소법(BEM)등으로 이루어져 왔다. 하지만 주파수가 높아짐에 따라 요소수의 기하급수적인 증가로 인해 해석과정에서 많은 시간과 비용이 요구된다. 또한 고주파수 대역에서는 이러한 FEM, BEM 과 같은 결정론적인 해석기법(deterministic method)을 사용하여 해석하더라도 시스템의 불확실성이 증가하여 해석결과와 신뢰성이 떨어진다고 알려져 있다. 따라서 고주파수 대역에서는 통계적인 접근방법이 요구되는데, 통계적에너지해석법(SEA)은 구조물의 모드-주파수 평균된 진동응답을 예측하기 위해 개발되었다. 그러나 통계적에너지해석법은 모드밀도가 매우 높은 고주파수 영역에서 신뢰성이 보장되고, 하부 시스템당 하나의 에너지 값만을 얻을 수 있다는 단점이 있다.

이러한 기존의 단점을 보완하기 위한 대안으로 파워흐름해석법(PFA)이 제안되었다. 파워흐름해석법은 열전도방정식과 유사한 편미분방정식형태의 지배방정식을 가지고 있기 때문에 주파수 평균된 에너지밀도의 공간분포뿐만 아니라 인텐시티 분포도 예측할 수 있으며 유한요소법이나 경계요소법과 같은 수치기법을 적용하여 해석대상을 확

장할 수 있다.

파워흐름해석에서는 원거리 성분의 진동에너지를 이용하여 시스템의 진동응답을 예측하며 연성된 구조물 사이의 파워전달관계는 반무한 구조물에서의 파워투과반사계수를 사용한다. 따라서 고주파수 대역에서는 근거리 성분의 진동에너지의 영향을 무시할 수 있고 실제 파워전달관계도 반무한 구조물의 특성을 갖기 때문에 협대역(narrow-band)의 주파수 평균된 진동응답의 예측이 가능하다. 하지만 저주파수 대역에서 실제 유한구조물의 연성관계는 주파수에 상당히 민감하기 때문에 일반적으로 무한구조물의 연성관계와는 다른 특성을 갖는다. 일반적으로 유한구조물의 동특성은 주파수평균을 통해서 무한구조물의 동특성에 접근하므로 관심 주파수 대역이 낮아짐에 따라 파워흐름해석의 진동응답 예측 결과는 보다 넓은 주파수 밴드 평균된 값을 제시하게 된다.

따라서 본 논문에서는 복합 구조물의 파워흐름해석법에서의 진동응답 분산(vibrational response variance) 예측을 위한 방법을 제시하였다. 이를 위해 파워흐름유한요소법(PPFEM)에서 입력파워와 구조물들 사이의 연성관계를 정의해주는 연결요소행렬의 분산(variance)를 유도하였고 이를 이용하여 에너지밀도의 분산을 추정하는 과정을 단계적으로 제안하였다.

마지막으로 제안된 방법의 신뢰성 확보를 위하여, 동일평면상에서 연성된 평판구조물에 대해 유도된 분산식(variance formulation)을 이용하여 진동응답의 분산을 예측하고 파워흐름유한요소해석결과와 고전해의 결과와 비교하였다.

* 서울대학교 조선해양공학과 대학원
E-mail : dinosaurjr1979@yahoo.co.kr
Tel : (02) 880-7331, Fax : (02) 888-9298

** 서울대학교 조선해양공학과

*** 서울대학교 조선해양공학과 대학원

2. 파워흐름해석법(PFA)에서의 주파수 평균 응답

파워흐름해석을 이용한 진동해석은 중심주파수(center frequency)와 관심주파수밴드에 대하여 평균된 입력파워를 통해서 이루어진다. 주파수평균 응답의 예측에 대한 다음의 개념적인 정의는 기존의 통계적에너지해석법에서 사용되고 있는 정의를 인용한 것이다.[4]

단일 주파수 가진(Pure-tone excitation)

가진 주파수를 중심주파수로 하는 관심 주파수 영역(주파수밴드)에 대한 입력파워의 평균값 또는 기대값을 사용하여 해석을 수행하고, 해석결과는 관심 주파수 영역에 대한 기대값으로 본다.

광대역 가진(Broad-band excitation)

가진 주파수밴드의 전체파워와 가진 주파수 밴드의 중심주파수를 사용하여 해석을 수행하고 해석결과는 광대역 가진에 의해서 발생한 주파수밴드내의 응답을 전부 합산한 총응답으로 본다.

단일주파수 가진의 경우와 광대역 가진의 경우에 모두 동일하게 실제 해석은 중심주파수에 대하여 수행되며, 주파수 밴드폭은 해를 구하는 과정에서는 사용되지 않고 해석결과의 통계적인 분산을 추정하는데 중요한 역할을 하게 된다.

3. 파워흐름유한요소법(PFFEM)에서 진동 응답의 분산 추정

3.1 파워흐름유한요소법과 에너지 밀도의 분산

파워흐름유한요소해석에서 분산을 추정하기 위해서는 다음과 같은 가정이 필요하다.

파동전달해석을 통해서 얻어진 파워투과반사계수를 사용한 파워흐름유한요소해석의 결과는 구조물의 실제 에너지 밀도의 기대값과 같다.

실제 파워투과반사계수는 통계적으로 확률변수(random variable)에 가깝고 파동전달해석을 통해서 얻어진 파워투과반사계수가 그 기대값이 된다.

각 단계의 분산추정에서 확률변수로 가정되는 수치 중에서 실질적으로 통계적 확률변수로 작용하는 확률 변화량(random fluctuation)은 평균값에 비해서 매우 작다.

현재 파워흐름유한요소법에서 사용되는 방정식은 다음과 같은 대수방정식이다.[1],[2]

$$\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{K} 는 강성행렬과 질량행렬을 포함한 계수행렬, \mathbf{e} 는 에너지 밀도, \mathbf{Q} 는 요소간 파워흐름이고, \mathbf{F} 는 입력파워이다.

파워흐름유한요소법에서는 연성관계를 나타내기 위해 연결요소 행렬(joint element matrix) \mathbf{J} 을 사용하는데 연결요소행렬 \mathbf{J} 와 요소간 파워흐름 \mathbf{Q} 의 관계는 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}\mathbf{e} \quad (2)$$

따라서 (1)식과 (2)을 결합하면 (3)식의 최종적인 식을 얻게 된다.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{J})\mathbf{e} = \mathbf{F} \quad (3)$$

위의 파워흐름유한요소법에서 해석 모델 내에 n 개의 연결요소(joint element)가 존재한다고 하면 전체 연결요소행렬(global joint matrix)라고 표현할 수 있는 \mathbf{J} 는 n 개의 연결요소행렬의 합으로 이루어졌다고 할 수 있다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \dots + \mathbf{J}_n \quad (4)$$

위의 식에서 \mathbf{J}_1 는 경계 1에서의 요소연결행렬(element joint matrix) $\mathbf{J}_{1,local}$ 를 전체 연결요소행렬에 재배치한 연결요소행렬로 연성과 관련된 노드 이외의 값은 0의 값을 가지게 된다.

다음으로 분산의 추정을 위해서 파워흐름유한요소법을 이용한 해석과정에서 예상되는 통계적인 불확실성 가정해야 한다. 이후의 과정은 참고문헌[5]에서 Langley 논리를 적극 활용하였다. 먼저 입력파워들로 이루어진 \mathbf{F} 에서는 모드특성에 의해서 주파수 평균된 파워와 실제 입력파워 사이에는 불확실성이 존재하게 된다. 따라서 \mathbf{F} 을 주파수 평균된 입력파워의 기대값 \mathbf{F}_0 와 확률 변화량(random fluctuation) $\mathbf{F}_{...}$ 으로 나누어 볼 수 있다. $\mathbf{F}_{...}$ 값은 0의 기대값을 같은 확률변수로 볼 수 있다.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{...} \quad (5)$$

파워흐름유한요소법에서 연성관계를 나타내주는 연결요소행렬에서도 반무한 연성부를 가정함에 따른 불확실성이 나타나게 되는데, 파동전달해석법

을 통해서 얻어진 파워투과계수는 저주파수 대역으로 내려올수록 모드특성이 강해지면서, 실제 구조물간의 파워 전달관계를 정확히 나타내지 주지 못한다. 연결요소행렬 \mathbf{J} 를 입력파워의 \mathbf{F} 의 경우처럼 기대값 \mathbf{J}_0 와 확률 변화량 \mathbf{J}_{ran} 로 나눌 수 있다. 여기서 앞서 가정에 의해서는 \mathbf{J}_0 파동전달해석을 통해서 얻어진 파워투과반사계수를 이용한 연결요소행렬을 가리킨다.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_{ran} \quad (6)$$

식 (5), (6)의 결과를 식(3)에 대입하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (\mathbf{K} + \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_{ran})^{-1} (\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{ran}) \\ \bar{\mathbf{K}} &= \mathbf{K} + \mathbf{J}_0 \end{aligned} \quad (7)$$

\mathbf{J}_{ran} 과 \mathbf{F}_{ran} 의 값이 \mathbf{J}_0 과 \mathbf{F}_0 에 비해서 상대적으로 작고, 이들의 2차이상의 차수를 갖는 항은 무시할 만하다고 하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{e} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_0 + \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_{ran} - \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{J}_{ran} \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (8)$$

여기서 파워흐름유한요소법이 실제 구조물에서의 주파수 평균응답의 기대값을 제시한다 가정을 적용하면 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\boldsymbol{\mu}_e = \mathbf{E}[\mathbf{e}] = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_0 \quad (9)$$

따라서 식(8)을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \boldsymbol{\mu}_e + \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_{ran} - \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{J}_{ran} \boldsymbol{\mu}_e \\ \mathbf{e} - \boldsymbol{\mu}_e &= \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{F}_{ran} - \bar{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{J}_{ran} \boldsymbol{\mu}_e \\ e_i - \mu_i &= \bar{K}_{ij}^{-1} F_{ran,j} \\ &\quad - \bar{K}_{ij}^{-1} (J_{1,ran,jk} + J_{2,ran,jk} + \dots + J_{n,ran,jk}) \mu_k \end{aligned} \quad (10)$$

식(10)의 통계변수들이 서로 독립변수에 가깝다는 가정 하에서 에너지 밀도의 분산은 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \sigma_{e_i}^2 &= E[(e_i - \mu_i)^2] = E\left[\left(\bar{K}_{ij}^{-1} F_{ran,j} - \bar{K}_{ij}^{-1} K_{ran,jk} \mu_k\right)^2\right] \\ &= \sum_j \left(\bar{K}_{ij}^{-1}\right)^2 \sigma_{F_{ran,j}}^2 + \sum_j \sum_k \left(\bar{K}_{ij}^{-1} \mu_k\right)^2 \sigma_{J_{ran,jk}}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

식(11)에서 각각의 분산(variance)는 다음과 같은 의미를 가진다.

$\sigma_{F_{ran,j}}^2$: variance of $F_{ran,j}$, Variance about input power or response

$$\sigma_{F_{ran,j}}^2 = F_{0,j}^2 r^2(\alpha_j, m_j, B_j) \quad (12)$$

$\sigma_{J_{ran,jk}}^2$: variance of $J_{ran,jk}$, Variance about coupling relationship

$$(13)$$

식(12)에서 $r^2(\alpha_j, m_j, B_j)$ 는 참고문헌[2]에서 유도된 값을 사용한다. 그러나 $\sigma_{J_{ran,jk}}^2$ 의 값은 각 구조요소의 연성관계와 관련된 분산으로 3.2절에서 살펴본다.

$$\sigma_{J_{ran,jk}}^2 = E\left[\left(J_{ran,jk}\right)^2\right] \quad (14)$$

$$J_{ran,jk} = J_{1,ran,jk} + J_{2,ran,jk} + \dots + J_{n,ran,jk}$$

각 연결요소행렬의 요소들이 서로 독립변수에 가깝다고 가정하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\sigma_{J_{ran,jk}}^2 = \sigma_{J_{1,ran,jk}}^2 + \sigma_{J_{2,ran,jk}}^2 + \dots + \sigma_{J_{n,ran,jk}}^2 \quad (15)$$

따라서 global 연결요소행렬의 각각 요소들의 분산 $J_{ran,jk}$ 는 local 연결요소행렬 $J_{n,ran,jk}$ 의 요소들의 분산의 합으로 표현된다.

3.2 점연결요소행렬의 분산

파워흐름유한요소법에서 1차원 부재들간의 연성관계를 나타내기 위해서 사용되는 점연결요소행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{J} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1} \mathbf{C} \quad (16)$$

연결요소행렬은 파워계수행렬 \mathbf{P} 과 각 구조요소의 에너지 전달속도로 구성된 대각행렬 \mathbf{C} 로 구성되어 있다. 현재 파워흐름유한요소법에서는 파동전달해석을 통해서 얻어진 파워투과반사계수로 구성된 파워계수행렬을 사용하고 있다. 그러나 이 값은 반무한 연성부 모델을 통해서 얻어진 값으로 실제 유한구조물에서는 고주파수 영역에서는 유효하지만 저주파수영역으로 내려올수록 실제 파워전달관계를 나타내주지 못하고 불확실성이 커진다. 따라서 \mathbf{P} 의 값을 통계변수로 가정하고 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{ran} \\
\mathbf{J} &= (\mathbf{I} - (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{ran})) (\mathbf{I} + (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_{ran}))^{-1} \mathbf{C} \\
\mathbf{A} &= \mathbf{I} - \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} + \mathbf{P}_0 \\
\mathbf{J} &= (\mathbf{A} - \mathbf{P}_{ran}) (\mathbf{B} + \mathbf{P}_{ran})^{-1} \mathbf{C}
\end{aligned} \quad (17)$$

$\mathbf{P}_{ran} \ll \mathbf{P}_0$ 이므로 $(\mathbf{B} + \mathbf{P}_{ran})^{-1} \approx \mathbf{B}^{-1}$ 라고 하면 식(17)에서 \mathbf{J} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &\approx \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} - \mathbf{P}_{ran} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \\
\mathbf{J}_0 &= \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}, \quad \mathbf{J}_{ran} = -\mathbf{P}_{ran} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \\
J_{ran,jk} &= -P_{ran,jq} B_{qr}^{-1} C_{rk}
\end{aligned} \quad (18)$$

$\sigma_{J_{ran,jk}}^2$ 는 다음과 $P_{ran,pq}$ 가 서로 독립변수라는 가정 하에 다음과 같이 $E[P_{ran,pq}^2]$ 에 의해서 표현된다.

$$\begin{aligned}
\sigma_{J_{ran,jk}}^2 &= E \left[(J_{ran,jk})^2 \right] \\
&= E \left[(P_{ran,jq} B_{qr}^{-1} C_{rk}) (P_{ran,jm} B_{mn}^{-1} C_{nk}) \right] \\
&= \sum_p \sum_q E [P_{ran,pq}^2] (B_{pk}^{-1} C_{lk})^2
\end{aligned} \quad (19)$$

3.3 선연결요소행렬의 분산

선연결요소행렬 \mathbf{J}_{Line} 의 분산은 다음과 같이 \mathbf{J}_{Line} 의 요소들을 재조합한 행렬 \mathbf{J}_j 의 분산을 이용하여 얻어진다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{11} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Line}^{11} & \mathbf{J}_{Line}^{13} \\ \mathbf{J}_{Line}^{31} & \mathbf{J}_{Line}^{33} \end{bmatrix} = \Psi_{11} \mathbf{J}_1 \\
\mathbf{J}_{12} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Line}^{12} & \mathbf{J}_{Line}^{14} \\ \mathbf{J}_{Line}^{32} & \mathbf{J}_{Line}^{34} \end{bmatrix} = \Psi_{12} \mathbf{J}_2 \\
\mathbf{J}_{21} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Line}^{21} & \mathbf{J}_{Line}^{23} \\ \mathbf{J}_{Line}^{41} & \mathbf{J}_{Line}^{43} \end{bmatrix} = \Psi_{21} \mathbf{J}_3 \\
\mathbf{J}_{22} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Line}^{22} & \mathbf{J}_{Line}^{24} \\ \mathbf{J}_{Line}^{42} & \mathbf{J}_{Line}^{44} \end{bmatrix} = \Psi_{22} \mathbf{J}_4
\end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{J}_{Line}^j = \begin{bmatrix} J_{Line,(3i-2)(3j-2)} & J_{Line,(3i-2)(3j-1)} & J_{Line,(3i-2)3j} \\ J_{Line,(3i-1)(3j-2)} & J_{Line,(3i-1)(3j-1)} & J_{Line,(3i-1)3j} \\ J_{Line,3(3j-2)} & J_{Line,3(3j-1)} & J_{Line,3i3j} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ij} &= \Psi_{ij} \mathbf{I}_{6 \times 6}, \quad \Psi_{ij} = \int_{line} \phi_i \phi_j d\Gamma_{line} \\
\phi_i &: \text{shape function} \\
\sigma_{J_{11ran,jk}}^2 &= \Psi_{11}^2 \sigma_{J_{ran,jk}}^2, \quad \sigma_{J_{12ran,jk}}^2 = \Psi_{12}^2 \sigma_{J_{ran,jk}}^2, \\
\sigma_{J_{21ran,jk}}^2 &= \Psi_{21}^2 \sigma_{J_{ran,jk}}^2, \quad \sigma_{J_{22ran,jk}}^2 = \Psi_{22}^2 \sigma_{J_{ran,jk}}^2
\end{aligned} \quad (22)$$

3.4 파워계수행렬의 분산 $\sigma_{P_{ran,jq}}^2$

파워흐름유한요소법에서 한 개의 노드에서 곱힘파, 종파, 전단파의 3자유도를 가진 2차원 평판요소간의 연결관계를 나타내는 연결요소행렬을 얻기 위해서 사용되는 파워계수행렬 \mathbf{P} 는 다음과 같이 파워투과반사계수로 이루어진 행렬이다.

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} r_{ff11} & r_{ff11} & r_{sf11} & \cdots & \cdots & \cdots & \tau_{ffn1} & \tau_{jfn1} & \tau_{sfn1} \\ r_{fj11} & r_{ll11} & r_{sl11} & \cdots & \cdots & \cdots & \tau_{fn1} & \tau_{ln1} & \tau_{sln1} \\ r_{fs11} & r_{ls11} & r_{ss11} & \cdots & \cdots & \cdots & \tau_{fsn1} & \tau_{lsn1} & \tau_{ssn1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{ff1n} & \tau_{jf1n} & \tau_{sf1n} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{fnn} & r_{jnn} & r_{sfn} \\ \tau_{fl1n} & \tau_{ll1n} & \tau_{sl1n} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{fn} & r_{lfn} & r_{sln} \\ \tau_{fs1n} & \tau_{ls1n} & \tau_{ss1n} & \cdots & \cdots & \cdots & r_{fsn} & r_{lsn} & r_{ssn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

\mathbf{P} 에서 표현된 파워흐름해석법에서 사용되는 파워투과반사계수는 통계적에너지해석법에서 연성손실계수를 구하기 위해서 사용되는 것과 같은 일반적인 개념이다. 따라서 파워투과반사계수의 분산은 연성손실계수의 분산으로부터 유추해 볼 수 있다. 통계적에너지해석법에서 사용되는 2차원 선연결부에서의 연성손실계수는 다음과 같이 표현된다

$$\begin{aligned}
\eta_{ij} &= \frac{c_g b \tau_{y,d}}{\pi \omega S_i} \\
c_g &: \text{group velocity of the source subsystem} \\
\tau_{y,d} &: \text{diffuse field transmission coefficient} \\
S_i &: \text{source surface area}
\end{aligned} \quad (24)$$

위의 식에서도 확인할 수 있듯이 연성손실계수는 파워투과계수와 비례관계에 있다. 따라서 파워계수행렬에서의 파워투과반사계수의 분산 $\sigma_{P_{ran,pq}}^2$ 의 추정의 한 방법으로 통계적에너지해석법에서 적용되는 연성관계의 분산을 이용할 수 있다. [5]에서 Langley는 연성손실계수와 관련된 다음과 같은 정규화된 분산을 유도하였다.

$$\begin{aligned}
r^2(\alpha_{j_q}, m_j, B_j) &= \frac{\sigma^t}{\mu^2} \\
&= \frac{\alpha_{j_q} - 1}{\pi m_j} \left(\frac{1}{B_j^2} \right) \left\{ 2B_j \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{B_j} \right) \right] - \ln(1 + B_j^2) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{(\pi m_j)^2} \left(\frac{1}{B_j^2} \right) \ln(1 + B_j^2) \\
\alpha_{j_q} &= 2(2D) \\
m_j &= \omega \eta n(\omega): \text{modal overlap factor of } j \\
B_j &= \frac{\Delta \omega}{\omega \eta_j}
\end{aligned} \tag{25}$$

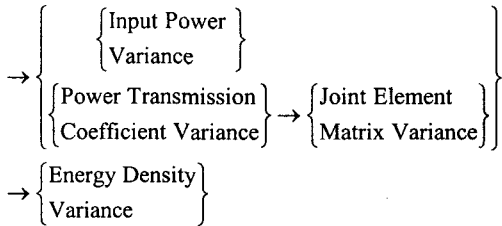
위의 (25)식을 이용하면 다음과 같이 나타낸다

$$\sigma_{P_{ran,jq}}^2 = E[P_{jq}^2] \times r^2(\alpha_{j_q}, m_j, B_j) \tag{26}$$

3.5 파워흐름유한요소법에서의 주파수평균응답의 분산의 추정과정

최종적으로 파워흐름유한요소법에서 예측된 주파수평균응답의 분산을 추정하는 과정을 도식화하여 나타내면 다음과 같다.

Bandwidth, Modal Overlap factor
etc....



Energy density variance

$$\sigma_{\epsilon_i}^2 = \sum_j (\bar{K}_{ij}^{-1})^2 \sigma_{F_{ran,j}}^2 + \sum_j \sum_k (\bar{K}_{ij}^{-1})^2 (\sigma_{J_{ran,jk}}^2) (\mu_k)^2$$

Input power variance [5],[6],[7]

$$\sigma_{F_{ran,j}}^2 = F_{ran,j} r_p^2(\alpha, m, B),$$

$$r^2(\alpha, m, B)$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\pi m} \left(\frac{1}{B^2} \right) \left\{ 2B \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{1}{B} \right) \right] - \ln(1 + B^2) \right\}$$

$$+ \frac{1}{(\pi m)^2} \left(\frac{1}{B^2} \right) \ln(1 + B^2)$$

$$\alpha = 2.5 \sim 3(2D), \quad m = \omega \eta n(\omega), \quad B = \frac{\Delta \omega}{\omega \eta}$$

Joint element matrix variance

$$\sigma_{J_{ran,jk}}^2 = \sum_j \sum_q \sigma_{P_{ran,jq}}^2 \left((I + P_0)_{jk}^{-1} C_{kk} \right)^2$$

이렇게 얻어진 분산과 파워흐름유한요소법에 얻어진 해석 결과를 평균값으로 하여 다음과 같이 해석결과에 대한 신뢰구간(confidence interval)을 구할 수 있다. 참고문헌 [4]에 따르면 모든 변이 완전히 단순 지지 상태의 단일평판의 경우에는 지수 분포(exponential distribution)를 따르고, 그 외의 경우에 대해서는 로그 분포(lognormal distribution)와 유사한 확률분포를 이룬다.[5]

$$\begin{aligned}
CC[x - low, x - high] &\equiv P[x - low, x - high] \\
&= \int_{x-low}^{x-high} p(x) dx
\end{aligned}$$

4. 해석결과

4.1 해석모델

동일평면상에 연성된 2개의 평판으로 이루어진 구조물에 대해서 해석을 수행하였다. 평판의 재질은 알루미늄으로 탄성계수가 $E = 7.1 \times 10^{10}$ 이고 포아송 비가 $\nu = 0.33$ 이며 밀도는 $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ 이다. 구조감쇠계수 $\eta = 0.01$ 로 하였고, 두께는 각각 0.005, 0.01m 가 되고 평판의 가로, 세로가 모두 1m 인 정사각형이다. 두 평판은 서로 동일평면상에 연성되어 있고 연성된 평판의 네 변은 전부 단순지지 상태라고 가정하였다. 따라서 평판의 굽힘파에 대한 운동방정식에 대하여 다음과 sin 함수 형태의 급수해를 가정하여 해석모델의 고전해를 얻을 수가 있다. [3]

$$D_{,i} \left(\frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2 \partial u^2} + \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} \right) + \rho_i h_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \tag{26}$$

$$w_i(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} W_{i,n}(x) \sin k_n y \cdot \exp(i\omega t), \quad k_n = \frac{n\pi}{L_y} \tag{27}$$

평판에서의 굽힘파의 운동방정식으로부터 얻어진 변위해로부터 파워를 계산하고, 그 값을 다시 주파수 밴드에 대하여 평균한 평균 입력 파워와 관심 주파수밴드의 중심주파수를 이용하여 파워흐름유한요소법에서의 주파수평균응답을 예측하였다

주파수평균응답의 예측 대상위치는 입력파위가 입력되지 않는 두번째 평판의 중점으로 하였다. 고전해에서의 주파수평균응답과 파워흐름유한요소법에서의 주파수평균응답의 주파수에 따른 변화를 예측하였다. 앞서 유도한 분산의 추정식을 이용하여 파워흐름유한요소법에서 주파수평균응답에서 예측되는 분산을 구하고 이를 이용하여 신뢰구간을 추정하였다.

4.2 해석결과

Fig.1-4 에서는 해석모델에 대해서 각각 밴드폭 50Hz, 100Hz, 200 Hz, 400Hz 에서의 주파수 평균응답과 신뢰구간을 그래프로 나타내었다.

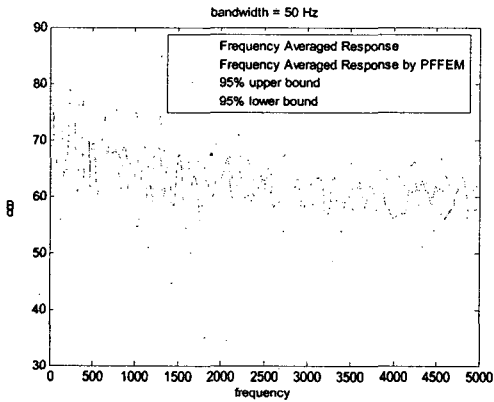


Fig. 1 밴드폭 50Hz에서의 주파수평균응답과 신뢰구간

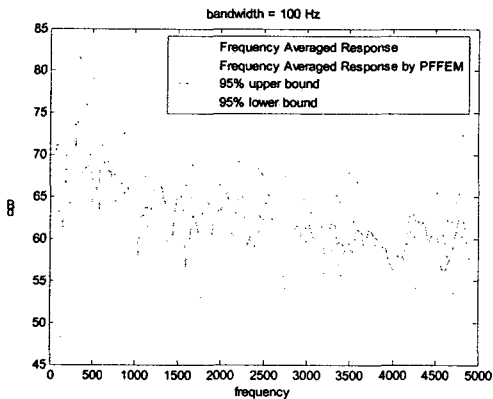


Fig. 2 밴드폭 100Hz에서의 주파수평균응답과 신뢰구간

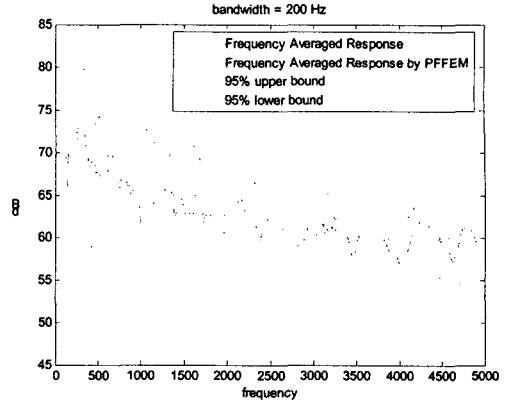


Fig. 3 밴드폭 200Hz에서의 주파수평균응답과 신뢰구간

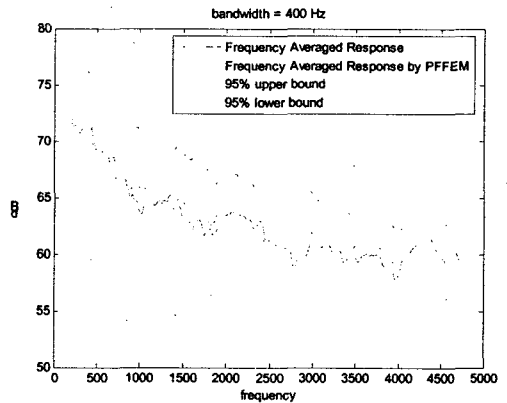


Fig. 4 밴드폭 400Hz에서의 주파수평균응답과 신뢰구간

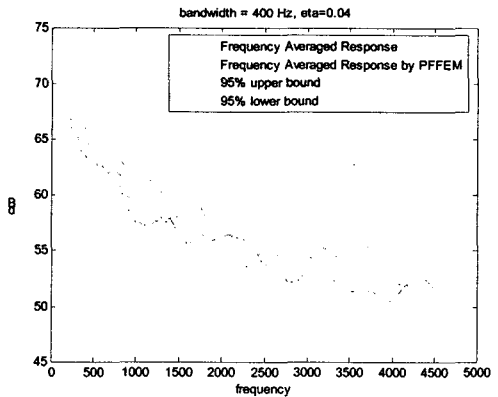


Fig. 5 밴드폭 400Hz, $\eta = 0.04$ 에서의 주파수평균응답과 신뢰구간

Fig.1-4 의 결과를 종합하면 파워흐름유한요소법에서 예측된 주파수평균응답의 95%신뢰구간은 파워흐름유한요소법의 주파수 평균응답과 고전해의 주파수평균응답 사이의 적절한 오차범위를 제시해 줄 수 있다. 다만 평균한 밴드폭에 따라서 신뢰구간의 크기의 차이가 커지게 되므로 신

퇴구간의 크기를 파워흐름유한요소법의 주파수 평균응답의 ± 5 dB 이내로 하기 위해서는 적어도 밴드폭 400Hz의 주파수 평균응답의 예측이 필요함을 확인하였다. Fig.5의 경우는 구조감쇠계수를 0.04로 증가시켰을 때의 400Hz 밴드폭의 주파수 평균응답을 나타낸 것으로 구조감쇠계수의 증가에 따라서 95% 신뢰구간의 크기가 크게 줄어드는 것을 확인할 수 있었다.

5. 결론

파워흐름유한요소법의 주파수 평균응답의 분산을 추정하였다. 시스템화된 분산의 추정과정을 제시하여 해석결과에 대한 후처리 과정을 통해서 에너지 밀도의 분산을 추정할 수 있도록 하였다. 유도한 분산의 추정식을 활용하여 실제 동일평면에서 연성된 2개의 평판으로 이루어진 구조물에 대하여 주파수평균응답의 분산을 추정한 결과 95% 신뢰구간을 이용하면 파워흐름유한요소법의 주파수평균응답과 실제구조물의 주파수평균응답 사이의 오차범위를 추정할 수 있다는 사실을 확인하였다.

참고문헌

- [1] Cho, P.E., 1993, Energy Flow Analysis of Coupled Structures, Ph.D. thesis, Purdue University.
- [2] 서성훈, 2004, "다차원 구조부재 연성구조물의 중고주파 진동해석을 위한 파워흐름유한요소법 개발", 박사학위논문, 서울대학교
- [3] 박도현, 1999, "연성된 평판 및 상자형 구조물의 진동 파워흐름해석", 석사학위논문, 서울대학교.
- [4] Lyon, R.H. and DeJong, R.G., 1995, Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Butterworth-Heinemann.
- [5] Langley, R.S. and Cotoni, V., 2004, "Response variance prediction in the statistical energy analysis of built-up systems" Journal of Acoustical Society of America, vol. 115, no.2, pp. 706~718.
- [6] Langley, R.S. and Brown, A.W.M., 2004, "The ensemble statistics of the energy of a random system subject to harmonic excitation", Journal of Sound and Vibration, vol. 275, pp. 823~846.
- [7] Langley, R.S. and Brown, A.W.M., 2004, "The ensemble statistics of the band-averaged energy of a random system", Journal of Sound and Vibration, vol. 275, pp. 847~857.