

유한요소법을 이용한 샌드위치형 감쇠 보구조물의 진동해석 Vibration Analysis of Damped Sandwich Beam Using Finite Element Method

서영수* · 정의봉** · 신준엽*

Young Soo Seo, Weui Bong Jeong and Joon Yub Shin

Key Words : Viscoelastic(점탄성), Loss Factor(손실계수), Damped Sandwich Beam(샌드위치형 감쇠 보구조물), Complex Shear Modulus(복소전단탄성계수), Half-Power Band Width Method(반가폭법)

ABSTRACT

The vibration analysis of damped sandwich beam is conducted using finite element method. The equation of motion presented by Mead and Markus is used to formulate FEM. Also as the thickness of the core in the damped sandwich beam goes to zero, conventional beam theory based on the transformed-section method and the equation of Mead and Markus are compared. According to the change of thickness and loss factor of the core, the forced frequency response of beam is calculated and discussed. And then using the half-power band width method, the damping ratio of each mode is calculated and discussed about each case.

1. 서론

구조물이나 기계장치의 방진 및 소음문제는 오래전부터 중요한 연구 대상이 되어왔으며 최근에는 복합적층 구조물의 감쇠 효과에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 복합적층 구조물의 간단한 예로서 샌드위치형 감쇠 보구조물을 들 수 있다. 이것은 두 개의 탄성재질 사이에 점탄성 재질이 들어있는 형태이며 진동 발생시 이 점탄성층에 전단이 발생하게 된다. 이러한 전단에 의해 점탄성 재질은 진동 에너지를 흡수하여 발산함으로써 감쇠재 역할을 하게 되는 것이다. 이러한 감쇠 효과는 점탄성 재료의 종류 및 두께, 기하학적 형상, 손실계수 등에 영향을 많이 받게 된다.

복합적층 구조물의 진동 특성이나 이론적 고찰은 많은 이들에 의해 연구되어 왔다. DiTaranto⁽¹⁾는 유한 길이를 가진 3층 적층보가 자유진동하는 경우에 있어서 6차 운동방정식과 흡진재의 감쇠 효과를 설명하기 위한 보조방정식을 유도했으며, Mead와 Markus⁽²⁾는 강제진동에 있는 3층 적층보에 대하여 6차 운동방정식을 유도하였다. Yan과 Dowell⁽³⁾은 완전피복된 3층 적층보에서 각 층의 길이방향 변위 및 회전관성과 모재 및 보강재의 전단스트레인 영향을 고려한 해석방법을 제시하였다. Rao와 Nakra⁽⁴⁾는 최초로 비대칭의 샌드위치형 감쇠 보구조물에 대해 횡방향, 수직방향, 회전운동의 관성 효과를 고려하였다.

본 논문에서는 Mead와 Markus의 운동방정식

에 기초하여 유한요소법을 통한 샌드위치형 감쇠 보구조물의 진동을 해석하고자 한다. Core의 두께는 고정하고 손실계수를 변화시키는 경우와 Core의 손실계수는 고정하고 두께를 변화시키는 경우에 대해 유한요소해석을 수행하고 그 결과를 검토해보기로 한다.

2. 샌드위치형 감쇠 보구조물

2.1 운동방정식 유도

그림 1은 단위폭을 가지는 샌드위치형 보를 나타낸다. 이 보는 두께가 h_1 , h_3 인 face plate 부분과 두께가 h_2 인 core 부분으로 이루어져 있다. Face plate는 영률이 각각 E_1 , E_2 인 탄성체이고 core는 복소전단탄성계수가 $G^* = G(1+i\eta)$ 인 선형 점탄성 재료이다. 여기서 G 는 우리가 알고 있는 일반적인 전단탄성계수, η 는 Loss Factor(손실계수)를 나타낸다.

샌드위치형 감쇠 보구조물의 운동방정식을 유도하기 위해서 아래와 같이 가정하였다.

- 1) Core 부분은 전단응력만 받으며 길이방향 응력은 무시할 수 있다. 그리고 선형 점탄성 재료로써 복소전단탄성계수를 가진다.
- 2) Face plate는 등방성이고 탄성이며 plate surface에 수직인 방향으로의 전단변형은 없다. 그리고 face plate의 전단변형률은 무시할 수 있다.
- 3) 횡방향 운동에 의한 관성력이 지배적이며 길이방향과 회전운동에 의한 관성은 무시할 수 있다.

* 부산대학교 기계설계공학과

** 부산대학교 기계공학부

4) Core와 face plate 사이에는 미끄럼이 발생하지 않는다.

그림 2로부터 core에 작용하는 전단응력 τ 은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \tau &= G^* \gamma = G^* \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ &= G^* \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h_1 + h_3}{2h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right] \quad (1) \\ &= G^* \left[\frac{d}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right] \end{aligned}$$

여기서 γ 는 전단변형률, w 는 보의 횡방향 변위, x 는 보의 길이방향 좌표, u_1, u_3 는 각각 face plate 중앙의 길이방향 변위, u 는 core의 임의의 점에서의 변위를 나타낸다.

그림 3 으로부터 보의 단면적에 작용하는 총 전단력 S 과 face plate의 길이방향 순수힘 P_1, P_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \alpha d + D_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= -P_3 \\ E_1 h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= -E_3 h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (3) \\ -E_1 h_1 u_1 &= E_3 h_3 u_3 \end{aligned}$$

여기서 D_1, D_3 는 face plate의 굽힘강성을 나타낸다.

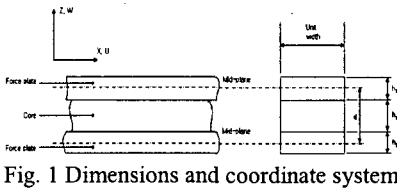


Fig. 1 Dimensions and coordinate system

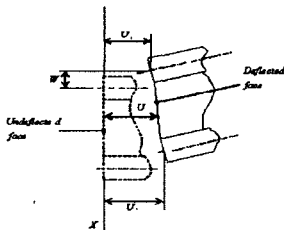


Fig. 2 Displacement system

그림 4와 같이 아래쪽 face plate의 길이방향

미소변위 δx 에서의 힘평형을 고려하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (P_1 + \delta P_3) - P_3 + \tau \delta x &= 0 \\ \tau &= -\frac{\delta P_3}{\delta x} = -\frac{\partial}{\partial x} (E_3 h_3 \frac{\partial u_3}{\partial x}) \quad (4) \end{aligned}$$

보가 외부힘 $q(x, t)$ 의 가진에 의해 횡진동한다고 하면 총 횡방향 하중 p 는 관성을 고려하여 아래와 같이 된다.

$$p = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x, t) \quad (5)$$

여기서 m 은 3층 보 전체의 단위길이당 질량을 나타낸다.

식(1)~(5)을 통해 아래와 같은 3층 보구조물의 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \\ = \frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - gq \right) \quad (6) \end{aligned}$$

단,

$$g = \frac{G^*}{h_2} \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right)$$

$$Y = \frac{d^2}{D_t} \left(\frac{E_1 h_1 E_3 h_3}{E_1 h_1 + E_3 h_3} \right)$$

$$D_t = D_1 + D_3 = (E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3) / 12$$

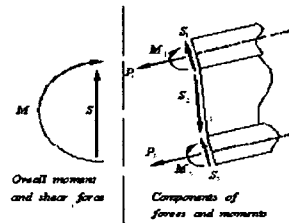


Fig. 3 Forces and moments acting on a section

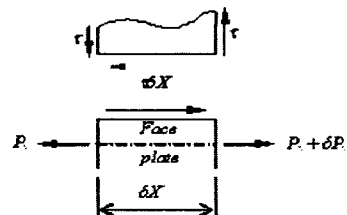


Fig. 4 Longitudinal forces on lower face plate element

2.2 운동방정식의 검증

식(6)에 g 의 값을 대입하고 양변에 $D_t h_2$ 을 곱하면 아래와 같이 된다. 외부힘 $q(x,t)$ 는 집중하중으로 간주한다.

$$\begin{aligned} D_t h_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - G^* \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right) (1+Y) D_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ + m \left[h_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - G^* \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \\ = -G^* \left(\frac{1}{E_1 h_1} + \frac{1}{E_3 h_3} \right) q \end{aligned} \quad (7)$$

여기서 h_2 가 0의 값을 가진다고 하면 다음과 같다.

$$D_t (1+Y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad (8)$$

식(8)의 형태는 우리가 일반적으로 알고 있는 보의 운동방정식이다. 이 때 $D_t(1+Y)$ 항이 합성보의 굽힘강성 $(EI)_t$ 와 같다면 Mead와 Markus가 제시한 운동방정식은 타당성이 있게 된다.

Transformed-section method⁽⁵⁾를 통해서 합성보의 굽힘강성 $(EI)_t$ 와 $D_t(1+Y)$ 을 비교하면 식(9)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} (EI)_t &= E_1(I_{1G} + A_1 d^2) + E_3(I_{3G} + A_3 d^2) \\ &= \frac{E_1^2 h_1^4 + 4E_1 E_3 h_1^3 h_3 + 6E_1 E_3 h_1^2 h_3^2}{12E_1 h_1 + 12E_3 h_3} \\ &\quad + \frac{4E_1 E_3 h_1 h_3^3 + E_3^2 h_3^4}{12E_1 h_1 + 12E_3 h_3} \\ &= D_t (1+Y) \end{aligned} \quad (9)$$

그러므로 Mead와 Markus가 제시한 운동방정식의 타당성은 검증되었다.

3. 유한요소법

보의 폭 b 을 고려하고 각주파수 ω 로 조화가 진 된다면 3층 보구조물의 운동방정식은 최종적으로 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+bY) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} (-\omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\omega^2 w) \\ = \frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - gq \right) \end{aligned} \quad (10)$$

단,

$$D_t = b(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3) / 12$$

3층 보구조물의 유한요소 지배방정식을 구하기 위해 식(10)의 양변에 가중함수 w^* 를 곱해서 적분한다.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a w^* \left[\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+bY) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} \left(-\omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g\omega^2 w \right) \right] dx \\ = \int_{-a}^a w^* \left[\frac{1}{D_t} \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - gq \right) \right] dx \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 a 는 요소길이의 반을 의미한다.

형상함수와 가중함수를 같도록 가정하여 식(11)에 대입하면 다음과 같은 요소에 대한 유한요소 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[[K]_{k_1} + g(1+bY)[K]_{k_2} - \omega^2 \left\{ \frac{m}{D_t} ([M]_{k_1} + g[M]_{k_2}) \right\} \right] \{w\}_e \\ = \frac{g}{D_t} \{F\}_e \end{aligned} \quad (12)$$

각 요소에 대해 중첩하면 전체 보구조물에 대한 유한요소 지배방정식을 얻을 수 있다.

4. 해석 결과

Face plate의 두께가 같은 샌드위치형 감쇠 보구조물 ($L=0.2m$)에 대해서 h_2 , η 의 변화에 따른 진동해석을 행하기로 한다. 경계조건은 일단 고정으로 한다. Face plate의 재질은 steel, core의 재질은 rubber로 하며 다른 변수들의 값은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} h_1 = h_3 = 0.002m, \quad E_1 = E_3 = 2.1 \times 10^{11} N/m^2, \\ \rho_1 = \rho_3 = 7850 kg/m^3, \quad \rho_2 = 1300 kg/m^3, \\ b = 0.01m, \quad G = 0.001 \times 10^9 N/m^2 \end{aligned}$$

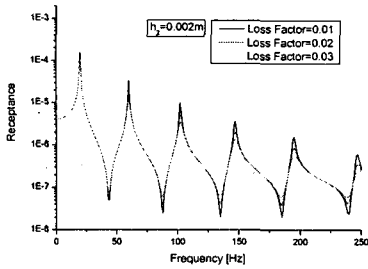


Fig. 5 Receptance according to Loss Factor

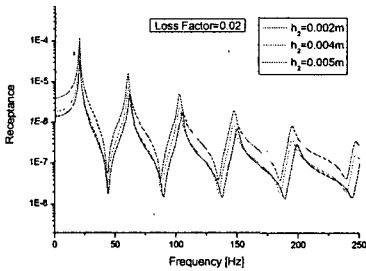


Fig. 6 Receptance according to Core's Thickness

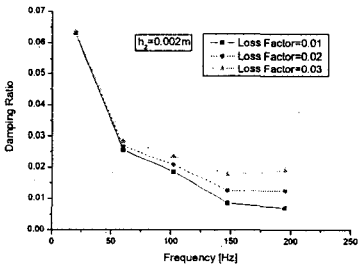


Fig. 7 Damping Ratio according to Loss Factor

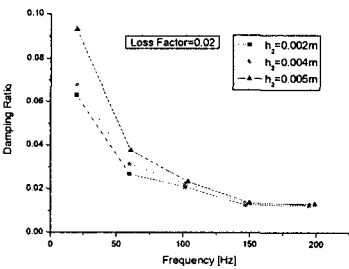


Fig. 8 Damping Ratio according to Core's Thickness

4.1 주파수 응답함수

그림 5 는 $h_2 = 0.002m$ 로 일정할 때 주파수 응답함수를 나타낸다. Loss factor 가 증가할수록 공진점에서의 진폭이 줄어드는 것을 확인할 수 있다. 그림 6 은 $\eta = 0.02$ 로 일정할 때 주파수 응답함수

를 나타낸다. Core 의 두께가 증가할수록 전체 주파수역에서 진폭이 줄어들며 공진점에서도 진폭이 줄어드는 것을 확인할 수 있다.

4.2 감쇠비(Damping Ratio)

그림 7 은 $h_2 = 0.002m$ 로 일정할 때 반가폭법에 의한 공진점에서의 감쇠비 변화를 나타낸다. Loss factor 가 증가할수록 각각의 공진점에서 감쇠비가 모두 증가하는 것을 알 수 있다. 그림 8 은 $\eta = 0.02$ 로 일정할 때 공진점에서의 감쇠비 변화를 나타내는 것으로 Core 의 두께가 증가할수록 각각의 공진점에서 감쇠비가 모두 증가하는 것을 확인할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 Mead 와 Markus 의 운동방정식에 기초하여 유한요소법을 통한 샌드위치형 감쇠보구조물의 진동을 해석하였다. Core 의 두께는 고정하고 손실계수를 변화시키면서 진동을 해석한 결과 손실계수가 클수록 공진점에서의 진폭이 작아짐을 알 수 있었다. Core 의 손실계수는 고정하고 두께를 변화시킨 경우에도 같은 결론을 얻을 수 있었으며 반가폭법을 이용하여 공진에서의 감쇠비를 구해봄으로써 이를 확인할 수 있었다.

후기

본 연구는 국방부가 지정한 수중운동체특화연구센터(UVRC)의 지원에 의해 수행되었습니다.

참고 문헌

- (1) DiTaranto, R. A., 1965, "Theory of the Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Finite Length Beams," *Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 881~886.
- (2) Mead, D. J. and Markus, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 10(2), pp. 163~175.
- (3) Yan, M. J. and Dowell, E. H., 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained Layer Damping of Sandwich Plates and Beams," *Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 94, pp. 1041~1046.
- (4) Rao, Y. V. K. and Nakra, B. C., 1974, "Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 34(3), pp. 309~326.
- (5) A. C. Ugural and S. K. Fenster, *Advanced Strength and Applied Elasticity*, Prentice Hall, New Jersey, 1995.