2005 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회
2005년 5월 13일~14일, 충북대학교

다중 임계점을 고려한 비축출형 우선순위 2-계층 MAP/G/1 대기행렬모형
A Non-preemptive Priority 2-Class MAP/G/1 Queue with Individual Thresholds

서원주 ,이호우
성균관대학교 시스템경영공학부

Abstract

본 연구는 비축출형 우선순위 2-계층 대기행렬을 다룬다. 각 계층별 고객들은 마코비안 도착과정(Markovian arrival process, MAP)에 의하여 시스템에 도착하고, 각 계층마다 고유의 임계점을 갖는다. 시스템 내에 고객들이 존재하지 않으면 서어버는 유휴해지고 어느 계층이든지 상관없이 계층에 부여된 임계점에 먼저 도달하면 서어버는 서비스를 시작한다. 우선순위가 높은 고객들을 먼저 서비스하는 비축출형 우선순위 서비스규칙을 따른다. 본 연구에서는 각 계층별 고객들의 대기시간분포에 대한 라플라스(Laplace-Stieltjes) 변환과 평균 대기시간을 유도한다.

1. 서 론

다계층 고객 대기현상(multiple-class queueing systems)의 분석은 컴퓨터가 태동하기 시작할 때부터 본격적인 연구가 진행되어 왔으며, 최근 정보통신분야에서 좀더 나은 성능의 시스템을 설계하기 위하여 이론적인 연구와 응용연구가 활발히 진행되고 있다. 이러한 다계층 대기행렬모형 중에서 대표적으로 많이 연구되고 있는 모형이 시스템의 성능을 높이고자 하는 목적으로 서비스 우선권의 특성을 부여한 우선순위 대기행렬모형(priority queue)이다. 여러 계층의 고객을 서비스하는 대기행렬모형은 시스템의 최적화를 위하여 단일계층 모형보다 훨씬 다양한 제어정책들을 고려해 볼 수 있다. 하지만, 다계층 대기행렬모형의 제어정책에 관하여 지금까지 연구된 논문들을 살펴보면 다계층이라는 특성에도 불구하고 단일계층 대기행렬모형에서 연구되었던 제어정책을 그대로 답습한 연구가 주종을 이루고 있어서 다계층 대기행렬모형의 경우에 발생할 수 있는 다른 형태의 제어정책들에 적용할만한 결과들이 많지 않다. 그리고 기존 대기행렬시스템에 대한 많은 연구들은 도착과정이 포아송과정(Poisson process)이라는 가정 하에 행하여졌다. 그러나 포아송과정은 실제 시스템의 적용에 한계를 가지고 있다. 특히 도착률이 가변적이고 상관관계를 갖는 다양한 종류의 트래픽(teletraffic)을 발생시키는 현재의 고도화된 통신망에서의 도착과정은 도착률이 시간에 관계없이 항상 일정하다고 가정하는 포아송과정으로는 표현하기가 힘들다. 따라서 최근에는 포아송과정을 변형시킨 새로운 도착과정을 적용하여 대기행렬시스템의 분석이 이루어지고 있다. 이 중에서 마코비안 도착과정(Markovian Arrival Process, MAP)은 앞에서 언급한 도착률이 가변적이고 상관관계를 갖는 도착과정을 비교적 잘 표현하고 있어 최근 이를 적용한 대기행렬의 연구가 활발히 진행중이다.

우선순위 대기행렬에 관해서는 그동안 많은 연구가 이루어져 왔으며, 1968년 Jaiswal[2]에 의해 자세히 연구된 바 있다. 그는 부가변수법(supplementary variable technique)을 이용하여 $M/G/1$ 형태의 우선순위 대기행렬에서 점유시간(occupation time), 바쁜기간(busy period) 등을 여러가지 상황하에서 다루었다. 다계층 대기행렬(우선순위 대기행렬)에서 유휴기간후 준비시간을 고려한 FCFS, LCFS, 축출형, 비축출형 등 각각의 모형에 대한 대기시간 LST(Laplace-Stieltjes transform)가 Takagi[5]에 의해 연구되었으며, Takagi[6]는 서어버휴가와 준비기간을 동시에 고려한 우선순위 대기행렬모형의 부하량(workload)에 대한 분포를 구했다. Takagi[7]는 다계층 대기행렬모형과 우선순위 대기행렬모형을 다양한 제어정책모형에 대하여 체계적으로 이를 분석하여 소개하고 있다. 정보통신분야의 비동기식 전송방식(ATM)에서는 정보를 주로 시간에 민감(time-sensitive)한 것과 손실에 민감(loss-sensitive)한 것으로 나누어 2-계층 우선순위 대기행렬모형을 적용하고 있다(Bonomi et al.[1], Takagi et al.[8]). 특히 이 분야에서는 좀더 효율

성 있는 시스템의 설계를 위하여 여러 가지 형태의 제어기법들이 제시되고 연구가 이루어지고 있다.

다계층 고객을 서비스하는 경우 그 특성상 다른 형태의 제어정책들이 많이 발생하게 된다. Lee et al.[4]은 한 계층에 대하여 시동(start-up)의 특성을 부여한 N-정책을 제안하고 $M/G/1$ 대기행렬에 대하여 FCFS와 우선순위가 있는 경우에 계층별 고객의 대기시간 LST를 구하고 이를 분석하였으며, 윤승현[12]은 준비기간을 함께 고려한 다계층 $M/G/1$ 대기행렬모형의 계층별 고객의 대기시간 LST를 구하고 이를 분석하였다. Lee et al.[3]은 다중 임계점을 고려한 다계층 $M/G/1$ 대기행렬모형 대하여 계층별 고객의 대기시간 LST를 구하고 이를 분석하였다.

Takine and Hasegawa[10]는 축출-계속형 $MAP/G/1$ 대기행렬의 일량과 대기시간을 분석하였고, Takine[9], Takine et al.[11]은 비축출형 $MAP/G/1$ 대기행렬을 분석하였다.

이와 같은 연구들은 대부분 단일계층 모형에서 다루어진 제어정책을 그대로 확장한 것으로서 다계층 상황에서 발생할 수 있는 특징적인 제어정책에 관한 제안 및 연구는 아직까지 많이 부족한 편이라 할 수 있다. 그 첫 번째 이유로는 분석의 어려움을 들 수 있겠으나 분석의 어려움에 못지 않게 모형의 설계, 즉 제어정책의 설계 및 제안의 부족함도 중요한 이유가 되고 있다.

본 연구에서는 계층별로 임계점을 설정하여 어떤 한 계층이라도 고객수가 임계점에 도달하면 전체 서비스를 시작하는 다중 임계점을 고려한 $MAP/G/1$ 대기행렬모형을 제시하고 고객의 대기시간(queue waiting time)에 초점을 맞추어 그 성능척도를 구하고 분석한다.

본 연구의 대상이 되는 모형은 생산공정에서 한 대의 기계가 제품에 따라 다른 종류의 작업을 하는 경우, 제품별 중요도를 직접적으로 고려하는 방법으로 제품별 임계점을 다르게 설정하여 작업을 하는 시스템에 적용할 수 있다.

2. 모형 및 기호

고객은 특성에 따라 2 계층으로 분류되며, 각 계층별로 고객의 도착은 독립적인 MAP을 따른다. 도착하는 고객들의 서비스 시간은 iid 확률변수이며 도착과정과 독립이다. 서어버의 수는 1명이며, 대기행렬 용량은 무제한으로 가정한다(infinite buffer size). 서어버가 유휴상태에 있을 때 어느 한 계층이라도 임계점에 도달하면 서비스를 시작하며, 비축출형(non-preemption)을 가정한다.

본 연구에서 사용되는 주요 기호를 정의하면 다음과 같다.

$\boldsymbol{C}$: MAP과정의 파라메터 행렬($m\times m$ 행렬)

$\boldsymbol{D}_1$: 계층-1 고객도착률 행렬 ($m\times m$ 행렬)

$\boldsymbol{D}_2$: 계층-2 고객도착률 행렬($m\times m$ 행렬)

$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2$

N_p : 계층-p의 임계점($p=1,2$)

$N_p(t)$: 시점 t에서의 계층-p 고객수($p=1,2$)

$N(t)$: 시점 t에서의 총 고객수

$J(t)$: 시점 t에서의 UMC 위상

m : UMC 위상의 수

S : 서비스 시간 확률 변수

$s(x)$, $S(x)$, $S^*(\Theta)$: S의 pdf, DF, LST

$S_R(t)$: 시점 t에서의 잔여서비스 시간

$$\zeta(t)=\begin{cases}0 & (\text{시점 } t\text{에 서어버가 유휴하면})\\ 1 & (\text{시점 } t\text{에 서어버가 계층-1 고객 서비스중})\\ 2 & (\text{시점 } t\text{에 서어버가 계층-2 고객 서비스중})\end{cases}$$

$$q_{n_1,n_2,i}(t) = Pr\{\zeta(t)=0, N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, J(t)=i\}$$
$$(0\le n_1\le N_1-1,\ 0\le n_2\le N_2-1,\ 1\le i\le m)$$

$$p_{(1)(n_1,n_2,i)}(x,t)dx = Pr\{\zeta(t)=1, N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, J(t)=i, S_R(t)\in(x,x+dx]\}$$
$$(1\le n_1,\ 0\le n_2,\ 1\le i\le m)$$

$$p_{(2)(n_1,n_2,i)}(x,t)dx = Pr\{\zeta(t)=2, N_1(t)=n_1, N_2(t)=n_2, J(t)=i, S_R(t)\in(x,x+dx]\}$$
$$(0\le n_1,\ 1\le n_2,\ 1\le i\le m)$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{(1)(n_1,n_2,i)}(x,t)=p_{(1)(n_1,n_2,i)}(x)$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{(2)(n_1,n_2,i)}(x,t)=p_{(2)(n_1,n_2,i)}(x)$$

$$\boldsymbol{q}_{n_1,n_2}=(q_{n_1,n_2,1},\cdots,q_{n_1,n_2,m})$$

$$\boldsymbol{p}_{(1)(n_1,n_2)}(x)=(p_{(1)(n_1,n_2,1)}(x),\cdots,p_{(1)(n_1,n_2,m)}(x))$$

$$\boldsymbol{p}_{(2)(n_1,n_2)}(x)=(p_{(2)(n_1,n_2,1)}(x),\cdots,p_{(2)(n_1,n_2,m)}(x))$$

$$\boldsymbol{q}(z_1,z_2)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boldsymbol{q}_{n_1,n_2}z_1^{n_1}z_2^{n_2}$$

$$\boldsymbol{p}_{(1)}(z_1,z_2,x)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\boldsymbol{p}_{(1)(n_1,n_2)}(x)z_1^{n_1}z_2^{n_2}$$

$$\boldsymbol{p}_{(2)}(z_1,z_2,x)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\boldsymbol{p}_{(2)(n_1,n_2)}(x)z_1^{n_1}z_2^{n_2}$$

$$\boldsymbol{p}^*_{(1)}(z_1,z_2,\Theta)=\int_0^\infty e^{-\Theta x}\boldsymbol{p}_{(1)}(z_1,z_2,x)dx,$$

$$\boldsymbol{p}^*_{(2)}(z_1,z_2,\Theta)=\int_0^\infty e^{-\Theta x}\boldsymbol{p}_{(2)}(z_1,z_2,x)dx$$

3. 임의시점에서의 고객수분포

3.1. 유휴기간

임의시점에서의 고객수 분포를 구하기 위해서 필요한 유휴기간의 임의의 시점에서의 상태확률을 구한다. 다음과 같은 행렬을 정의하자.

$[\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{n_1,n_2}]_{ij}$: 임계점이 (N_1,N_2)일 때, 위상 i로 유휴기간이 시작되었다는 조건하에 상태 (n_1,n_2)를 거치고 도착직후의 위상이 j일 확률

행렬 $\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{n_1,n_2}$ 을 축차적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,0}=\boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{1,0}=\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,0}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1$$
$$\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,1}=\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,0}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2$$
$$\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{2,0}=\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{1,0}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1$$
$$\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{1,1}=\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{1,0}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,1}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1$$
$$\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,2}=\boldsymbol{M}^{(N_1,N_2)}_{0,1}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2$$
$$\vdots$$

결국, 유휴기간중의 어떤 상태를 거쳐가고 그때의 UMC 확률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{M}_{0,0}^{(N_1,N_2)} = \boldsymbol{I} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{M}_{n_1,0}^{(N_1,N_2)} = \boldsymbol{M}_{n_1-1,0}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1,\ (1 \le n_1 \le N_1 - 1) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{n_1,n_2}^{(N_1,N_2)} =\ & \boldsymbol{M}_{n_1-1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1 \\ & + \boldsymbol{M}_{n_1,n_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2, \\ & (1 \le n_1 \le N_1 - 1,\ 1 \le n_2 \le N_2 - 1)\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{M}_{0,n_2}^{(N_1,N_2)} = \boldsymbol{M}_{0,n_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2,\ (1 \le n_2 \le N_2 - 1) \tag{3.4}$$

그리고, 바쁜기간 시작점에서의 고객수와 UMC 확률은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{M}_{N_1,n_2}^{(N_1,N_2)} = \boldsymbol{M}_{N_1-1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1,\ (0 \le n_2 \le N_2 - 1) \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{M}_{n_1,N_2}^{(N_1,N_2)} = \boldsymbol{M}_{n_1,N_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2,\ (0 \le n_1 \le N_1 - 1) \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1,z_2)$를 임계점이 (N_1,N_2)일 때, 유휴기간 시작점에서의 UMC 상태가 i라는 조건하에 바쁜기간 시작점에서의 고객수와 그때의 UMC 상태 확률에 대한 PGF라고 하면, 식 (3.5)와 (3.6)으로부터 $\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1,z_2)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1,z_2) \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boldsymbol{M}_{N_1-1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1 z_1^{N_1} z_2^{n_2} \\ &+ \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\boldsymbol{M}_{n_1,N_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2 z_1^{n_1} z_2^{N_2}\end{aligned} \tag{3.7}$$

$\boldsymbol{K}(z)$를 한 사이클의 시작점(사이클을 임의의 바쁜기간 종료점과 다음 바쁜기간 종료점 사이의 기간으로 정의하자)과 종료점간의 UMC 상태변화를 고려한 사이클 동안의 서비스 종료점수의 행렬 PGF, $\boldsymbol{G}(z)$를 기본기간(fundamental period)의 시작점과 끝점간의 UMC 상태변화를 고려한 서비스 종료수의 행렬 PGF라고 하자. 식 (3.6)을 이용하면 $\boldsymbol{K}(z)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(z) &= \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1,z_2)\Big|_{z_1=z_2=\boldsymbol{G}(z)} \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boldsymbol{M}_{N_1-1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1[\boldsymbol{G}(z)]^{N_1+n_2} \\ &\quad + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\boldsymbol{M}_{n_1,N_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{G}(z)]^{n_1+N_2}\end{aligned} \tag{3.8}$$

따라서, 확률행렬 $\boldsymbol{K}$는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \boldsymbol{K}(z)\big|_{z=1} \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boldsymbol{M}_{N_1-1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1[\boldsymbol{G}]^{N_1+n_2} \\ &\quad + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\boldsymbol{M}_{n_1,N_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2[\boldsymbol{G}]^{n_1+N_2}\end{aligned} \tag{3.9}$$

$\boldsymbol{\kappa}$를 확률행렬 $\boldsymbol{K}$의 정상확률, $\boldsymbol{g}$를 확률행렬 $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}(z)\big|_{z=1}$의 정상확률이라고 하자. 즉, $\boldsymbol{\kappa}$와 $\boldsymbol{g}$는 다음을 만족하는 $(1\times m)$ 벡터이다.

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{K},\quad \boldsymbol{\kappa}\mathbf{e} = 1,\qquad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}\boldsymbol{G},\quad \boldsymbol{g}\mathbf{e} = 1 \tag{3.10}$$

$\boldsymbol{\kappa}^*$를 $\frac{d}{dz}\boldsymbol{K}(z)\Big|_{z=1}\mathbf{e}$, 즉 한 사이클 시작점에서의 UMC 상태가 주어진 조건하에서 그 사이클 동안 서비스 받는 고객수라고 하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}^* &= \frac{d}{dz}\boldsymbol{K}(z)\Big|_{z=1}\mathbf{e} \\ &= \sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boldsymbol{M}_{N_1-1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_1\left\{\sum_{k=0}^{N_1+n_2-1}[\boldsymbol{G}]^k\boldsymbol{\mu}\right\} \\ &\quad + \sum_{n_1=0}^{N_1-1}\boldsymbol{M}_{n_1,N_2-1}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{D}_2\left\{\sum_{k=0}^{N_2+n_1-1}[\boldsymbol{G}]^k\boldsymbol{\mu}\right\}\end{aligned} \tag{3.11}$$

여기서,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{G}^{(1)}\mathbf{e} = \frac{d}{dz}\boldsymbol{G}(z)\Big|_{z=1}\mathbf{e}, \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{G} + \mathbf{e}\boldsymbol{g})[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + (\mathbf{e} - \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{g}]^{-1}\mathbf{e}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(z)\big|_{z=1} = \int_0^\infty e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})x}dS(x),$$

$$\boldsymbol{\beta} = \rho\mathbf{e} + (\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})^{-1}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{D}\mathbf{e}$$

즉, $\boldsymbol{\mu}$는 기본기간 시작점에서의 UMC 상태확률이 주어진 조건하에 기본기간 동안 서비스 받는 평균 고객수이고, $\boldsymbol{A}$는 서비스간의 UMC 상태변화확률행렬, $\boldsymbol{\beta}$는 서비스 시작점에서의 UMC 상태확률이 주어진 조건하에 서비스시간동안 도착하는 평균 고객수이다.

이제 식(3.1) ~ (3.4)와 (3.10)을 이용하면 서어버가 유휴하다는 조건하에 임의의 시점에서의 상태확률($\tilde{\boldsymbol{q}}_{n_1,n_2}$)을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{q}}_{n_1,n_2} &= \frac{\text{상태 }(n_1,n_2,j)\text{에 머무는 평균시간}}{\text{평균 유휴기간}} \\ &= \frac{\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{M}_{n_1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}}{\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{M}_{n_1,n_2}^{(N_1,N_2)}(-\boldsymbol{C})^{-1}\mathbf{e}}\end{aligned} \tag{3.12}$$

3.2. 바쁜기간

$\boldsymbol{p}_{(1)}^*(z_1,z_2,\Theta)$, $\boldsymbol{p}_{(2)}^*(z_1,z_2,\Theta)$을 바쁜기간 시작점에서의 고객수와 이탈시점 고객수에 대한 PGF를 이용하여 구하고 $z_2 = 1$을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_{(1)}^*(z_1,1,\Theta) \\ &= \{\rho\boldsymbol{x}_0[\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1,1) - \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)] \\ &\qquad + \rho[\boldsymbol{X}(z_1,1) - \boldsymbol{X}(0,1)]\} \\ &\quad \times \frac{\boldsymbol{A}(z_1,1) - S^*(\Theta)\boldsymbol{I}}{E(S)}[\Theta\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + z_1\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2]^{-1}\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{p}_{(2)}^*(z_1,1,\Theta) \\ &= \{\rho\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1) + \rho[\boldsymbol{X}(0,1) - \boldsymbol{x}_0]\} \\ &\quad \times \frac{\boldsymbol{A}(z_1,1) - S^*(\Theta)\boldsymbol{I}}{E(S)}[\Theta\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + z_1\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2]^{-1}\end{aligned} \tag{3.14}$$

여기서, $\boldsymbol{X}(z_1,z_2)$는 이탈시점 고객수에 대한 PGF이다.

식 (3.13)은 다음과 같은 확률적 해석이 가능하다. 임의의 시점에서 서어버가 계층-1 고객으로 바쁘고 그때의 계층-1 고객수와 잔여서비스시간은 임의의 시점에서 서어버가 계층-1 고객을 서비스하고 있기 위해서 현재의 서비스 시작점에서 계층-1 고객이 한 명이상 존재해야하고, 그 때의 계층-1 고객수와 경과서비스시간동안 도착한 계층-1 고객수와 잔여서비스시간의 합으로 구성된다. 식 (3.14)는 임의의 시점에서 서어버가 계층-2 고객으로 바쁜 경우이므로 서비스 시작점에서 계층-1 고객이 한 명도 존재하지 않는다는 사실을 고려하면 동일한 확률적 해석이 가능하다.

이제 식 (3.13)과 (3.14)를 완성하기 위해 $\boldsymbol{X}(z_1,1)$, $\boldsymbol{X}(0,1)$을 구하자. $\boldsymbol{X}(z_1,1)$는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}(z_1,1) \\ &= [\boldsymbol{X}(z_1,1)-\boldsymbol{X}(0,1)]\boldsymbol{A}(z_1,1)z_1^{-1} \\ &+ [\boldsymbol{X}(0,1)-\boldsymbol{x}_0]\boldsymbol{A}(z_1,1) \\ &+ \boldsymbol{x}_0[\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1,1)-\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)]\boldsymbol{A}(z_1,1)z_1^{-1} \\ &+ \boldsymbol{x}_0\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)\boldsymbol{A}(z_1,1) \end{aligned} \tag{3.15}$$

임의의 이탈시점에서의 계층-1 고객수(식 (3.15))는 다음과 같은 네 가지 경우에 대하여 확률적 해석이 가능하다. 첫째, 직전 이탈시점직후에 계층-1 고객이 한 명 이상 존재하는 경우, 직전 이탈시점의 계층-1 고객수와 계층-1 고객 한 명을 서비스하는 동안 도착하는 계층-1 고객수의 합에서 계층-1 고객 한 명이 시스템을 이탈하므로 한 명을 빼주면 된다. 둘째, 직전 이탈시점직후에 계층-1 고객이 존재하지 않고 계층-2 고객이 한 명이상 존재하는 경우, 계층-2 고객 한 명을 서비스하는 동안 도착하는 계층-1 고객수이다. 셋째, 직전 이탈시점이 바쁜기간 종료점이고 바쁜기간 시작점에서 계층-1 고객이 한 명이상인 경우, 바쁜기간 시작점에서의 계층-1 고객수와 계층-1 고객 한 명을 서비스하는 동안 도착하는 계층-1 고객수의 합에서 계층-1 고객 한 명이 시스템을 이탈하므로 한 명을 빼주면 된다. 마지막으로, 직전 이탈시점이 바쁜기간 종료점이고 바쁜기간 시작점에서 계층-1 고객이 한 명도 존재하지 않는 경우, 계층-2 고객 한 명을 서비스하는 동안 도착하는 계층-1 고객수이다.

이제 $\boldsymbol{X}(0,1)$를 구하기 위해 계층-1 고객들이 0명이 되는 이탈시점만을 새로운 내재점으로 정의하자. 그러면, 새로운 내재점에서의 계층-2 고객수에 대한 PGF는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\Phi}(z_2)=\frac{\boldsymbol{X}(0,z_2)}{\boldsymbol{X}(0,1)\mathbf{e}} \tag{3.16}$$

식 (3.16)으로부터 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\boldsymbol{\Phi}(1)=\frac{\boldsymbol{X}(0,1)}{\boldsymbol{X}(0,1)\mathbf{e}}, \qquad \boldsymbol{\Phi}(0)=\frac{\boldsymbol{X}(0,0)}{\boldsymbol{X}(0,1)\mathbf{e}} \tag{3.17}$$

식 (3.16)과 (3.17)의 분모는 다음으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\lambda\{1-\boldsymbol{X}(0,1)\mathbf{e} \\ &\quad + \boldsymbol{x}_0[\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(1,1)-\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)]\mathbf{e}\} \\ &=\lambda_1 \end{aligned} \tag{3.18}$$

식 (3.18)은 다음과 같은 확률적 해석이 가능하다. 단위시간당 계층-1 고객의 평균 이탈시점 개수는 단위시간당 계층-1 고객의 평균 서비스시작시점 개수와 같고, 단위시간당 계층-1 고객의 평균 서비스시작시점 개수는 단위시간당 평균 이탈시점 개수 중에 계층-1 고객을 한 명이상 남기는 이탈시점 개수와 계층-1 고객이 한 명이상 존재하는 바쁜기간 시작점으로 구성된다. 식 (3.18)을 정리하면 다음과 같이 $\boldsymbol{X}(0,1)\mathbf{e}$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}(0,1)\mathbf{e} \\ &=\frac{\lambda_2}{\lambda}+\boldsymbol{x}_0[\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(1,1)-\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)]\mathbf{e} \end{aligned} \tag{3.19}$$

$\boldsymbol{G}_H(z_2)$를 시스템내에 있는 모든 계층-1 고객들을 서비스하는 동안 도착하는 계층-2 고객수와 위상변화에 대한 PGF라고 하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{G}_H(z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k(z_2)\boldsymbol{G}_H(z_2)^k \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{G}_H=\int_0^{\infty}e^{(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{G}_H)x}dS(x) \tag{3.21}$$

여기서, $\boldsymbol{A}_k(z_2)$는 k명의 계층-1 고객이 도착한 서비스시간동안 도착한 계층-2 고객에 대한 PGF이다. (즉, $\boldsymbol{A}(z_1,z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k(z_2)z_1^k$)

이제 식 (3.20)을 이용하면 $\boldsymbol{\Phi}(z_2)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(z_2) \\ &=\left\{\frac{\boldsymbol{\Phi}(z_2)-\boldsymbol{\Phi}(0)}{z_2}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k(z_2)\boldsymbol{G}_H(z_2)^k \\ &\quad+\boldsymbol{\Phi}(0)[\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(1,z_2)-\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,z_2)] \\ &\qquad\times\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k(z_2)\boldsymbol{G}_H(z_2)^k\right\} \\ &\quad+\boldsymbol{\Phi}(0)\left[\frac{\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,z_2)}{z_2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_k(z_2)\boldsymbol{G}_H(z_2)^k \end{aligned} \tag{3.22}$$

식 (3.22)에 $z_2=1$을 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}(1) \\ &=\boldsymbol{\Phi}(0)[\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(1,1)-\boldsymbol{I}]\boldsymbol{G}_H(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}_H+\mathbf{e}\boldsymbol{g}_H)^{-1} \\ &\quad+\boldsymbol{g}_H \end{aligned} \tag{3.23}$$

여기서, $\boldsymbol{g}_H$는 $\boldsymbol{g}_H=\boldsymbol{g}_H\boldsymbol{G}_H,\ \boldsymbol{g}_H\mathbf{e}=1$을 만족하는 $(1\times m)$벡터이다.

식 (3.23)과 식 (3.19)를 식 (3.17)에 대입하면 $\boldsymbol{X}(0,1)$를 구할 수 있다.

4. 대기시간 분포

4.1. 계층-1 고객

4.1.1. 바쁜기간에 도착하는 경우

바쁜기간에 도착하는 계층-1 고객의 대기시간은 도착하면서 보는 대기중인 계층-1 고객들의 서비스시간들과 현재 서비스중인 고객의 잔여서비스 시간의 합이다. 그러므로 임의의 시점에서의 계층-1 고객들의 일량($\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)B,V}(\Theta)$)을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)B,V}(\Theta) \\ &=\frac{\boldsymbol{p}^*_{(1)}(z_1,z_2,\Theta)|_{z_1=S^*(\Theta),z_2=1}}{S^*(\Theta)} \\ &\quad+\boldsymbol{p}^*_{(2)}(z_1,z_2,\Theta)|_{z_1=S^*(\Theta),z_2=1} \end{aligned} \tag{4.1}$$

식 (4.1)은 식 (3.13)와 (3.14)를 이용하여 구할 수 있다. 바쁜기간에 도착하는 임의의 계층-1 실제고객의 대기시간은 다음으로부터 구할 수 있다.

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)B,A}(\Theta)=\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)B,V}(\Theta)\frac{\boldsymbol{D}_1}{\lambda_1} \tag{4.2}$$

4.1.2. 유휴기간에 도착하는 경우

상태 (n_1,n_2)을 보고 도착하는 계층-1 고객의 대기시간은 우선 도착시점직후의 위상변화를 고려하고, 이 시점부터의 잔여유휴기간과 먼저 도착한 n_1명의 계층-1 고객들의 서비스시간들로 구성된다. 그러므로, 식 (3.12)를 이용하면 유휴기간에 도착하는 임의의 각 계층별 실제고객의 대기시간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)I,A}(\Theta) \\ &=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\widetilde{\boldsymbol{q}}_{n_1,n_2}\frac{\boldsymbol{D}_1}{\lambda_1}\boldsymbol{I}^*_{N_1-(n_1+1),N_2-n_2}(\Theta)[S^*(\Theta)]^{n_1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

4.2. 계층-2 고객

우선 계층-2 고객의 대기시간 분포를 구하기 위해 다음을 정의하자.

$\boldsymbol{Q}^*_H(\Theta)$ 는 다음을 만족하는 행렬이다.

$$\boldsymbol{Q}^*_H(\Theta) = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}_2 - \Theta \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}_1 \int_0^\infty e^{\boldsymbol{Q}^*_H(\Theta)x} dS(x) \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{Q}_H = \lim_{\Theta \to 0+} \boldsymbol{Q}^*_H(\Theta) = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}_2 + \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{G}_H$$

그리고 $\tilde{\boldsymbol{q}}_H$는 다음을 만족하는 $(1\times m)$ 벡터이다.

$$\tilde{\boldsymbol{q}}_H \boldsymbol{Q}_H = \boldsymbol{0}, \ \tilde{\boldsymbol{q}}_H \mathbf{e} = 1 \tag{4.5}$$

4.2.1 바쁜기간에 도착하는 경우

바쁜기간에 도착하는 계층-2 고객의 대기시간은 도착하면서 보는 일량을 서비스하는 시간과 그 시간 동안 도착한 계층-1 고객들과 그들의 자손(계층-1 고객)을 서비스하는 시간의 합이다. 분포를 구하기 위하여 다음과 같은 기호를 정의하자.

$\boldsymbol{V}^*(\Theta)$: 바쁜기간의 임의의 시점에서의 부하량 (Unfinished Work)과 위상에 대한 LST

$$= \frac{\boldsymbol{p}^*(z_1, z_2, \Theta)|_{z_1 = z_2 = S^*(\Theta)}}{S^*(\Theta)}$$

$$= \left\{ -\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (1-\rho) \tilde{\boldsymbol{q}}_{n_1,n_2} [S^*(\Theta)]^{n_1+n_2} [\boldsymbol{C} + S^*(\Theta)\boldsymbol{D}] \right\}$$
$$\times [\Theta \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + S^*(\Theta)\boldsymbol{D}]^{-1} \tag{4.6}$$

$[\widehat{\boldsymbol{W}}_{(2)B}(x)]_j = Pr$(계층-2 고객이 바쁜기간에 도착하고, 도착직전의 일량이 x이하, 도착직후의 위상이 j)

$\widehat{\boldsymbol{W}}^*_{(2)B}(\Theta)$: $\widehat{\boldsymbol{W}}_{(2)B}(x)$ 의 LST

$$= \int_0^\infty e^{-\Theta x} d\widehat{\boldsymbol{W}}_{(2)B}(x) = \boldsymbol{V}^*(\Theta) \frac{\boldsymbol{D}_2}{\lambda_2}$$

결국, 바쁜기간에 도착한 계층-2 고객의 실제 대기시간의 LST는 식 (4.4)를 이용하면 다음과 같다.

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(2)B,A}(\Theta) = \int_0^\infty d\widehat{\boldsymbol{W}}_{(2)B}(x)\, e^{\boldsymbol{Q}^*_H(\Theta)x} \tag{4.7}$$

4.2.2 유휴기간에 도착하는 경우

유휴기간에 도착한 계층-2 고객의 대기시간은 다음 세 가지의 합으로 이루어진다.

① 도착직후의 잔여유휴기간
② 자신보다 먼저 도착한 계층-2 고객들을 서비스하는 시간과 전체 유휴기간동안 도착한 계층-1 고객들을 서비스하는 시간
③ ②번 시간동안 도착한 계층-1 고객들과 그들의 자손(계층-1 고객)을 서비스하는 시간

이제 유휴기간에 도착한 계층-2 고객의 대기시간 분포의 LST를 구하기 위해 다음과 같은 결합변환을 정의하자.

$\boldsymbol{I}^*_{N_1,N_2}(\Theta, z_1, z_2)$: 임계점이 (N_1, N_2)인 시스템에서 유휴기간 시작점에서의 UMC 상태가 주어진 조건하에 유휴기간의 길이와 그동안 도착한 각 계층별 고객수, 유휴기간 종료직후의 UMC 상태에 대한 결합변환행렬

우선 $\boldsymbol{I}^*_{N_1,N_2}(\Theta, z_1, z_2)$를 구하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{I}^*_{N_1,N_2}(\Theta, z_1, z_2)$$
$$= z_1(\Theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1} \boldsymbol{D}_1 \boldsymbol{I}^*_{N_1-1,N_2}(\Theta, z_1, z_2)$$
$$+ z_2(\Theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1} \boldsymbol{D}_2 \boldsymbol{I}^*_{N_1,N_2-1}(\Theta, z_1, z_2)$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{I}^*_{1,1}(\Theta, z_1, z_2)$$
$$= z_1(\Theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1} \boldsymbol{D}_1 + z_2(\Theta \boldsymbol{I} - \boldsymbol{C})^{-1} \boldsymbol{D}_2$$
$$\boldsymbol{I}^*_{0,k}(\Theta, z_1, z_2) = \boldsymbol{I}^*_{i,0}(\Theta, z_1, z_2) = \boldsymbol{I}$$
$$(1 \le i \le N_1 - 1,\ 1 \le k \le N_2 - 1)$$

앞에서 정의한 $\boldsymbol{I}^*_{N_1,N_2}(\Theta, z_1, z_2)$를 이용하면 유휴기간에 도착한 계층-2 고객의 대기시간 분포의 LST는 다음과 같다.

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(2)I,A}(\Theta)$$
$$= \left\{ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \tilde{\boldsymbol{q}}_{n_1,n_2} \frac{\boldsymbol{D}_2}{\lambda_2} [z_1^{n_1} z_2^{n_2}|_{z_1 = z_2 = S^*(\Theta_2)}] \right.$$
$$\left. \times [\boldsymbol{I}^*_{N_1-n_1, N_2-(n_2+1)}(\Theta_1, z_1, z_2)|_{z_1 = S^*(\Theta_2), z_2 = 1}] \right\} \Big|_{\Theta_1 = \Theta, \Theta_2 = -\boldsymbol{Q}^*_H(\Theta)} \tag{4.8}$$

5. 평균 대기시간

5.1. 계층-1 고객

5.1.1. 바쁜기간에 도착하는 경우

식 (3.15)를 정리하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{X}(z_1, 1)$$
$$= (z_1 - 1)\boldsymbol{X}(0,1)\boldsymbol{A}(z_1, 1)$$
$$+ \boldsymbol{x}_0 [\boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(z_1, 1) - \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)$$
$$+ z_1 \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1) - z_1 \boldsymbol{I}]\boldsymbol{A}(z_1, 1) \tag{5.1}$$

식 (3.13)에 식 (5.1)을 대입하고 $z_1 = S^*(\Theta)$를 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{p}^*_{(1)}(S^*(\Theta), 1, \Theta)$$
$$= \lambda S^*(\Theta) \{ \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1) - \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(S^*(\Theta), 1)$$
$$- \boldsymbol{X}(0,1)\boldsymbol{A}(S^*(\Theta), 1)$$
$$- \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1)\boldsymbol{A}(S^*(\Theta), 1)$$
$$+ \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{A}(S^*(\Theta), 1) + \boldsymbol{X}(0,1) \}$$
$$\times [\Theta \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + S^*(\Theta)\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2]^{-1} \tag{5.2}$$

이제 식 (4.1)에 식 (5.2)와 (3.14)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)B,V}(\Theta)$$
$$= \{ \lambda(1 - S^*(\Theta))[\boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(0,1) + \boldsymbol{X}(0,1)]$$
$$- \lambda \boldsymbol{x}_0 \boldsymbol{M}_B^{(N_1,N_2)}(S^*(\Theta), 1) + \lambda S^*(\Theta)\boldsymbol{x}_0 \}$$
$$\times [\Theta \boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + S^*(\Theta)\boldsymbol{D}_1 + \boldsymbol{D}_2]^{-1} \tag{5.3}$$

이제 식 (5.3)을 이용하여 바쁜기간에 도착한 계층-1 고객의 평균 대기시간은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E[\widetilde{\boldsymbol{W}}_{(1)B,A}]$$
$$= -\frac{d}{d\Theta} \widetilde{\boldsymbol{W}}^*_{(1)B,A}(\Theta) \Big|_{\Theta=0} \mathbf{e} = -\widetilde{\boldsymbol{W}}^{*(1)}_{(1)B,V}(0) \frac{\boldsymbol{D}_1}{\lambda_1} \mathbf{e} \tag{5.4}$$

5.1.2 유휴기간에 도착하는 경우

유휴기간에 도착하는 계층-1 고객의 평균 대기시간은 도착직후의 평균 잔여유휴기간과 도착하면서 보는 계층-1 고객들의 평균 서비스시간들로 이루어진다. 그러므로 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&E[\widetilde{\mathbf{W}}_{(1)I,A}] \\
&= \sum_{n_1=0}^{N_1-2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}\frac{\mathbf{D}_1}{\lambda_1} \\
&\quad\times\Big\{\sum_{i=0}^{N_1-n_1-2}\sum_{j=0}^{N_2-n_2-1}\mathbf{M}_{i,j}^{(N_1-(n_1+1),N_2-n_2)}(-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{e} \\
&\qquad + n_1E(S)\mathbf{e}\Big\} \\
&\quad+\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\widetilde{\mathbf{q}}_{N_1-1,n_2}\frac{\mathbf{D}_1}{\lambda_1}\{(N_1-1)E(S)\mathbf{e}\}
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

식 (5.5)의 두 번째 항은 유휴기간에 도착하는 계층-1 고객으로 바쁜기간이 시작되는 경우로 이 경우에 평균 대기시간은 먼저 도착한 계층-1 고객들의 평균 서비스시간이다.

5.2. 계층-1 고객

Takine and Hasegawa[10]에 의하면 초기 일량 (x)과 위상이 주어진 조건하에, 그 시점으로부터 시스템내에 존재하는 계층-1 고객을 모두 서비스할 때까지의 평균시간 $(\widetilde{\mathbf{p}}_H(x))$은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{p}}_H(x) \\
&=\left(x\mathbf{e}\widetilde{\mathbf{q}}_H - e^{\mathbf{Q}_Hx}+\mathbf{I}\right) \\
&\quad\times[(\mathbf{e}-E(S)\mathbf{D}_1\mathbf{e})\widetilde{\mathbf{q}}_H-\mathbf{C}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{e}
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

식 (5.6)을 이용하여 바쁜기간과 유휴기간에 도착한 계층-2 고객의 평균 대기시간을 다음과 같이 구할 수 있다.

5.2.1. 바쁜기간에 도착하는 경우

바쁜기간에 도착하는 계층-2 고객의 평균 대기시간을 구하기 위해 식 (4.6)을 이용하여 $\frac{d}{d\Theta}\mathbf{V}^*(\Theta)\Big|_{\Theta=0}$ 을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{V}^{*(1)}(0) \\
&=\Big\{-\mathbf{V}^*(0)\Big[\mathbf{I}+S^{*(1)}(0)\mathbf{D}+\frac{1}{2}S^{*(2)}(0)\mathbf{D}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}\Big] \\
&\quad-\sum_{n_1=1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}(1-\rho)n_1\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}[S^{*(1)}(0)]^2\mathbf{D}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} \\
&\quad-\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=1}^{N_2-1}(1-\rho)n_2\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}[S^{*(1)}(0)]^2\mathbf{D}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} \\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}(1-\rho)\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}[S^{*(2)}(0)]\mathbf{D}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi} \\
&\quad-\sum_{n_1=1}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}(1-\rho)n_1\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}[S^{*(1)}(0)][\mathbf{C}+\mathbf{D}] \\
&\quad-\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=1}^{N_2-1}(1-\rho)n_2\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}[S^{*(1)}(0)][\mathbf{C}+\mathbf{D}] \\
&\quad-\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}(1-\rho)\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}[S^{*(1)}(0)]\mathbf{D}\Big\}
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

$$
\times[\mathbf{C}+\mathbf{D}+\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}+S^{*(1)}(0)\mathbf{D}\mathbf{e}\boldsymbol{\pi}]^{-1}
$$

여기서, $\mathbf{V}^*(0)=\mathbf{p}^*(1,1,0)$

식 (5.7)을 이용하여 바쁜기간에 도착한 계층-2 고객이 보는 평균 일량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
E[\widehat{\mathbf{W}}_{(2)B}] &= -\frac{d}{d\Theta}\widehat{\mathbf{W}}^*_{(2)B}(\Theta)\Big|_{\Theta=0}\mathbf{e} \\
&= -\mathbf{V}^{*(1)}(0)\frac{\mathbf{D}_2}{\lambda_2}\mathbf{e}
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

이제 식 (5.6)에 식 (5.8)을 대입하면 바쁜기간에 도착하는 계층-2 고객의 평균 대기시간을 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&E[\widetilde{\mathbf{W}}_{(2)B,A}] \\
&=\Big[E[\widehat{\mathbf{W}}_{(2)B}]\widetilde{\mathbf{q}}_H-\int_0^\infty d\widehat{\mathbf{W}}_{(2)B}(x)e^{\mathbf{Q}_Hx}+\frac{\boldsymbol{\pi}_B\mathbf{D}_2}{\lambda_2}\Big] \\
&\quad\times[(\mathbf{e}-E(S)\mathbf{D}_1\mathbf{e})\widetilde{\mathbf{q}}_H-\mathbf{C}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{e}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

여기서, $\boldsymbol{\pi}_B$는 바쁜기간의 임의시점에서의 위상확률이고,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\widehat{\mathbf{W}}_{(2)B}(x)e^{\mathbf{Q}_Hx} \\
&=\frac{\lambda}{\lambda_2}\rho[\mathbf{X}_{(1)}(0,1)+\mathbf{X}_{(2)}(0,1)-\mathbf{x}_0]
\end{aligned}
$$

이다.

5.2.2 유휴기간에 도착하는 경우

유휴기간에 도착하는 계층-2 고객의 평균 대기시간은 도착 직후의 잔여 유휴기간, 바쁜기간 시작점에서의 계층-1 고객들과 먼저 도착한 계층-2 고객들을 모두 서비스하는 시간, 그리고 그 서비스시간들동안 도착하는 계층-1 고객들과 그 자손들을 모두 서비스할 때까지의 평균시간의 합으로 구성된다. 그러므로 식 (5.6)을 이용하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&E[\widetilde{\mathbf{W}}_{(2)I,A}] \\
&=\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\sum_{n_2=0}^{N_2-2}\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,n_2}\frac{\mathbf{D}_2}{\lambda_2} \\
&\quad\times\Big\{\sum_{i=0}^{N_1-n_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-n_2-2}\mathbf{M}_{i,j}^{(N_1-n_1,N_2-(n_2+1))}(-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{e} \\
&\qquad+\sum_{n_2^*=0}^{N_2-n_2-2}\mathbf{M}_{N_1-n_1,n_2^*}^{(N_1-n_1,N_2-(n_2+1))} \\
&\qquad\quad\Big[E(S^{(N_1+n_2)})\mathbf{e}\widetilde{\mathbf{q}}_H-\int_0^\infty dS^{(N_1+n_2)}(x)e^{\mathbf{Q}_Hx}+\mathbf{I}\Big] \\
&\qquad\quad\times[(\mathbf{e}-E(S)\mathbf{D}_1\mathbf{e})\widetilde{\mathbf{q}}_H-\mathbf{C}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{e} \\
&\qquad+\sum_{n_1^*=0}^{N_1-n_1-1}\mathbf{M}_{n_1^*,N_2-n_2-1}^{(N_1-n_1,N_2-(n_2+1))} \\
&\qquad\quad\Big[E(S^{(n_1+n_1^*+n_2)})\mathbf{e}\widetilde{\mathbf{q}}_H-\int_0^\infty dS^{(n_1+n_1^*+n_2)}(x)e^{\mathbf{Q}_Hx}+\mathbf{I}\Big] \\
&\qquad\quad\times[(\mathbf{e}-E(S)\mathbf{D}_1\mathbf{e})\widetilde{\mathbf{q}}_H-\mathbf{C}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{e}\Big\} \\
&\quad+\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\widetilde{\mathbf{q}}_{n_1,N_2-1}\frac{\mathbf{D}_2}{\lambda_2} \\
&\quad\times\Big[E(S^{(n_1+N_2-1)})\mathbf{e}\widetilde{\mathbf{q}}_H-\int_0^\infty dS^{(n_1+N_2-1)}(x)e^{\mathbf{Q}_Hx}+\mathbf{I}\Big] \\
&\qquad\times[(\mathbf{e}-E(S)\mathbf{D}_1\mathbf{e})\widetilde{\mathbf{q}}_H-\mathbf{C}-\mathbf{D}]^{-1}\mathbf{e}
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

6. 요 약

본 연구에서는 다중 임계점을 고려한 *MAP/G/1* 대기행렬모형을 제시하고 계층별 고객의 대기시간에 초점을 맞추어 그의 LST와 평균 대기시간을 2-계층인 경우에 대하여 서어버가 유휴한 기간에 도착한 경우와 바쁜기간에 도착한 경우로 나누어서 각각 구하였다.

7. 참고문헌

1. Bonomi, F., Fratta, L., Montagna, S. and Paglino, R., "Priority on Cell Service and on Cell Loss in ATM Switching", *in Proc. 7th ITC Sem.*, New Jersey, Oct. 1990, paper 7.2.
2. Jaiswal, N.K., *Priority Queues*, Academic Press, New York and London, 1968.
3. Lee H.W., Seo W.J., Yoon, S.H., "An analysis of multiple-class vacation queues

with individual thresholds", *OR Letters*, 28, 35-49, 2001
4. Lee, H.W., Yoon, S.H. and Seo, W.J., "Start-up class models in multiple-class queues with N-policy", *Queueing Systems*, 31, 101-124, 1999
5. Takagi, H., "Priority Queues with Setup Times", *Operations Research*, 38(4), pp.667-677, 1990.
6. Takagi, H., Takine, T. and Boxma, O.J., "Distribution of the Workload in Multiclass Queueing Systems with Server Vacations", *Naval Research Logistics*, 39, pp.41-52, 1992.
7. Takagi, H., *Queueing Analysis Vol.1*, North-Holland, Amsterdam, 1991.
8. Takagi, Y., Hino, S. and Takahashi, T., "Priority Assignment Control of ATM Line Buffers with Multiple QOS Classes", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 9(7), pp.1078-1091, 1991.
9. Takine, T., "The nonpreemtive priority MAP/G/1 queue with two classes of customers", *J. Oper. Res. Soc. J.*, 39, 266-290, 1996
10. Takine, T. and Hasegawa, T., "The workload in the MAP/G/1 queue with state-dependent services its application to a queue with preemptive resume priority", *Stochastic Models*, 10, 183-204, 1994
11. Takine, T., Matsumoto, Y., Suda, T. and Hasegawa, T., "Mean waiting times in nonpreemptive priority queues with Markovian arrival and i.i.d. service processes", *Performance Eval.*, 20, 131-149, 1994
12. 윤승현, *제어정책을 고려한 다계층 대기행렬모형*, 성균관대학교 박사학위논문, 1996.
13. 이호우, *대기행렬이론-확률과정론적 분석*, 시그마프레스, 1998.