2005 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회
2005 년 5 월 13 일~14 일, 충북대학교

휴리스틱 방법에 의한 휴가형 $\mathrm{Geo}^{X}/\mathrm{G}/1$ 대기행렬의 평균대기시간 분석

김성진 · 채경철
(한국과학기술원 산업공학과)

Heuristic Interpretation of the Mean Waiting Time for $\mathrm{Geo}^{X}/\mathrm{G}/1$ Queues

Sung J. Kim · Kyung C. Chae

Abstract

We present the discrete-time version of the heuristic interpretation of the mean waiting time known well about the continuous-time version. The heuristic approach is mainly based on an arriving customer's viewpoint. We obtain the mean waiting time of $Geo^{X}/G/1$ queueing systems, including vacation queues.

1. 서론

본 연구의 목적은 $Geo^{X}/G/1$ 대기행렬 시스템에서의 평균대기시간을 간단하게 구하고자 하는 것이다. 대부분의 모델의 경우 변환(transform) 형태로 고객대기시간이 주어지기 때문에 이를 실제로 활용하는 데에는 많은 어려움이 따른다. 따라서 본 연구는 직관적인 방법으로 평균대기시간에 접근하여, 그로 인해 무변환(transform free) 형태의 평균대기시간을 제공한다.

최근, 인터넷 기반을 둔 통신시스템의 많은 발전과 그에 대한 대기행렬모형의 활용가능성으로 인해 이산시간 대기행렬모형에 대한 관심이 증가하고 있다. 이는 비트, 셀, 패킷 등 정수배의 데이터 단위를 사용하는 통신시스템의 특성 때문으로 이산시간 대기행렬모형을 이용하면 연속시간 대기행렬모형을 이용할 때보다 더 정확한 분석이 가능하다. 이산시간 대기행렬을 분석하기 위해서는 많은 새로운 가정의 도입이 필요하다 [6]. 본 눈문에서는 통신시스템에 보다 적합하다고 알려진 후도착모형(LAS: late arrival system)을 가정한다 [4].

그 동안 이산시간 대기행렬모형에 대한 많은 연구가 이루어졌다. 또한 그 동안 발표된 많은 연구를 모은 책이 나오기도 했다 [6]. 그러나 본 연구는 임의의 도착고객이 바라보는 관점을 이용하여 평균대기시간을 간편하게 구했다는 데 의의가 있다. 이 때 평균대기시간은 도착하는 고객이 바라보는 고객의 총 서비스시간과 현재 서비스를 받고 있는 고객의 잔여 서비스시간의 합으로 나타낼 수 있다. 본 논문은 휴리스틱 방법으로 연속시간 대기행렬모형의 평균대기시간을 다룬 Chae and Lee [5]의 이산시간 버전이다. 본 논문에서의 대부분의 기호는 Takagi [6]를 따랐다.

2. $\mathrm{Geo}^{X}/\mathrm{G}/1$ 시스템

먼저 유휴기간동안 서버가 휴가를 가지 않는 기본 $Geo^{X}/G/1$ 대기행렬모형을 고려하자. $Geo^{X}/G/1$ 대기행렬모형을 표현하기 위해 다음을 정의하자.

λ = 한 슬롯(slot)동안 도착하는 고객수;
$\lambda(k) \triangleq \Pr[\lambda = k], \quad k = 0,1,2,\cdots$;
S = 각 고객의 서비스시간;
$s(l) \triangleq \Pr[S = l], \quad l = 1,2,\cdots$.

여기에서 특히 주의해야 할 점은 본 모형이

이산시간 대기행렬모형이기 때문에 고객의 서비스시간이 자연수의 형태로 정의된다는 것이다.

평균대기시간 W_q 를 도착고객 관점에서 식을 세워보면 다음과 같다.

$$W_q = [L_q + E(\lambda_R)]E(S) + P(B)E(S_R) \qquad (1)$$

이 때, L_q = 평균대기고객수;

λ_R = 그룹내 잔여고객수;

S_R = 잔여서비스시간;

$P(B)$ = 서버가 바쁠 확률.

식 (1)이 의미하는 바는 도착하는 고객은 평균적으로 도착 시 서비스 대기중인 고객과 그룹내 앞선 고객의 총 서비스시간만큼을 기다려야 하며, 또한 도착 시 서버가 바쁜 상태라면 현재 진행중인 서비스를 마칠 때까지의 시간을 추가적으로 기다려야 함을 나타낸다.

이 식을 정리하여 W_q 를 얻기 위하여 우리는 앞서 사용한 정의를 이용하여 일부 항들을 새롭게 표현할 수 있다. 먼저, 그룹내 잔여고객수의 기대값은 $E(\lambda_R) = \frac{1}{2}[E(\lambda^2)/E(\lambda) - 1]$ 로 나타낼 수 있다 [6]. 같은 방법으로 잔여서비스시간의 기대값 또한 $E(S_R) = \frac{1}{2}[E(S^2)/E(S) - 1]$ 로 표현이 가능하다. 그리고 Little's law에 의해 $L_q = E(\lambda)W_q$ 임이 잘 알려져 있으며, $P(B) = E(\lambda)E(S)$ 임을 쉽게 알 수 있다 [2]. 이 때, 안정된 시스템을 위해 $P(B) < 1$ 가 유지되어야 한다.

위의 식들을 이용해 식 (1)을 정리하면,

$$W_q = \frac{E(S)}{1-P(B)}E(\lambda_R) + \frac{P(B)}{1-P(B)}E(S_R) \qquad (2)$$

을 얻는다.

3. 복수휴가형 $\mathrm{Geo}^X/G/1$ 시스템

다음으로 유휴기간동안 서버가 복수휴가를 떠나는 모형을 고려해보자. 이 때 휴가의 길이는 슬롯의 정수배이며, 그 시작과 끝은 슬롯의 경계와 동기화 된다. 휴가시간 모형을 식으로 정의하면 다음과 같다.

V = 각 휴가시간의 길이;

$v(l)$ @ $\Pr[V = l], \quad l = 1, 2, L$;

$V(z)$ @ $\sum_{l=1}^{\infty} v(l) z^l$.

기본 $Geo^X/G/1$ 모형과 같이 도착고객 관점에서 W_q 에 관한 식을 세워보면 다음과 같다.

$$W_q = [L_q + E(\lambda_R)]E(S) + P(B)E(S_R) + [1 - P(B)]E(V_R) \qquad (3)$$

이 때, 잔여휴가시간의 기대값을 $E(\lambda_R)$, $E(S_R)$ 과 마찬가지 방법으로 구하면 다음과 같다.

$$E(V_R) = \frac{1}{2}[E(V^2)/E(V) - 1].$$

식 (3)은 우항의 마지막항이 존재한다는 점에서 식 (1)과 차이를 나타낸다. 식 (1)에서는 서버가 유휴기간에 고객이 도착하면 그 즉시 서비스를 받게 되어 대기시간이 존재하지 않으나, 식 (3)에서는 고객도착 시 서버가 유휴기간이라면 서버가 잔여 휴가시간을 마칠 때까지 기다려야 한다. 이러한 이유로 $[1-P(B)]E(V_R)$ 항이 존재하게 되며, 이를 제외하고는 식 (1)과 모두 같음을 알 수 있다.

앞선 식들을 이용하여 식 (3)을 정리하면,

$$W_q = \frac{E(S)}{1-P(B)} E(\lambda_R) + \frac{P(B)}{1-P(B)} E(S_R) + E(V_R) \quad (4)$$

를 얻게 된다.

4. 단수휴가형 $\mathrm{Geo}^X/\mathrm{G}/1$ 시스템

본 장에서는 유휴기간동안 서버가 단수휴가를 가는 모형을 고려한다. 앞선 두 경우에서 서버가 유휴기간일 때, 도착하는 고객은 모형에 따라서 대기시간의 유무가 결정되었다. 그러나 단수휴가 모형에서는 서버가 유휴기간이라 하더라도 고객의 도착 시점에 따라 대기시간이 존재할 수도 때로는 필요 없을 수도 있다. 이를 설명하기 위해 평균유휴기간 $E(I)$ 를 다음과 같이 정의한다 [6].

$$E(I) = E(V) + V[\lambda(0)]/[1-\lambda(0)].$$

이 때, $V[\lambda(0)]$ 은 한 번의 휴가시간 동안 한 명의 고객도 도착하지 않을 확률이며, $1/[1-\lambda(0)]$ 은 평균 고객도착간 시간을 나타낸다.

식 (3)을 단수휴가모형에 맞게 고쳐 쓰면, 다음과 같다.

$$W_q = [L_q + E(\lambda_R)]E(S) + P(B)E(S_R) + P(V)E(V_R) \quad (5)$$

이 때, $P(V)$ = 서버가 휴가중일 확률

$$= P(I)P(V|I) = P(I)[E(V)/E(I)]$$
$$= [1-P(B)]E(V)/\big[E(V)+V[\lambda(0)]/[1-\lambda(0)]\big]$$

식 (3)에서 $[1-P(B)]E(V_R)$ 이 식(5)에서는 $P(V)E(V_R)$ 로 바뀐 이유는 단수휴가모형에서는 서버가 유휴기간이라고 무조건 서버가 휴가중이 아니므로 서버가 휴가중일 때만 잔여휴가시간을 기다려야 하기 때문이다.

앞선 식들을 이용하여 식 (5)를 정리하면,

$$W_q = \frac{E(S)}{1-P(B)} E(\lambda_R) + \frac{P(B)}{1-P(B)} E(S_R) + \frac{E(V)}{E(I)} E(V_R) \quad (6)$$

를 얻게 된다.

5. 결론

본 논문에서 휴가형 $Geo^X/G/1$ 대기행렬 모형의 평균대기시간을 대기시간의 PGF없이 간단하게 구할 수 있음을 보였다. 이는 Chae and Lee [5]가 제안한 휴리스틱 방법이 이산시간모형에서도 성립함을 보인 것이다. 또한 이 방법은 복수휴가 및 단수휴가 외의 여러 휴가형 모형에서의 평균대기시간을 구하는 데에도 널리 활용될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] 김남기, 채경철, "도착시점 방법에 의한 이산시간 대기행렬의 분석", 한국경영과학회지, 제26권, 제4호(2001). pp.47-53.

[2] 이호우, [대기행렬이론], 개정판, 시그마프레스, 1998.

[3] 장석호, 채경철, "휴가형 Geo/G/1 대기행렬의 분해속성에 대한 새로운 표현", 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회, (2001). pp.148-151.

[4] Bruneel, H. and B. G. Kim, *Discrete-Time Models for Communication System Including ATM*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.

[5] Chae, K. C. and H. W. Lee, " $M^X/G/1$ Vacation Models with N-Policy: Heuristic Interpretation of the Mean Waiting Time", *Journal of the Operational Research Society*, Vol.46,

No.2(1995), pp.258-264.

[6] Takagi, H., *Queueing Analysis, Vol 3 : Discrete-Time Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1993.