

박 창 균 (서경대학교)

수학에서 정의란 무엇인가

인간에 대해 ‘호모 로쿠엔스(Homo loquens, 언어적 인간)’라는 표현이 있을 정도로 언어란 중요하다. 언어는 의사소통을 가능케 하는 도구이다. 언어는 비인지적 기능과 인지적 기능을 가진다. 비인지적 기능은 감정이나 정서 혹은 태도를 나타내는 ‘표현적’ 기능과 듣는 사람의 어떤 특정 행위를 유발하는 ‘지시적’ 기능으로 이루어진다. 인지적 기능은 정보를 전달하는 데 요구되는 기능이며 참, 거짓과 관련된다. K. Popper는 과학의 발전 과정에서 언어의 기술적(descriptive) 기능과 논증적(argumentative) 기능을 중요한 것으로 생각했다. 무엇을 기술할 때는 문법에 맞아야 할 뿐만 아니라 용어를 제대로 사용해야 한다. 문장은 단어로 이루어져 있고 단어의 올바른 사용을 위해서는 단어의 의미를 명확히 규정해야 한다. 곧 정의가 문제시 된다.

아리스토텔레스는 정의를 ‘무엇인가의 본질을 나타내는 설명’이라고 했다. 단어의 의미는 단어가 적용되는 사물이나 대상의 모든 속성들을 가리키는 내포와 적용되는 대상들인 외연으로 분석해 볼 수 있다. 단어에 의미를 부여하는 방식은 직시적 정의(비언어적 방식의 외연적 정의), 열거적 정의(언어적 방식의 외연적 정의), 내포적 정의(내포에 따른 정의), 맥락적 정의(단어가 사용되는 문맥을 제시하는 정의), 조작적 정의(어떤 반복이 가능한 조작을 통한 정의) 등 다섯 가지가 있다.

그러나 수학에서 정의는 위에서 언급된 것과는 다르다. 일반적으로 수학에서 하나의 정의란 다음 두 기준을 만족해야한다. 그 두 기준은 ‘제거가능성(eliminability)’과 ‘비창조성(non-creativity)’이다. 수학의 체계는 비정의용어 즉 원시용어(primitives)로부터 시작하는데, 제거가능성이란 다른 모든 용어는 이 원시용어로 대체할 수 있어야 한다는 것이다. 또한 비창조성이란 어떤 새로운 정리도 정리 없이는 증명될 수 없는 정의의 도움으로 증명되어서는 안 된다는 것이다. 그런데 이러한 기준은 그냥 생긴 것이 아니다. 논리주의와 형식주의 제창자라고 각각 알려진 프레게와 힐버트의 논쟁을 통해 얻어진 결과이기 때문이다. 그 논쟁은 1899년 발간된 힐버트의 『기하학의 기초』로부터 비롯되었다. 힐버트는 중요 용어들은 공리들에 의해 맥락적으로 정의된다는 점을 지적했다. 그러나 프레게는 이에 반대하였다. 그들 사이에 많은 문제들이 토론되었지만 정의의 본성과 이에 관련된 주제는 핵심적인 사항이었다.

위에서 언급한 두 기준은 많은 혼란을 명료하게 했고, 수학자들은 부여된 기준에 충실함으로써 수학적 진보를 이루었다. 그러나 어떤 개념 예컨대 다면체라는 개념은 시간에 따라 달리 발전해왔고, 그래프론 같은 이론은 여러 표현 방법을 가진다. 이런 경우에는 위의 기준으로는 잘 대체할 수 없다. 수학에서 정의에 대한 새로운 입장이 요구되고 더 탐구되어야 할 문제로 남는다.