

복합재료 회전원판의 면내응력 해석

구교남*

In-plane Stress Analysis of Rotating Composite Disks

Kyo-Nam Koo

Abstract

Rotating annular disks are widely used in data storage devices such as CDs, DVDs(digital versatile disks), and HDs(hard disks) as well as in traditional industrial machines like sawing machines, turbines, brake disks. The exact stress distribution of rotating polar orthotropic disk is derived by solving directly the equilibrium equation instead of using stress function. Stress distributions for typical GFRP and CFRP disks are presented in addition to polycarbonate disk. The results show that the application of CFRP to rotating disk can increase the maximum allowable rotating speed but this may not be applicable to GFRP disk.

Key Words: 회전원판(rotating disk), 면내 응력(in-plane stress analysis), 극직교 이방성 원판(polar orthotropic disk)

1. 서론

환형판(annular disk) 또는 원판(circular disk)은 산업기기에서 매우 다양한 형태로 사용되고 있다. 그 응용사례로는 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크 등 전통적인 산업기계뿐만 아니라 최근 하드 디스크, CD-ROM(compact disk), DVD(digital versatile disk) 등의 정보저장기기 등을 들 수 있다. 특히 취급하는 정보량이 증가함에 따라 정보 전달속도를 높이기 위해 이들 정보저장기기에 들어가는 디스크의 회전속도의 증가도 급격하게 이루어지고 있다. 현재 시판되고 있는 CD-ROM의 최대 회전속도는 52배속이며 디스크의 임계속도(critical speed)는 약 7,000 rpm 정도로 이미 초임계속도(supercritical speed)에서 구동되고 있으므로[1] 그이상의 속도에서 안정적이며 안전한 재료가 필요하게 되었다.

회전원판의 응력분포는 강도계산 뿐만 아니라 진동 해석 및 임계속도 계산에 요구된다. 일반적으로 등방성 회전원판에 대한 응력해석은 19세기 초 이래로 다루어지기 시작했으며 일반적인 탄성론 교재 대부분에

서 다룰 정도로 매우 진부한 문제이다. 복합재료의 그 응용성이 다양해지면서 1970년대 경부터 다양한 효과를 고려한 극직교 이방성(polar orthotropic) 회전원판에 대한 응력해를 다루기 시작했다.[2-5] 이들 대부분의 논문에서의 특징을 응력분포의 해석해(analytic solution)를 구하는데 있어서 구성방정식, 평형방정식과 변형을 적합방정식을 만족시키는 응력함수(stress function)에 대한 미분방정식을 다룬다는 점이다.

본 연구에서는 응력함수를 다루지 않고 변위에 대한 미분방정식의 해를 구한 뒤 응력분포를 구하는 직접적인 방법을 사용하였다. 원주방향과 반경방향의 탄

성비 $E_{\theta}/E_r=9$ 가 되어 해가 정의되지 않는 값에 대한 일반적인 식을 제시하였다. CD와 같은 재원을 갖는 원판에 유리섬유복합재료(GFRP)와 탄소섬유복합재료(CFRP)의 응력분포를 계산하여 인장강도를 구속 조건으로 하는 최대 회전수를 구하였으며 폴리카보네이트(polycarbonate) CD의 최대 회전수와 비교하였다.

* 울산대학교 항공우주공학과

2. 지배 방정식과 일반해

Fig. 1과 같은 좌표계를 갖는 극좌교 이방성 원판에서 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_r & \nu_{r\theta}K_\theta & 0 \\ \nu_{\theta r}K_r & K_\theta & 0 \\ 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 $\nu_{r\theta}/E_r = \nu_{\theta r}/E_\theta$ 인 관계가 성립하며 K_r 과 K_θ 는 다음과 같이 정의된다.

$$K_r = \frac{E_r h}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}, \quad K_\theta = \frac{E_\theta h}{1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}} \quad (2)$$

극좌표계에서 면내 변형율은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)을 식 (1)에 대입하고 z -방향으로 두께 h 에 대해 적분하면 다음과 같이 단위길이당 평면력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} N_r &= K_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_{r\theta}K_\theta \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} \right) \\ N_\theta &= \nu_{\theta r}K_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + K_\theta \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial \theta} \right) \\ N_{r\theta} &= hG_{r\theta} \left(-\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

회전수 Ω 로 회전하는 원판의 r -방향으로의 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$-\frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - \frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + N_\theta = \rho\Omega^2 r^2 \quad (5)$$

여기서 ρ 는 원판의 밀도이다. 회전 원판은 축대칭 문제이므로 $N_{r\theta}=0$ 이고 식(3)에서 $\partial(\cdot)/\partial \theta=0$ 임을 이용하면 N_r 과 N_θ 는 다음과 같이 단순화된다.

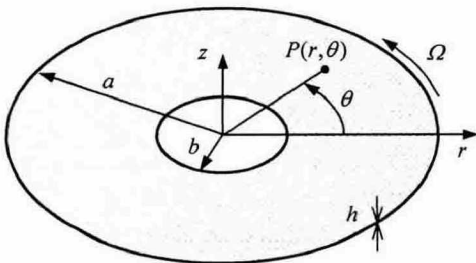


Fig. 1 Coordinates and geometry of rotating disk.

$$N_r = K_r \frac{du_r}{dr} + \nu_{r\theta}K_\theta \frac{u_r}{r} \quad (5)$$

$$N_\theta = \nu_{\theta r}K_r \frac{du_r}{dr} + K_\theta \frac{u_r}{r} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하며 정리하면 다음과 같이 코시-오일러 방정식 형태로 정리된다.

$$r^2 \frac{d^2 u_r}{dr^2} + r \frac{du_r}{dr} - \mu^2 u_r = -\frac{\rho h \Omega^2 r^3}{K_r} \quad (7)$$

여기서 $\mu^2 = E_\theta/E_r$ 이며 이 값에 따라 식 (7)의 일반해가 다음과 같이 두 경우로 나누어진다.

$$u_r(r) = C_1 r^\mu + C_2 r^{-\mu} - \frac{\rho h \Omega^2}{K_r} g(r) \quad (8)$$

where $g(r) = r^3/(9 - \mu^2)$ for $\mu \neq 3$

$g(r) = (r^3 \ln r)/6$ for $\mu = 3$

$r = b$ 에서 고정되고 $r = a$ 에서 자유인 경계조건은 다음과 같다.

$$u_r(b) = 0, \quad N_r(a) = 0 \quad (9)$$

식 (9)의 경계조건을 적용하여 u_r 을 구하고 식 (6)에 대입하면 원심력에 의한 평면력을 구할 수 있다.

$$\frac{N_r}{\rho h \Omega^2} = k \{ (C_{r1} - \delta_{\mu 3}) r^{\mu-1} - \frac{C_{r2}}{r^{\mu+1}} - C_{r3} r^2 f(r) \} \quad (10)$$

$$\frac{N_\theta}{\rho h \Omega^2} = k \{ (C_{\theta 1} - \nu_{\theta r} \delta_{\mu 3}) r^{\mu-1} + \frac{C_{\theta 2}}{r^{\mu+1}} - C_{\theta 3} r^2 f(r) \} \quad (11)$$

여기서 각각 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$C_{r1} = (1 + \mu \nu_{r\theta}) [\{ (3 + \nu_{\theta r}) f(a) + \delta_{\mu 3} \} a^3 b^{-\mu} + (\mu - \nu_{\theta r}) a^{-\mu} b^3 f(b)] / D$$

$$C_{r2} = \{ (\mu + \nu_{\theta r}) f(a) - (3 + \nu_{\theta r}) f(b) + \delta_{\mu 3} \} a^\mu b^3 / D$$

$$C_{r3} = 3 + \nu_{\theta r}$$

$$C_{\theta 1} = \mu C_{r1}$$

$$C_{\theta 2} = \mu C_{r2}$$

$$C_{\theta 3} = \mu^2 (1 + 3\nu_{\theta r})$$

$$D = (1 + \mu \nu_{r\theta}) (a/b)^\mu + (1 - \mu \nu_{r\theta}) (b/a)^\mu$$

$$\begin{cases} k = 1/(9 - \mu^2), \delta_{\mu 3} = 0, f(r) = 1 & \text{for } \mu \neq 3 \\ k = 1/6, \delta_{\mu 3} = 1, f(r) = \ln(r) & \text{for } \mu = 3 \end{cases}$$

3. 계산결과 및 검토

본 연구에서 유도된 해를 CD-ROM과 같은 제원을 갖는 원판에 적용하였으며 CD-ROM의 기하학적인 제원은 다음과 같다.

Table 1 Material properties.

	PC	GFRP	CFRP
E_1	2.2 GPa	38.6 GPa	181.0 GPa
E_2	2.2 GPa	8.27 GPa	10.3 GPa
G_{12}	0.846 GPa	4.14 GPa	7.17 GPa
ν_{12}	0.30	0.26	0.28
ρ	1220 kg/m ³	1800 kg/m ³	1600 kg/m ³
X	54.9 MPa	1062 MPa	1500 MPa
Y	54.9 MPa	31 MPa	40 MPa

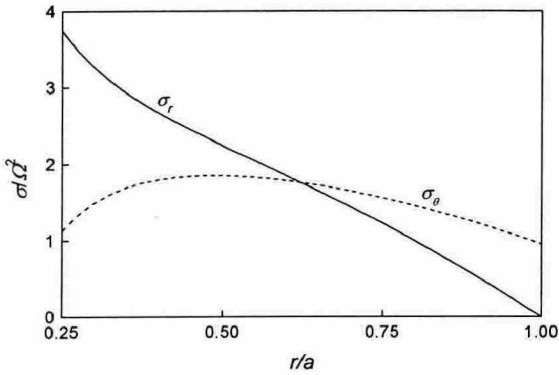


Fig. 2 Stress distribution of polycarbonate disk.

$$b = 15 \text{ mm}, a = 60 \text{ mm}, t = 1.2 \text{ mm}$$

Table 1에는 본 연구에서 사용된 재료들의 물성치를 나타낸다. PC는 폴리카보네이트로 일반 CD-ROM의 재료이고, GFRP는 전형적인 유리섬유 강화 복합재료인 E-glass/Epoxy이며, CFRP는 탄소섬유강화 복합재료의 중 T300/N5208을 선택하였다. Table 1에서 하첨자 1과 2는 각각 섬유방향과 섬유에 수직인 방향을 뜻하며 X와 Y는 1과 2 방향으로의 인장강도를 의미한다.

Fig. 2는 일반 CD인 폴리카보네이트 원판의 σ_r/Ω^2 와 σ_θ/Ω^2 의 분포를 나타내고 있다. 반경방향 응력은 예상대로 중심으로 갈수록 증가하는 양상이며 원주방향 응력은 $r/a = 0.485$ 에서 최대값을 갖는다.

극직교 이방성 원판은 반경방향으로 보강된 (radially reinforced: RR) 판과 원주방향으로 보강된 (circumferentially reinforced: CR) 판으로 고려할 수 있다. 각각의 경우 물성치는 다음과 같이 고려해야 한다.

$$\text{RR disk: } E_r = E_1, E_\theta = E_2, G_{r\theta} = G_{12}, \nu_{r\theta} = \nu_{12}$$

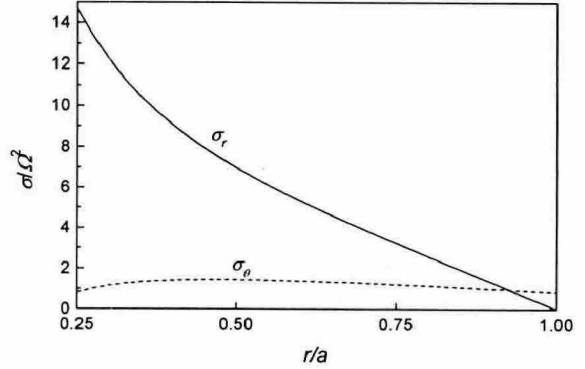


Fig. 3 Stress distribution of RR GFRP disk.

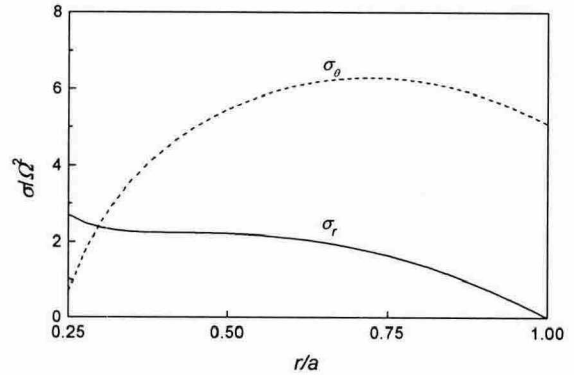


Fig. 4 Stress distribution of CR GFRP disk.

$$\text{CR disk: } E_r = E_2, E_\theta = E_1, G_{r\theta} = G_{12}, \nu_{r\theta} = \nu_{21}$$

Fig. 3은 반경 방향으로 섬유가 배열된 RR GFRP 원판의 응력분포로 $\mu^2 = 0.214$ 에 해당된다. Fig. 2의 등방성 원판과 응력분포는 유사하나 이 σ_θ/Ω^2 에 비해 σ_r/Ω^2 가 매우 크게 나타나고 있다. Fig. 4는 원주 방향으로 섬유가 배열된 CR GFRP 원판의 응력분포이며 $\mu^2 = 4.67$ 이다. CR GFRP 원판은 거의 모든 반경에서 σ_θ/Ω^2 가 σ_r/Ω^2 보다 큰 값을 갖고 있다. σ_r/Ω^2 의 분포의 변화는 RR GFRP 원판에 비해 완만하며 σ_θ/Ω^2 의 최대값을 갖는 반경의 위치는 바깥쪽으로 대폭 이동하였음을 알 수 있다.

Fig. 5와 Fig. 6은 GFRP 보다 밀도는 작은 반면 강도와 강성이 더욱 우수한 CFRP 회전 원판의 응력분포를 보여준다. RR CFRP 원판의 응력분포를 살펴보면 RR GFRP와 유사한 경향을 갖고 있으나 σ_θ/Ω^2 가 매우 작은 나타나고 있다. CR CFRP 원판

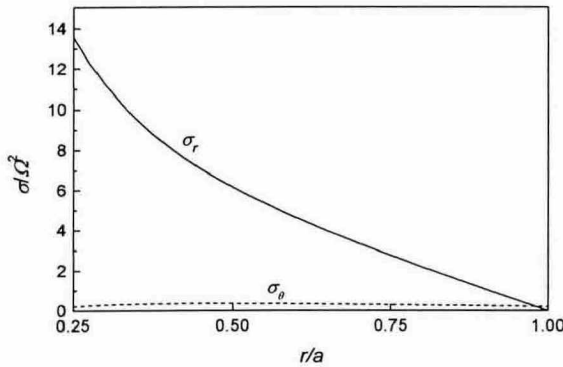


Fig. 5 Stress distribution of RR CFRP disk.

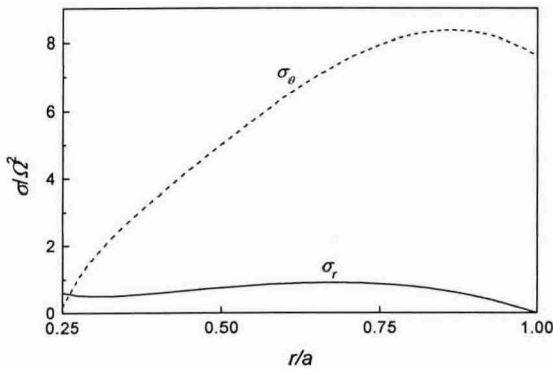


Fig. 6 Stress distribution of CR CFRP disk.

Table 2 Maximum rotating speeds based on strength

Material		Max rotating speed (rpm)	
		RR disk	CR disk
Polycarbonate		36,544	
GFRP	X	81,165	124,003
	Y	44,368*	32,266*
CFRP	X	100,272*	132,827
	Y	101,000	77,096*

의 경우 σ_r/Ω^2 의 분포는 다른 원판과는 달리 반경 방향이 작아질수록 단조증가하지 않고 감소하다가 고정위치인 $r/a=0.25$ 부근에서 약간 감소하는 분포를 갖는다. σ_θ/Ω^2 의 최대값은 GFRP 원판에 비해 반경 바깥쪽으로 더욱 이동한 모습이다.

Table 2에는 인장강도를 구속조건으로 하는 최대 회전속도를 원판의 종류별로 나타내었다. GFRP 나 CFRP의 경우 * 표시한 회전수가 최대 허용 회전속도를 나타낸다. 폴리카보네이트 원판은 임계속도가 약 7,000 rpm인데 이 값보다는 훨씬 여유있

는 인장 강도에 대한 허용 회전수를 갖는다. GFRP 나 CFRP 원판의 최대 회전수는 RR원판보다 CR 원판이 작게 나타난다. RR 원판의 경우 GFRP 원판은 최대 회전속도 44,368 rpm에서 기지가 파손되며 CFRP 원판의 경우 100,272 rpm에서 섬유의 파손이 발생함을 확인 할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 응력함수를 다루지 않고 변위에 대한 미분방정식의 해를 구한 뒤 응력분포를 구하는 직접적인 방법을 사용하였다. CD와 같은 제원을 갖는 원판에 유리섬유복합재료(GFRP)와 탄소섬유복합재료(CFRP)의 응력분포를 계산하여 인장 강도를 구속조건으로 하는 최대 회전수를 구하였다. GFRP 원판의 경우 폴리카보네이트 원판보다 최대 허용회전수가 작게 나타나고 있었으며 CFRP 원판은 2배 이상 증가된 값을 갖고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 GFRP 원판과 CFRP 원판 모두에서 원주방향으로 보강된 원판에 의해 최대 허용 회전수가 결정되었다.

본 연구에서 구한 응력분포는 후진파에 의한 임계속도에 계산에 활용될 예정이며 최대 임계속도를 갖는 섬유배열을 달라질 것으로 예상된다.

참고문헌

- [1] Lee, S.-Y., Kim, J.-Y., and Lim, S., "Critical and Flutter Speeds of Optical Disks," *Microsystem Technologies*, Vol. 8, 2002, pp. 206-211.
- [2] Tang, S., "Elastic Stresses in Rotating Anisotropic Disks," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 11, No. 6, 1969, pp. 509-517.
- [3] Reddy, T. A. and Srinath, H., "Elastic Stresses in a Rotating Anisotropic Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.16, No. 2, 1974, pp. 85-89.
- [4] Chang, C. I., "A Closed-Form Solution for an Orthotropic Rotating Disk," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, Dec. 1974, pp. 1122-1123.
- [5] Genta, G. and Gola, M., "The Stress Distribution in Orthotropic Rotating Disks," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 48, Sep. 1981, pp. 559-562.